Histoire et mathématiques

Un projet co-disciplinaire en seconde

Les séances « Maths-Histoire »

- L'origine du projet

- Objectifs des séances
  - Interdisciplinarité
  - Sens, raisons d'être des notions mathématiques
  - Lien avec les programmes :
    - En mathématiques
    - En histoire-géo
  - Structure intégrée dans les progressions

Les modalités

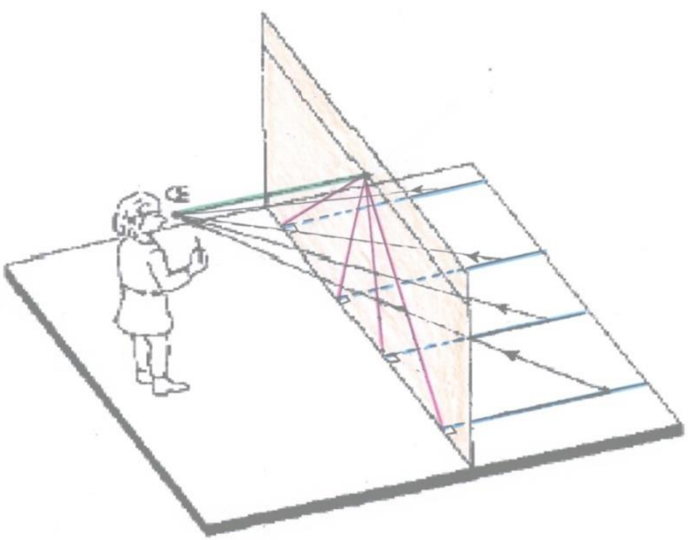
- Diaporama
    - Nombreuses illustrations
    - Eléments importants à noter
    - Accompagné éventuellement d’un support (plan, schéma, frise chronologique, carte …)
- Séances de groupe
    - Favoriser les interactions
    - Faire participer les élèves
- Travail CDI
- Travail en aval / en amont en classe
    - Lien avec le travail de classe
    - Partie intégrante du chapitre en cours
- Evaluation

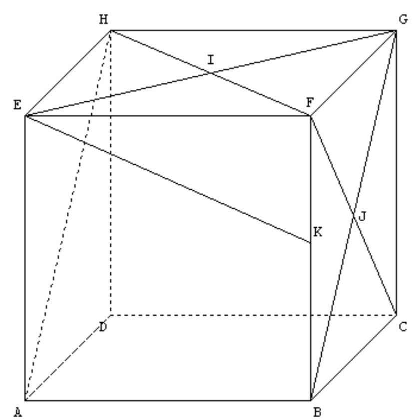
Les séances expérimentées

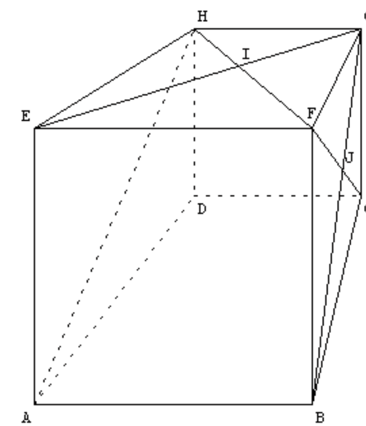
	Démonstration	**Histoire des chiffres (→ 2012)**	**Perspective**	**Cartographie**
Programme mathématiques	Logique Théorèmes, définitions …	Arithmétique	Géométrie dans l’espace	Repérage, trigo Géométrie dans l’espace
Programme histoire	Citoyenneté à Athènes	Méditerranée au XIIe siècle	Les hommes de la Renaissance	Les grandes découvertes
Impact sur le travail en classe	Syllogismes Statut des énoncés Types de raisonnements	Ecriture des nombres Nombres figurés	Tracés d’ombres Point de fuite	Trigonométrie, Choisir un repère, Vecteurs (caps)

Perspective

Géométrie dans l'espace Les solides usuels étudiés au collège : parallélépipède rectangle, pyramides, cône et cylindre de révolution, sphère. Droites et plans, positions relatives. Droites et plans parallèles.	• Manipuler, construire, représenter en perspective des solides.	C'est l'occasion d'effectuer des calculs de longueur, d'aire et de volumes. On entraîne les élèves à l'utilisation autonome d'un logiciel de géométrie dans l'espace.

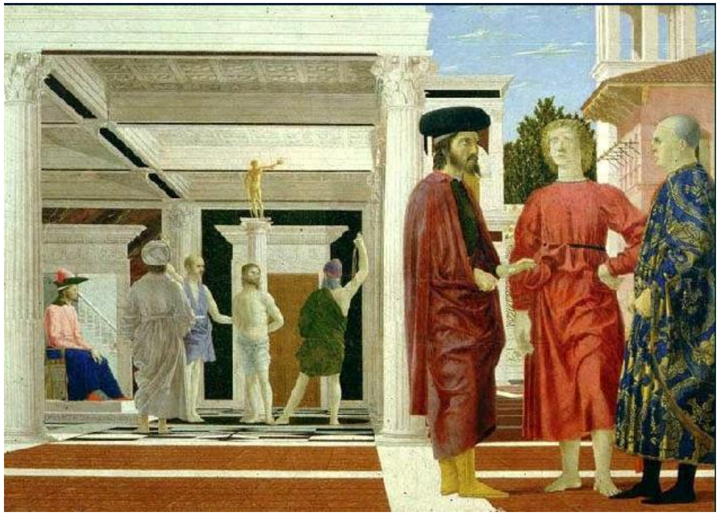






Perspective

On traite une question au choix parmi les deux suivantes	**Mise en œuvre**
Les hommes de la Renaissance (XVe-XVIe siècle)	Une étude obligatoire : un réformateur et son rôle dans l'essor du protestantisme ; et une étude choisie parmi les deux suivantes ; - un éditeur et son rôle dans la diffusion de l'Humanisme; - un artiste de la Renaissance dans la société de son temps.
L'essor d'un nouvel esprit scientifique et technique (XVIe-XVIIIe siècle)	Deux études choisies parmi les trois suivantes : - un savant du XVIe ou du XVIIe siècle et son œuvre ; - les modalités de diffusion des sciences au XVIIIe siècle ; - l'invention de la machine à vapeur : une révolution technologique

