

2000 ans d'énigmes mathématiques

Un patrimoine à utiliser
dans nos classes

Problèmes numériques avec Fibonacci (1170-1250) et le *Liber abacci*

Le *Liber abaci* (aussi écrit **Liber abbaci**)
est un ouvrage de Leonardo Fibonacci écrit en 1202
que l'on peut traduire en *Livre du calcul* ou *Livre de
l'abaque*.

- Dans cet ouvrage, Fibonacci présente les chiffres arabes et le système d'écriture décimale positionnelle qu'il avait appris en étudiant auprès de savants arabes à Béjia au Maghreb où son père, Guglielmo Bonaccio, travaillait en tant que marchand.
- Le *Liber abaci* est l'un des premiers ouvrages d'Europe occidentale chrétienne, après le *Codex Vigilanus* en 976 et les écrits du pape Sylvestre II en 999, à vulgariser les chiffres arabes.
- Il s'adresse aux marchands et aux savants mathématiciens de son temps.

- La première section présente le système positionnel des chiffres arabes, y compris la technique de la multiplication par jalouses et des méthodes pour passer d'un système de numérotation à l'autre.
- La seconde introduit des exemples pour le commerce tels que la conversion de monnaies et de mesures, le calcul du profit et de l'intérêt.
- La troisième partie discute sur des problèmes mathématiques tels que le théorème des restes chinois, le concept de nombre parfait ou du nombre premier de Mersenne et des formules mathématiques telles que la suite arithmétique ou le nombre pyramidal carré. Un exemple de suite mathématique donné dans ce livre, celui de la croissance d'une population de lapins, est à l'origine de la suite de Fibonacci pour laquelle l'auteur est principalement connu actuellement.
- La quatrième section traite des approximations, numériques et géométriques, de certains nombres irrationnels tels que les racines carrées.
- Le livre inclut également des preuves en géométrie euclidienne et une étude du système d'équations linéaires à la suite de Diophante d'Alexandrie, que Fibonacci avait probablement découvert dans l'œuvre du mathématicien perse Al-K

De duobus hominibus habentibus panes

Des deux hommes ayant des pains

- *Un jour, deux hommes avaient l'un trois pains et l'autre deux. Ils allèrent se promener auprès d'une source. Lorsqu'ils furent arrivés en ce lieu, ils s'assirent pour manger. Un soldat passa. Ils l'invitèrent. Il prit place à côté d'eux et il mangea avec eux, chaque convive ayant part égale. Lorsque tous les pains furent mangés, le soldat partit en leur laissant cinq pièces pour prix de son repas. De cet argent, le premier prit 3 pièces, comme il avait apporté trois pains ; l'autre, de son côté, prit les 2 pièces qui restaient pour prix de ses deux pains.*
- *On demande si le partage a été bien fait.*

- Partagez vos pains La solution

Chaque homme a pris $5/3$ de pain. (5 pains à partager en trois)

A a donc mangé $1 + 2/3$ de ses 3 pains et a donné au soldat : $3 - 5/3 = 4/3$ de ses 3 pains.

B a mangé $(1 + 2/3)$ de ses 2 pains et a laissé le tiers ($1/3$) de ses 2 pains au soldat.

A a donc donné 4 fois plus de pain au soldat que B.

A récupère donc 4 pièces et B n'en prend qu'une pièce

Les citernes

Soit une citerne qui a quatre bondes.

- Par la première d'entre elles, elle se vide en un jour ;
- par la seconde, en deux jours ;
- par la troisième en trois jours ;
- par la quatrième, en quatre jours.

On cherche à savoir en combien d'heures elle se videra, si les quatre bondes sont simultanément ouvertes.

- Première solution

Quand les quatre bondes sont ouvertes, en un jour il se vide :

$1 + 1/2 + 1/3 + 1/4$ de citerne

Soit $25/12$ de citerne se vident en un jour

Donc une citerne est vide en $12/25$ de 24 heures

Soit après conversion :

11 heures 31minutes 12 secondes

Deuxième solution

- ***Imaginons une bonde virtuelle qui vide la citerne en 12 jours.***

(12 car c'est le PPCM de 1, 2, 3 et 4).

