BTS Conception de produits industriels
Session 2010

EXERCICE 1 **10 points**

Les parties A et B de cet exercice peuvent être traitées de façon indépendante.

A. Résolution d'une équation différentielle

On considère l'équation différentielle

$$(E): \ 2y'' + 2y' + y = \left(5x^2 + 22x + 31\right) \mathrm{e}^x$$

où y est une fonction de la variable réelle x, définie et deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$, y' la fonction dérivée de y et y'' sa fonction dérivée seconde.

1 Déterminer les solutions de l'équation différentielle $(E_0): \ 2y'' + 2y' + y = 0$.

2 Montrer que la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \left(x^2 + 2x + 3\right) \mathrm{e}^x$ est une solution particulière de l'équation (E).

3 En déduire l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E).

4 Déterminer la solution particulière f de l'équation différentielle (E) qui vérifie les conditions initiales $f(0) = 3$ et $f'(0) = 5$.

B. Étude d'une fonction

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \left(x^2 + 2x + 3\right) \mathrm{e}^x$.

On désigne par C la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormal $\left(\mathrm{O}; \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.

1 Démontrer que, pour tout x de $\mathbb{R}$,

$$f'(x) = \left(x^2 + 4x + 5\right) \mathrm{e}^x.$$

2 Étudier le signe de $f'(x)$ lorsque x varie dans $\mathbb{R}$.

3 **a)** Déterminer $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} f(x)$.

b) Déterminer $\displaystyle\lim_{x \to -\infty} f(x)$. Que peut-on en déduire pour la courbe C ?

4 Établir le tableau de variation de f sur $\mathbb{R}$.

5 **a)** Démontrer que le développement limité à l'ordre 2, au voisinage de 0, de la fonction f est :

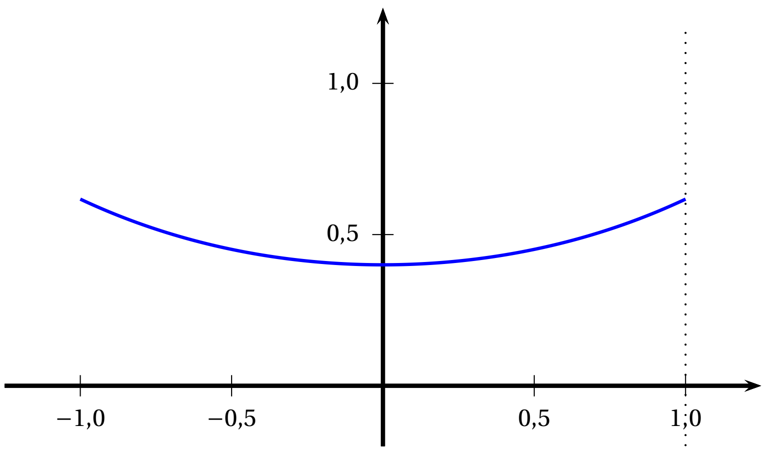
$f(x) = 3 + 5x + \dfrac{9}{2}x^2 + x^2\varepsilon(x)$ avec $\displaystyle\lim_{x \to 0} \varepsilon(x) = 0$.

b) En déduire une équation de la tangente T à la courbe C au point d'abscisse 0.

c) Étudier la position relative de C et T au voisinage du point d'abscisse 0.

EXERCICE 2 **3 points**

La courbe C ci-dessous est la représentation graphique dans un repère orthogonal de la fonction f définie sur $[-1, 1]$ par $f(x) = \dfrac{1}{5}\left(\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}\right)$.



On considère le solide de révolution engendré par la rotation de la courbe C autour de l'axe des abscisses.
On désigne par V le volume, en unités de volume, de ce solide.
On admet que $V = \int_{-1}^{1} \pi \left[f(x)\right]^2 \mathrm{d}x$.

1 Vérifier que : $V = \int_{-1}^{1} \frac{\pi}{25}\left(2 + \mathrm{e}^{2x} + \mathrm{e}^{-2x}\right) \mathrm{d}x$.

2 Démontrer que : $V = \frac{\pi}{25}\left(4 + \mathrm{e}^{2} - \mathrm{e}^{-2}\right)$.

3 Donner la valeur approchée arrondie à 10^{-2} de V.

Le solide obtenu ci-dessus est le modèle d'un élément de mobilier urbain.

EXERCICE 3 (7 points)

Le plan est muni d'un repère orthonormal $\left(O;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$ où l'unité graphique est 4 centimètres.
On souhaite construire la courbe de Bézier C définie par les points de définition suivants donnés par leurs coordonnées : $A_0(0\ ;\ 0)$; $A_1(0\ ;\ 2)$; $A_2\left(3\ ;\ \dfrac{3}{4}\right)$.
On rappelle que la courbe de Bézier définie par les points de définition $A_i (0 \leqslant i \leqslant n)$ est l'ensemble des points $M(t)$ tels que, pour tout t de l'intervalle $[0\ ;\ 1]$:

$$\overrightarrow{OM(t)} = \sum_{0}^{n} B_{i,n}(t)\ \overrightarrow{OA_i} \quad \text{où } B_{i,n}(t) = C_n^i\ t^i\ (1-t)^{n-i}.$$

1 Développer, réduire et ordonner les polynômes $B_{i,2}(t)$ avec $0 \leqslant i \leqslant 2$.

2 On note $\big(f(t), g(t)\big)$ les coordonnées du point $M(t)$ de la courbe C.
Démontrer qu'un système d'équations paramétriques de la courbe C est :

$$\begin{cases} x = f(t) = 3t^2 \\ y = g(t) = 4t - \dfrac{13}{4}t^2 \end{cases} \qquad \text{où } t \text{ appartient à l'intervalle } [0\ ;\ 1].$$

3 Étudier les variations de f et g sur $[0\ ;\ 1]$ et rassembler les résultats dans un tableau unique.

4 Déterminer un vecteur directeur de la tangente à la courbe C :

a) au point A_0,

b) au point A_2,

c) au point $M\left(\dfrac{8}{13}\right)$.

5 La figure est à réaliser sur une feuille de papier millimétré. Construire les tangentes définies au **4** et la courbe C. Que constate-t-on ?