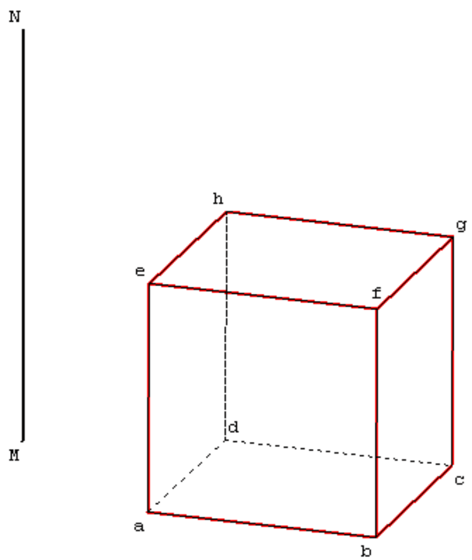


La Flagellation du Christ – Piero Della Francesca

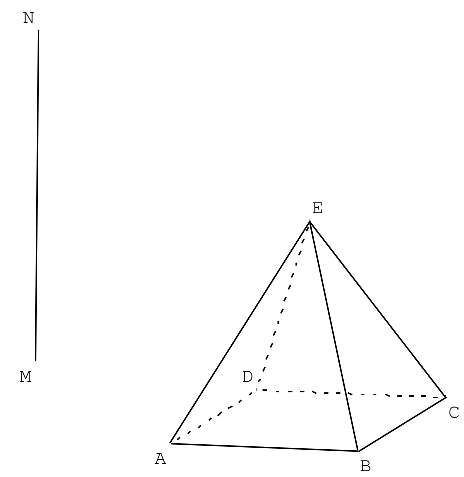
L'Annonciation avec Saint Emidius - Crivelli

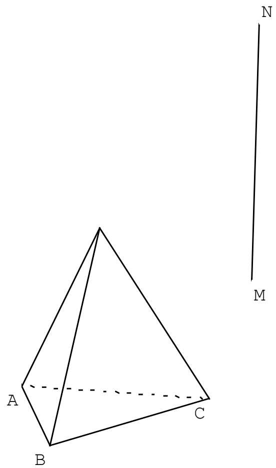
Exemple d’exercices

Le segment [MN] représente un lampadaire, la lumière est en N, M est posé au sol.
1°) abcdefgh est un cube posé sur le sol, tracer l’ombre du cube (supposé plein) sur le sol.



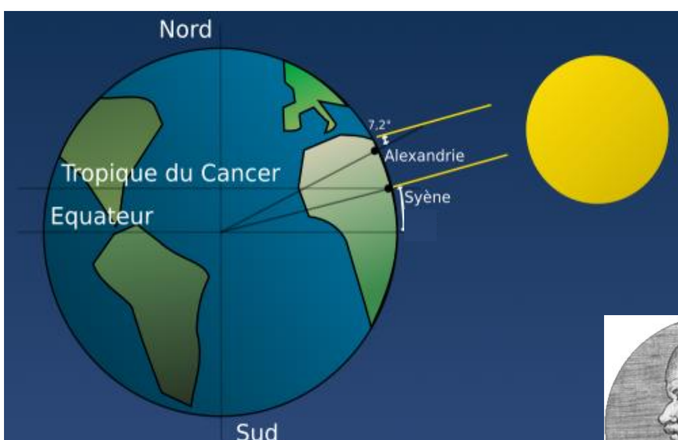
2°) tracer de même les ombres de la pyramide à base carrée et du tétraèdre régulier ci-dessous.
Indication : tracer le pied de la hauteur issue de E pour pouvoir construire l’ombre de E comme dans le 1)

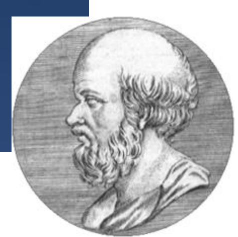




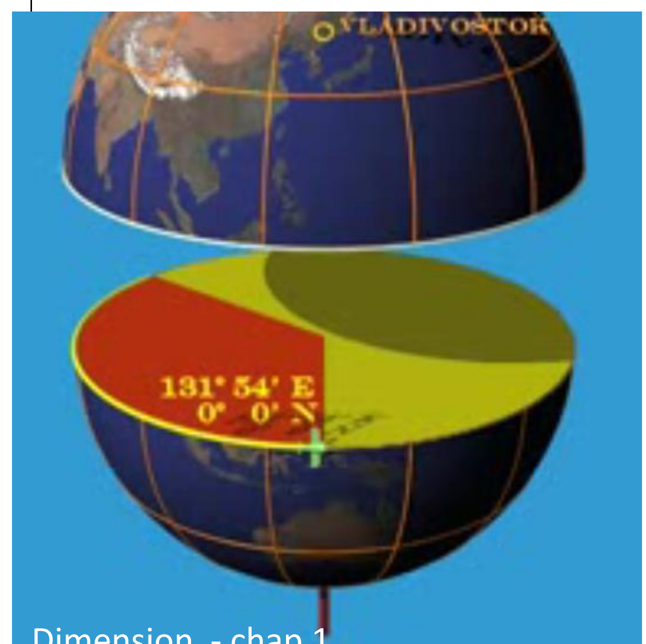
Cartographie

Trigonométrie « Enroulement de la droite numérique » sur le cercle trigonométrique et définition du sinus et du cosinus d'un nombre réel.	• On fait le lien avec les valeurs des sinus et cosinus des angles de $0°$, $30°$, $45°$, $60°$, $90°$.	On fait le lien avec la trigonométrie du triangle rectangle vue au collège. La notion de radian n'est pas exigible.
Géométrie dans l'espace Les solides usuels étudiés au collège : parallélépipède rectangle, pyramides, cône et cylindre de révolution, sphère. Droites et plans, positions relatives. Droites et plans parallèles.	• Manipuler, construire, représenter en perspective des solides.	C'est l'occasion d'effectuer des calculs de longueur, d'aire et de volumes.