Alors on peut dire que :

- * la bonde 1 peut-être remplacée par 12 bondes virtuelles ;
- * la bonde 2 peut-être remplacée par 6 bondes virtuelles ;
- * la bonde 3 peut-être remplacée par 4 bondes virtuelles ;
- * la bonde 4 peut-être remplacée par 3 bondes virtuelles.

Donc quand elles sont toutes ouvertes, c'est comme si on avait $12 + 6 + 4 + 3 = 25$ bondes virtuelles.

La citerne se vide alors 25 fois plus vite qu'avec une seule bonde virtuelle, soit $12/25$ jours, ce qui fait 11h 31 min 12 sec.

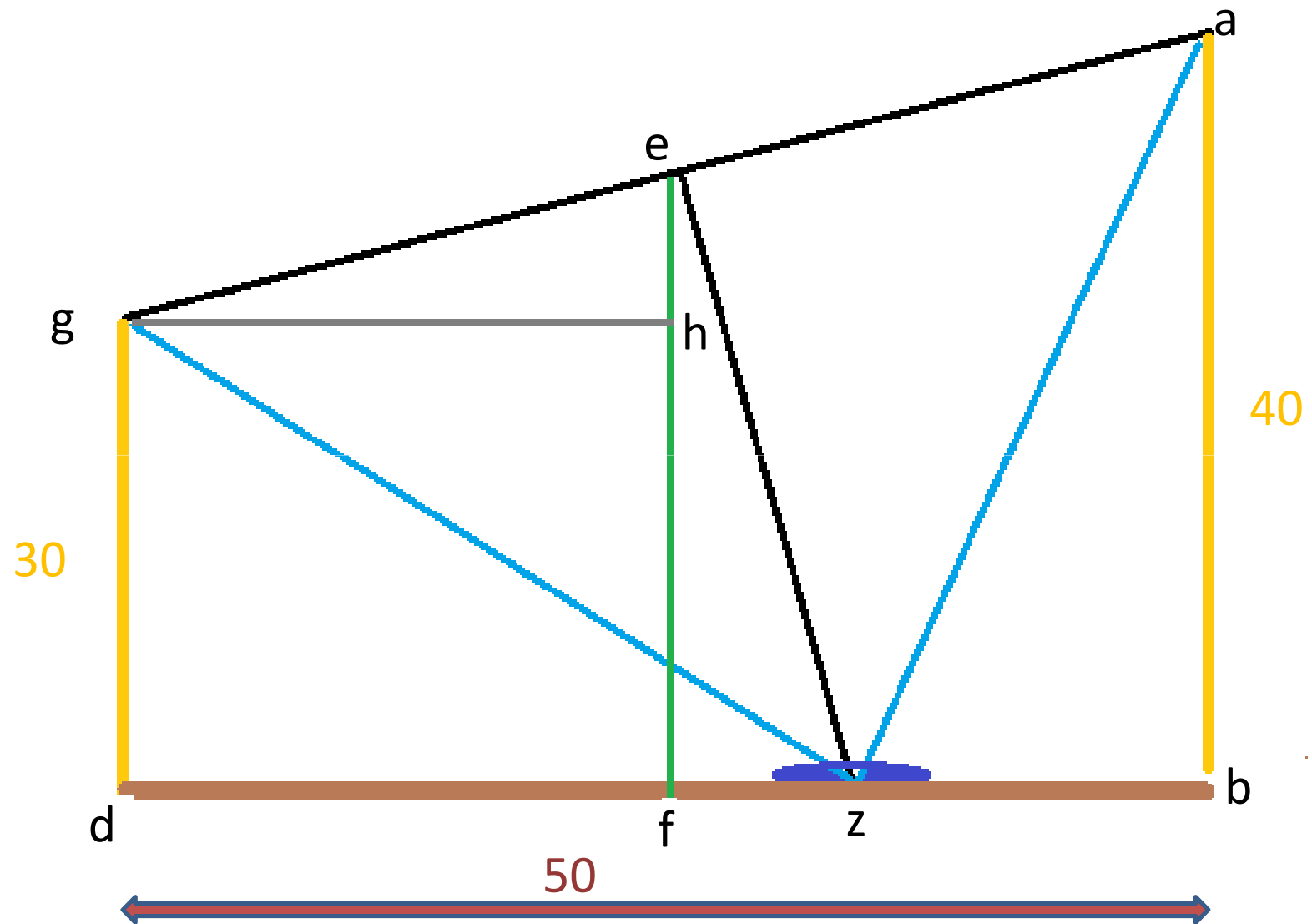
Les oiseaux



Deux oiseaux s'envolent en même temps à la même vitesse l'un d'une tour de 30 m de haut l'autre d'une tour de 40 m

Les deux tours sont distantes de 50 m

A quelle distance la fontaine est-elle de la plus haute tour ?



Plusieurs stratégies

- **Première stratégie** : déterminer l'emplacement de la fontaine par une construction géométrique.
- **Seconde stratégie** : résoudre algébriquement et géométriquement le problème posé
- **Troisième stratégie**
40 et 30 sont 70; la moitié est 35 (à savoir la ligne ef)
Les lignes df et fb ont 25 de longueur, la différence entre 35 et la tour la plus petite est 5 qui, multiplié par 35, est 175 qui, divisé par la moitié de la distance entre les tours est 7
- Pour comprendre le calcul de Fibonacci comparer les triangles rectangles efz et egh

Des problèmes de « fausse position »

- *Longtemps avant l'algèbre : la fausse position*