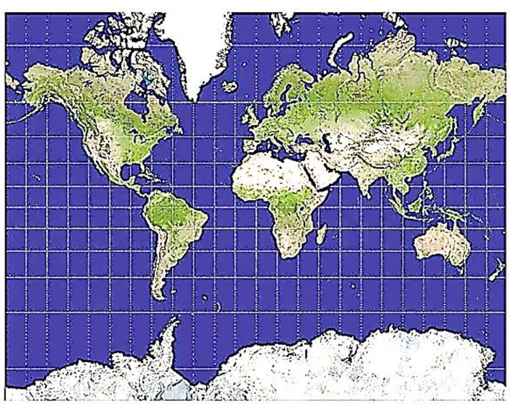
Eratosthène

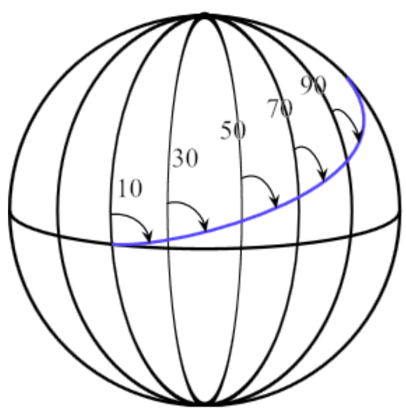


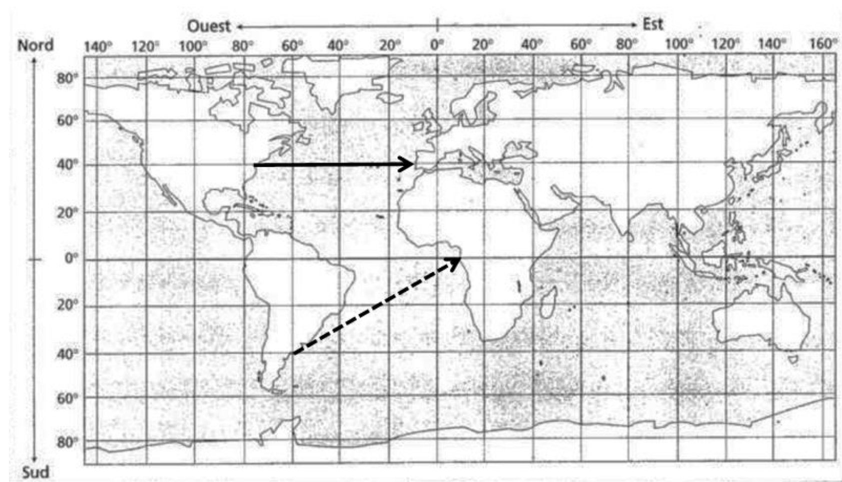
http://www.dimensions-math.org/Dim_fr.htm

Cartographie

Vecteurs Définition de la translation qui transforme un point A du plan en un point B. Vecteur $\overrightarrow{AB}$ associé.		À tout point C du plan, on associe, par la translation qui transforme A en B, l'unique point D tel que $[AD]$ et $[BC]$ ont même milieu.
Égalité de deux vecteurs : $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$.	• Savoir que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ équivaut à $ABDC$ est un parallélogramme, éventuellement aplati.	
Coordonnées d'un vecteur dans un repère.	• Connaître les coordonnées $(x_B - x_A, y_B - y_A)$ du vecteur $\overrightarrow{AB}$.	







Cartographie

Question obligatoire	**Mise en œuvre**
L'élargissement du monde (XVe-XVIe siècle)	La question traite des contacts des Européens avec d'autres mondes et de l'élargissement de leurs horizons géographiques en prenant appui sur une étude obligatoire : - de Constantinople à Istanbul : un lieu de contacts entre différentes cultures et religions (chrétiennes, musulmane, juive) ; sur une étude choisie parmi les deux suivantes : - un navigateur européen et ses voyages de découverte ; - un grand port européen ;

T dans O, XI^{e}, Leipzig

Al Idrisi , XII^{e}

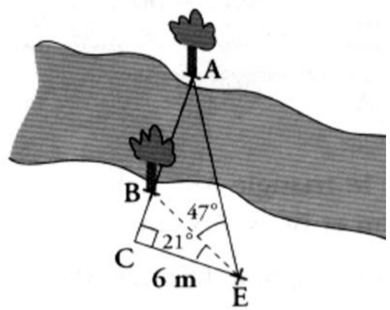
Martellus, vers 1490

Agnese, 1550

L'Histoire 355 p 56 – 57

Exemples d’exercices

Largeur d’une rivière



Un géomètre désire mesurer la largeur d’une rivière. Il dispose d’un théodolite pour mesurer des angles (voir page 50). Il repère deux arbres A et B de part et d’autre de la rivière et place un repère en C tel que A, B et C soient alignés. Il place ensuite sur la berge un repère E à 6 m de C et tel que l’angle $\widehat{ACE}$ soit droit.

Il relève ensuite la mesure de $\widehat{CEB}$ et de $\widehat{BEA}$.

$$\widehat{CEB} = 21° \quad ; \quad \widehat{BEA} = 47°$$

Calculer la largeur de la rivière obtenue à partir de ces mesures.

Figure ci-contre : on vise le point B de l’autre côté d’une rivière, à partir de deux endroits différents

A et C, afin de mesurer les angles $\widehat{BAC}$ et $\widehat{BCA}$.
On connaît également la distance AC.

Données : $\widehat{BAC} = 84°$, $\widehat{BCA} = 47°$ et AC = 134 m.

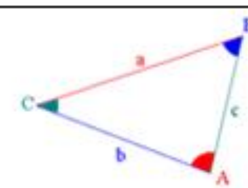
<u>1ère méthode</u> : En prenant des mesures sur un dessin à l’échelle, estimer les longueurs BC et BA.

<u>2ème méthode :</u> Calculer BA et BC en utilisant la loi des sinus (formule que nous démontrerons plus tard.)

<u>Loi des sinus :</u> Dans un triangle ABC, on a l’égalité de ces trois rapports :

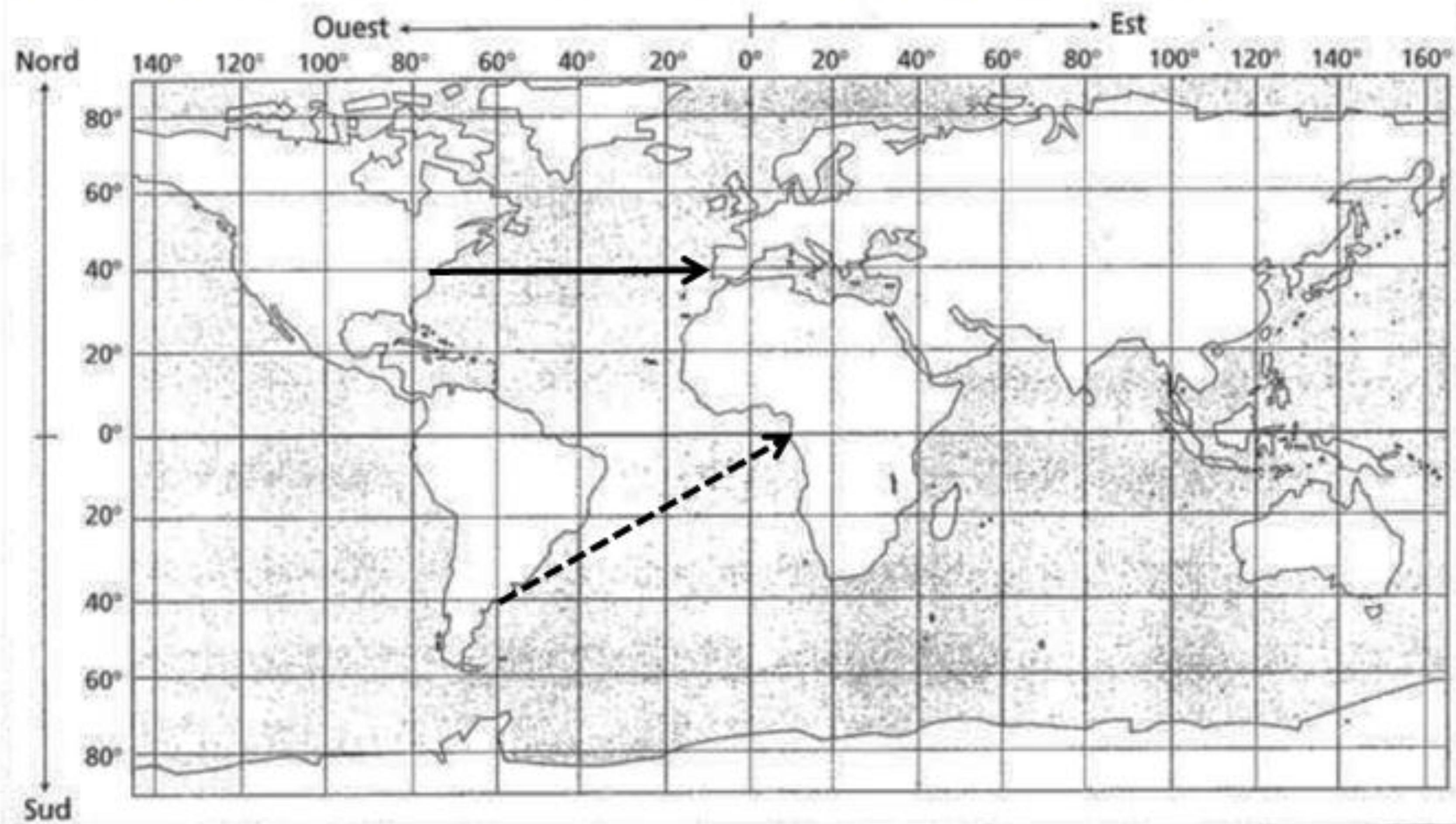
$$\frac{a}{\sin \hat{A}} = \frac{b}{\sin \hat{B}} = \frac{c}{\sin \hat{C}}$$

(avec AB = c, AC = b et BC = a)

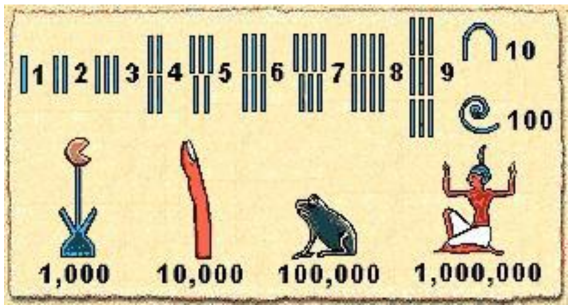


Exemple d'exercices

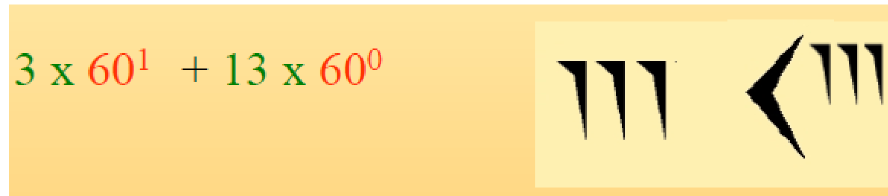
Partie 1 Sur la carte ci-dessous décrire les déplacements représentés par les deux flèches.