- « Une méthode qui prêche le faux pour savoir le vrai » : on choisit pour un problème à une inconnue une réponse, forcément fausse au départ et on compare le résultat qu'elle donne au résultat que l'on attend et on ajuste par proportionnalité...
- Un beau livre, très clair, très riche en documentation sur la question
- ***La fausse position*** de Jérôme Gavin et Alain Schärliig aux Presses Polytechniques et Universitaires Romanes 2012 46 €

4ème stratégie : méthode de double fausse position

- Si la tour la plus haute est à une distance de 10 de la fontaine, 10 fois 10 font 100 qui ajouté à la tour la plus haute multipliée par elle-même, à savoir 1600, donne 1700; il faut multiplier la distance qui reste par elle-même qui, ajouté à la tour la plus petite multipliée par elle-même, à savoir 900, donne 2500.
Cette somme et la précédente diffèrent de 800.
Il faut éloigner la fontaine de la tour la plus haute.
- Par exemple de 5, à savoir globalement de 15, qui multiplié par soi-même est 225 qui, ajouté à la tour la plus haute multipliée par elle-même donne 1825; 35, distance de la fontaine à la tour la plus petite, multipliée par elle-même donne 1225 qui, ajouté à la tour la plus petite multipliée par elle-même donne 2125. Les deux sommes diffèrent de 300.
- Avant, la différence était de 800. Donc, quand on a ajouté 5 pas, on a diminué la différence de 500. Si on multiplie 5 par 300 et si on divise par 500, on a 3 qui, ajouté à 15 pas donne 18, qui est la distance de la fontaine à la tour la plus haute.
- Cette méthode de Léonard de Pise est appelée **méthode de double fausse position.**

Les graphes et l'algorithme

Pourquoi les graphes dans nos classes ?