Histoire des chiffres

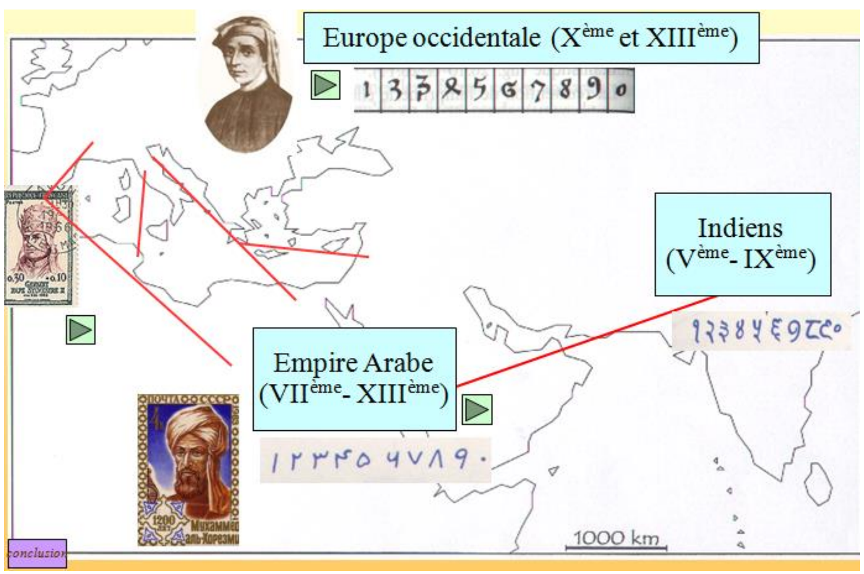


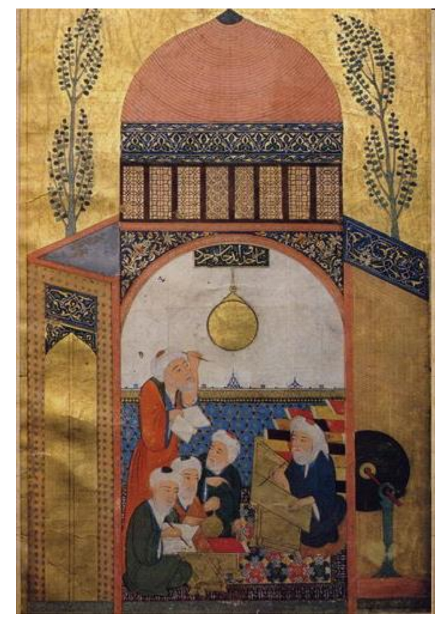
Numération égyptienne



Numération babylonienne

Base de numération, décomposition, diviseurs, …



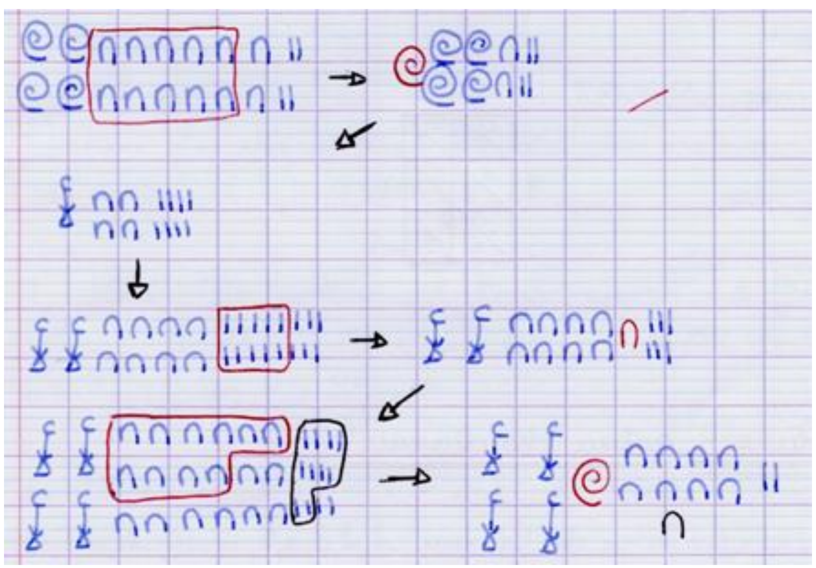


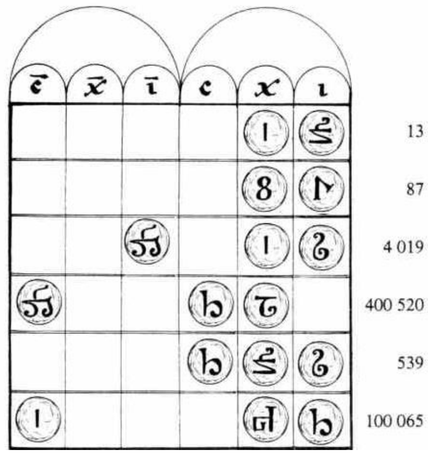
La maison de la Sagesse à Bagdad

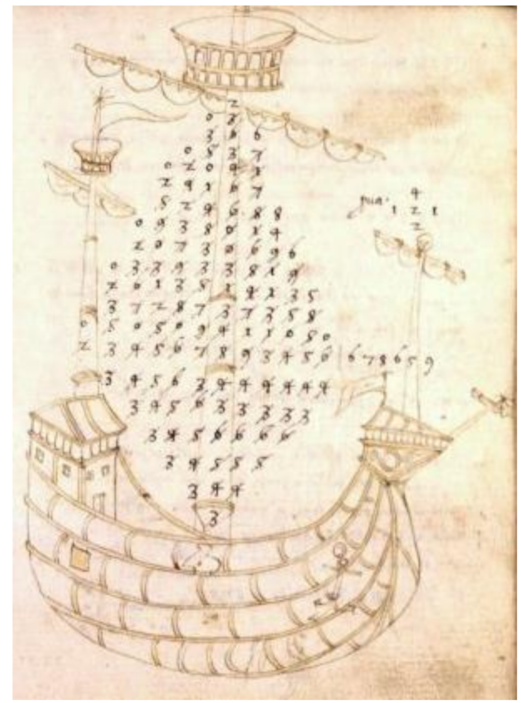
L’Empire Arabe au Moyen-Age, transmissions, traductions, place des sciences

Histoire des chiffres

Des pistes pour l'algorithmique ?





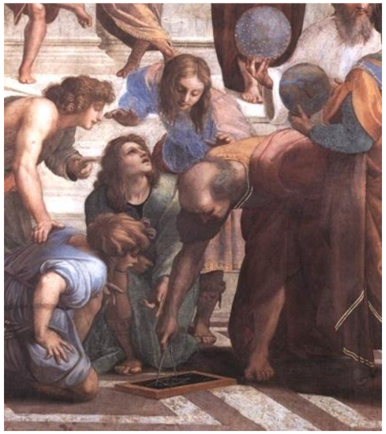


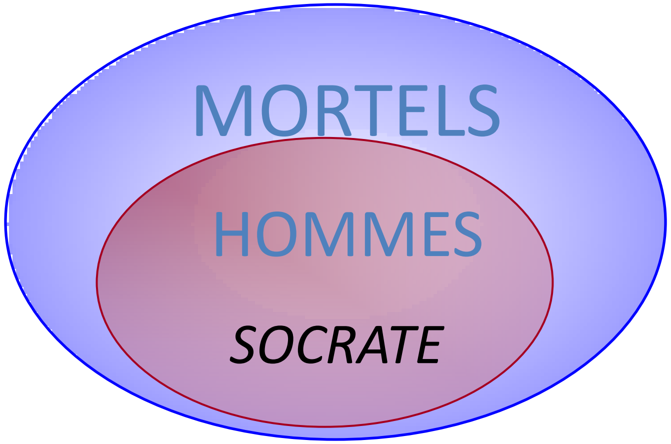
Liber abaci – Fibonacci

La démonstration

Pour ce qui concerne le raisonnement logique, les élèves sont entraînés, sur des exemples :

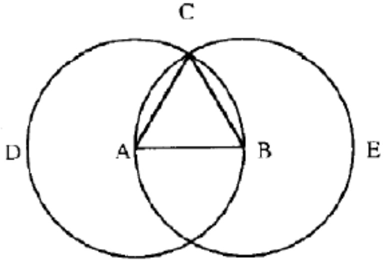
- à utiliser correctement les connecteurs logiques « et », « ou » et à distinguer leur sens des sens courants de « et », « ou » dans le langage usuel ;
- à utiliser à bon escient les quantificateurs universel, existentiel (les symboles $\forall$, $\exists$ ne sont pas exigibles) et à repérer les quantifications implicites dans certaines propositions et, particulièrement, dans les propositions conditionnelles ;
- à distinguer, dans le cas d'une proposition conditionnelle, la proposition directe, sa réciproque, sa contraposée et sa négation ;
- à utiliser à bon escient les expressions « condition nécessaire », « condition suffisante » ;
- à formuler la négation d'une proposition ;
- à utiliser un contre-exemple pour infirmer une proposition universelle ;
- à reconnaître et à utiliser des types de raisonnement spécifiques : raisonnement par disjonction des cas, recours à la contraposée, raisonnement par l'absurde.


Extrait de l'école d'Athènes - Raphaël



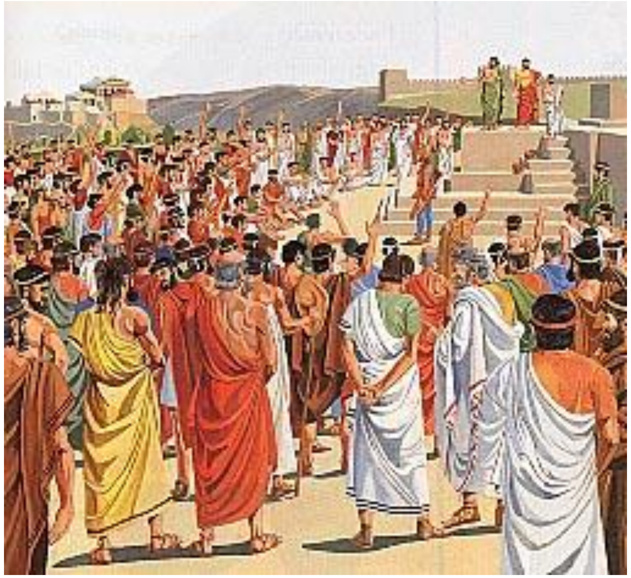
1

Sur une droite limitée donnée, construire un triangle équilatéral.



La démonstration

Questions obligatoires	**Mise en œuvre**
Citoyenneté et démocratie à Athènes (Ve-IVe siècle av. J-C.)	- La participation du citoyen aux institutions et à la vie de la cité : fondement de la démocratie athénienne. - La démocratie vue et discutée par les Athéniens.



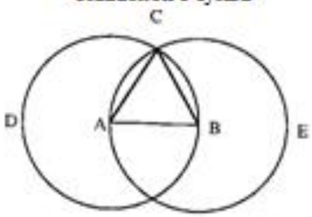
Plan – Diaporama

- Les mathématiques avant la civilisation grecque
- La cité grecque au V^{e} siècle : les fonctions du citoyen
  - Militaire
  - Sociale
  - Politique → besoin d'argumenter dans les débats
  - Religieux
- La naissance d'un nouveau mode de pensée
  - Expliquer autrement que par les mythes (science, histoire)
- Personnages importants
  - Thalès
  - Pythagore
  - Platon
  - Aristote → définition de la démonstration par le syllogisme
  - Euclide → utilisation des démonstrations

Travail au CDI – repris en maths

EUCLIDE (3ième siècle avant JC)

Traduction Peyrard



PROPOSITION PREMIÈRE.

PROBLÈME.

Sur une droite donnée et finie, construire un triangle équilatéral.

Soit AB (fig. 1) la droite donnée et finie : il faut construire sur la droite AB un triangle équilatéral.

Du centre A et avec un intervalle AB, décrivez la circonférence BCD (dem. 3) ; ensuite du centre B et avec l'intervalle BA décrivez la circonférence ACE ; et du point C, où les circonférences se coupent mutuellement, conduisez aux points A, B, les droites CA, CB (dem. 1).

Car puisque le point A est le centre du cercle CDB, la droite AC sera égale à la droite AB (déf. 15) ; de plus, puisque le point B est le centre du cercle CAE, la droite BC sera égale à la droite BA ; mais il a été démontré que la droite CA étoit égale à la droite AB : donc chacune des droites CA, CB est égale à la droite AB ; or les quantités qui sont égales à une même quantité sont égales entr'elles ; donc la droite CA est égale à la droite CB : donc les trois droites CA, AB, BC sont égales entr'elles.

Donc le triangle ABC (déf. 24) est équilatéral, et de plus il est construit sur la ligne donnée et finie AB ; ce qu'il falloit faire.

EUCLIDE (3ième siècle avant JC)

Texte grec

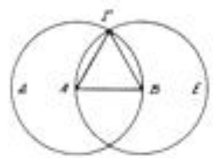
ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ α΄.

α΄.

Ἐπὶ τῆς δοθείσης εὐθείας πεπερασμένης τρίγωνον ἰσόπλευρον συστήσασθαι.

Ἔστω ἡ δοθεῖσα εὐθεῖα πεπερασμένη ἡ ΑΒ.

Δεῖ δὴ ἐπὶ τῆς ΑΒ εὐθείας τρίγωνον ἰσόπλευρον συστήσασθαι.



Κέντρῳ μὲν τῷ Α διαστήματι δὲ τῷ ΑΒ κύκλος γεγράφθω ὁ ΒΓΔ, καὶ πάλιν κέντρῳ μὲν τῷ Β διαστήματι δὲ τῷ ΒΑ κύκλος γεγράφθω ὁ ΑΓΕ, καὶ ἀπὸ τοῦ σημείου, καθ' ὃ τέμνουσιν ἀλλήλους οἱ κύκλοι, ἐπὶ τὰ Α, Β σημεῖα ἐπεζεύχθωσαν εὐθεῖαι αἱ ΓΑ, ΓΒ.

Καὶ ἐπεὶ τὸ Α σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ ΓΔΒ κύκλου, ἴση ἐστὶν ἡ ΑΓ τῇ ΑΒ· πάλιν, ἐπεὶ τὸ Β σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ ΓΑΕ κύκλου, ἴση ἐστὶν ἡ ΒΓ τῇ ΒΑ· ἐδείχθη δὲ καὶ ἡ ΓΑ τῇ ΑΒ ἴση· ἑκατέρα ἄρα τῶν ΓΑ, ΓΒ τῇ ΑΒ ἐστιν ἴση· τὰ δὲ τῷ αὐτῷ ἴσα καὶ ἀλλήλοις ἐστὶν ἴσα· καὶ ἡ ΓΑ ἄρα τῇ ΓΒ ἐστιν ἴση· αἱ τρεῖς ἄρα αἱ ΓΑ, ΑΒ, ΒΓ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν.

Ἰσόπλευρον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον, καὶ συνέσταται ἐπὶ τῆς δοθείσης εὐθείας πεπερασμένης τῆς ΑΒ.

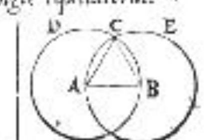
[Ἐπὶ τῆς δοθείσης ἄρα εὐθείας πεπερασμένης τρίγωνον ἰσόπλευρον συνέσταται]· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

HERIGONE (1634)

PROBL. I. PROPOS. I.

SVPER data recta linea terminata, triangulum æquilaterum constituere.

Sur vne ligne droicte donnée & terminée, descrire vn triangle equilateral.



Hypoth.

ab *eſt* — D.

Req. π. fa.

Δabc *æquilat.*

Conſtr.

1.p.1. abcd *eſt* ⊙,

1.p.1. bace *eſt* ⊙,

1.p.1. ac & bc, *ſnt* —,

ſymp. Δabc *eſt æquilat.*

Demonſtr.

conſtr. abcd & bace *ſnt* ⊙,

15.d.1. ac 2|2 ab,

15.d.1. bc 2|2 ba,

1.a.1. ac 2|2 bc,

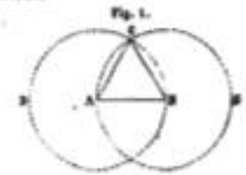
concl. 24.d.1. Δabc *eſt æquilat.*

HOUËL (1867)

PROPOSITION 1.

Sur une droite finie donnée AB (fig. 1), construire un triangle équilatéral.

Fig. 1.



Du centre A, avec le rayon AB, décrivons le cercle BCD [dem. 3] ; du centre B, avec le rayon BA, décrivons le cercle ACE. Du point C, où ces deux cercles se coupent (*), menons aux points A et B les droites CA, CB [dem. 1]. ABC sera le triangle demandé.

En effet, puisque l'on a AC = AB [déf. 15],

et BC = BA,

il en résulte AC = BC [ax. 1].

Par conséquent AC = AB = BC, et il s'ensuit [déf. 24] que le triangle construit sur AB est équilatéral.

Traduction de quelques symboles

---- : droite ou segment

D : donnée

Δabc : le triangle ABC

⊙ : cercle

eſt : est ſnt : sont

Req. π. fa. : ce qui est à faire

Conſtr : construction

Demonſtr : démonstration

2|2 : égal

Travail au CDI – repris en classe

Tableau comparatif des trois textes :

	Euclide	Hérigone	Houël
Langue	grec	…	…
Epoque	…	…	…
…			

Travail au CDI – repris en classe

La démonstration de Hérigone était suivie d'un commentaire que voici sur les syllogismes utilisés :

SCHOLIE.

Cette demonſtration ſe fait par quatre ſyllogiſmes, comme il appert du nombre des citations.

I. SYLLOGISME.

Les lignes droictes menées du centre à la circonference, ſont égales entr'elles.

Mais les lignes droictes AC & AB ſont menées du centre à la circonference.

Donc les lignes droictes AC & AB ſont égales entr'elles.

Le ſecond ſyllogiſme ne differe point du premier, à cauſe qu'il a la meſme citation que le premier.

III. SYLLOGISME.

Les choſes égales à vne meſme, ſont égales entr'elles.

Mais les lignes droictes AC & CB ſont égales à vne meſme ligne droicte.

Un syllogisme est un raisonnement logique en trois phrases.
Voici, en langage actuel, le premier syllogisme:
Les **rayons d'un cercle** ont *même longueur*
[AC] et [AB] sont les **rayons d'un cercle**
Donc [AC] et [AB] ont *même longueur*.
a) Ecrire ce même syllogisme pour les rayons [BA] et [BC]

……………..……………………………………………

…………………...………………………………………

……………………...……………………………………

………………

b) Ecrire les syllogismes III et IV en langage actuel

……………..……………………………………………

……...………………………………………………………

………………………………………………………………

Donc les lignes droictes AC & BC ſont égales entr'elles.

IV. SYLLOGISME.

Tout triangle qui a trois coſtez égaux, eſt equilateral.

Mais le triangle ABC a trois coſtez égaux.

Donc le triangle ABC eſt equilateral.

………………………………………

………………………………………

………………………………………

………………………………………

………………………………………

Exercices sur la structure de la démonstration

a) Compléter ces énoncés

b) Indiquer si c’est une définition (souligner alors le mot qui est défini) ou si c’est un théorème

Enoncé	**Définition ou théorème ?**
Un triangle qui a deux côtés de même mesure est dit …………..	
Dans un triangle ………………… , les bissectrices sont également les hauteurs.	
La ……………………………….. est une droite qui partage cet angle en deux angles égaux	
La …………………….. dans un triangle est une droite issue d’un sommet et coupant le côté opposé perpendiculairement	
Les bissectrices d’un triangle sont concourantes en un point qui est le ………………………………………………	
La ……………………………….d’un triangle vaut 180°	
Des angles opposés par le sommet ont …………………………..	

Exercices sur la structure de la démonstration

Dans chacune des phrases ci-après, souligner en rouge les hypothèses, en vert la conclusion, et écrire l'énoncé (définition ou théorème) qui permet à partir des hypothèses de démontrer la conclusion

a) Puisque ABC est rectangle en A, $AB^2 + AC^2 = BC^2$

b) Le rayon [OI] du cercle C est perpendiculaire au côté [AB] du triangle puisque le cercle est inscrit dans le triangle

c) Etant donné que $x = 4$ ou $x = -4$, on a $x^2 = 16$

d) Si I est le milieu de [AB]et si la droite (d) coupe (AB) perpendiculairement en I alors (d) est la médiatrice de [AB]

e) Comme un losange possède 4 côtés égaux, AB = BC = CD = DA

Exercices sur la structure de la démonstration

Théorème, réciproque et contraposée

A partir des deux énoncés : ① ABCD est un parallélogramme et ② AB = CD, je peux écrire la proposition suivante : « Si ABCD est un parallélogramme alors AB = CD », **elle est vraie**.

Sa contraposée « Si AB ≠ CD alors ABCD n'est pas un parallélogramme », **elle est vraie aussi**.

Mais sa réciproque « Si AB = CD alors ABCD est un parallélogramme » **est fausse**.

1) A l'aide de vos connaissances sur les quadrilatères et les triangles, trouver une autre proposition vraie dont la réciproque est fausse.

Ecrire la proposition trouvée, sa contraposée et sa réciproque. Pour chacune des quatre écrire si elle est vraie ou fausse.

2) Même question pour une proposition fausse dont la réciproque est vraie.

3) Même question pour une proposition vraie dont la réciproque est vraie.

4) Même question pour une proposition fausse dont la réciproque est fausse.

Exercices sur la structure de la démonstration

Implication, équivalence

Exemple 1 : A partir des deux énoncés : ① ABCD est un parallélogramme et ② AB = CD, je peux écrire que **① implique ②** car si ABCD est un parallélogramme alors on a bien AB = CD,

par contre je ne peux pas dire que ② implique ① car si AB = CD alors ABCD n’est pas forcément un parallélogramme (ABCD pourrait être un trapèze).

Exemple 2 : A partir des deux énoncés : ① ABCD est un losange et ② [AC] et [BD] sont perpendiculaires et se coupent en leur milieu,

je peux écrire que ① implique ② car si ABCD est un losange alors on a bien que [AC] et [BD] sont perpendiculaires et se coupent en leur milieu,

et je peux aussi dire que ② implique ① car si [AC] et [BD] sont perpendiculaires et se coupent en leur milieu alors ABCD est un losange.

Dans ce cas je peux dire que ① et ② sont équivalents ou que ① équivaut à ②

Après avoir étudié ces deux exemples, compléter le tableau ci-derrière avec :

①implique② ou ② implique ① ou **① et ② sont équivalents**

Exercices sur la structure de la démonstration

	Enoncé ①	**Enoncé ②**	
1	ABCD est un losange	ABCD a ses diagonales perpendiculaires	
2	AB = AC	A est milieu de [BC]	
3	ABC est équilatéral	ABC = BAC = 60°	
4	ABCD est un carré	AB = BC = CD = DA	
5	ABC possède deux angles de 45°	ABC est un triangle rectangle	
6	ABCD est un parallélogramme	[AC] et [BD] ont même milieu	
7	Le produit ab est positif	a et b sont positifs	
8	$x + 3 = 5$	$x= 2$	
9	$x^2 = 9$	$x = 3$	

Exercices sur la structure de la démonstration

NOM :

Seconde 7 **Devoir n° 3** **2013-2014**

Exercice 1 : / 6 points

1. a) Il avait pour maître Platon. Selon lui, "savoir se fait par le moyen de la démonstration". Mais qui était ce savant grec, qui aurait inventé le principe de la démonstration ?

b) Ce même savant pensait que faire une démonstration devait reposer sur un principe logique particulier, en trois étapes, et illustré par un petit texte célèbre sur Socrate.

- Comment appelle-t-on ce principe logique ?
- Rappeler quel est ce petit texte célèbre.

2) Compléter avec une définition ou un théorème :

a) (AH) est la hauteur issue de A dans le triangle ABC
Or ……………………………………………………....................
Donc (AH) est perpendiculaire à (BC)

b) ABE est un triangle rectangle en E et = 45°
Or ……………………………………………………………..
Donc = 45°
Or ……………………………………………………………..
Donc ABE est un triangle rectangle isocèle en E.

Exercices sur la structure de la démonstration

3) Pour chaque ligne, on donne un énoncé P et un énoncé Q. Préciser dans la colonne de droite :

- si l'énoncé P implique l'énoncé Q
- si l'énoncé Q implique l'énoncé P
- si l'énoncé P et l'énoncé Q sont équivalents

	Enoncé P	**Enoncé Q**	
1	AB = AC	A est milieu de [BC]	
2	ABCD est un rectangle	ABCD a trois angles droits	
3	$\widehat{ABC} = 60°$	ABC est un triangle équilatéral	
4	$x = 4$	$x^2 = 16$	