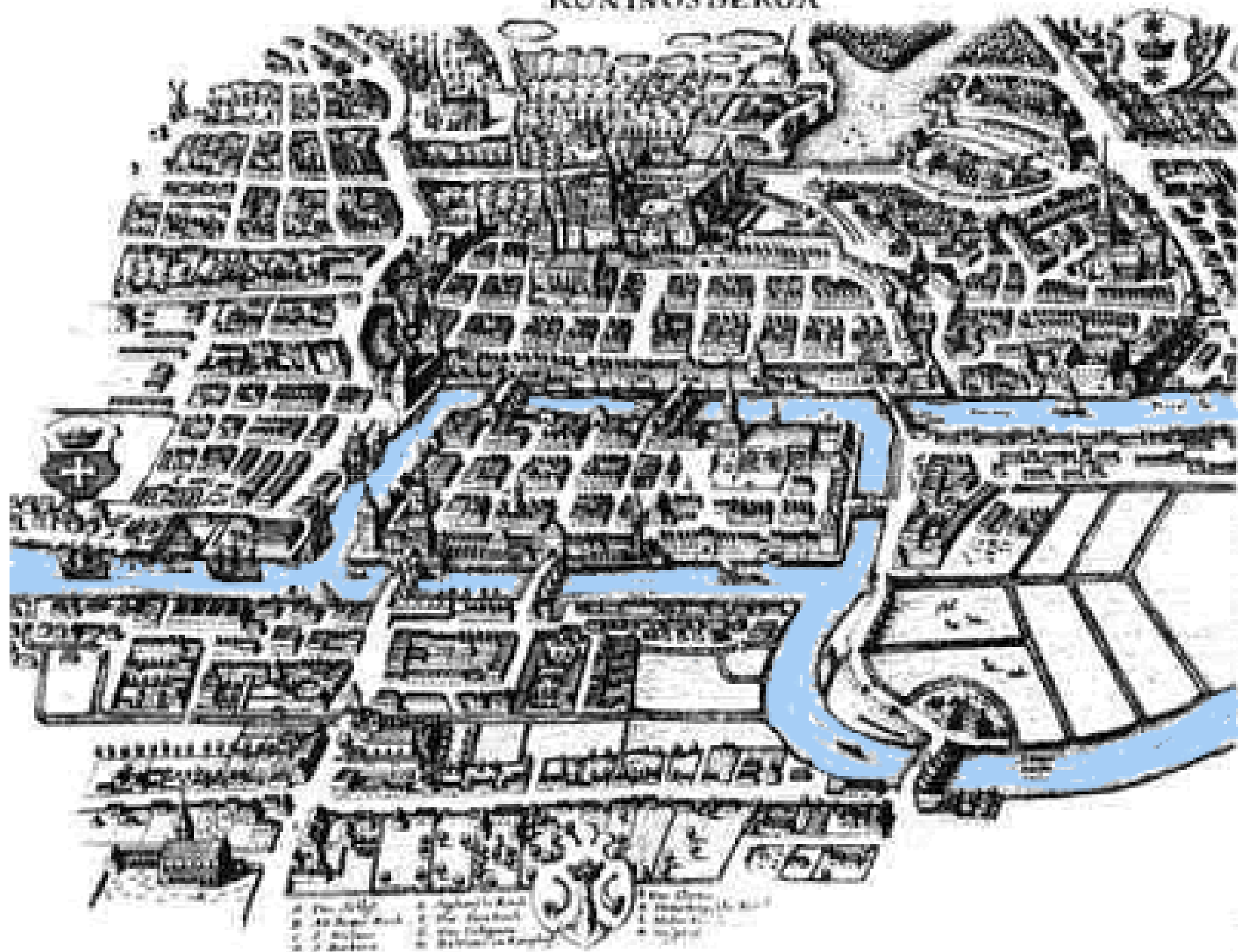
- Les graphes sont de magnifiques exemples de *modélisation mathématique* simples au moins au départ.
- Les graphes offrent de beaux exemples *mathématiques de la vie quotidienne*, des connexions intéressantes entre le fondamental et la réalité de tous les jours.
- Le travail avec les graphes favorise *l'apprentissage de formes de raisonnement* purement *mathématiques* : raisonnement inductif, raisonnements combinatoires, raisonnements spatiaux.
- Enfin les graphes récréatifs ou appliqués permettent de *travailler à la résolution de problèmes* et aussi peuvent être utilisés pour *créer* de nouveaux problèmes.

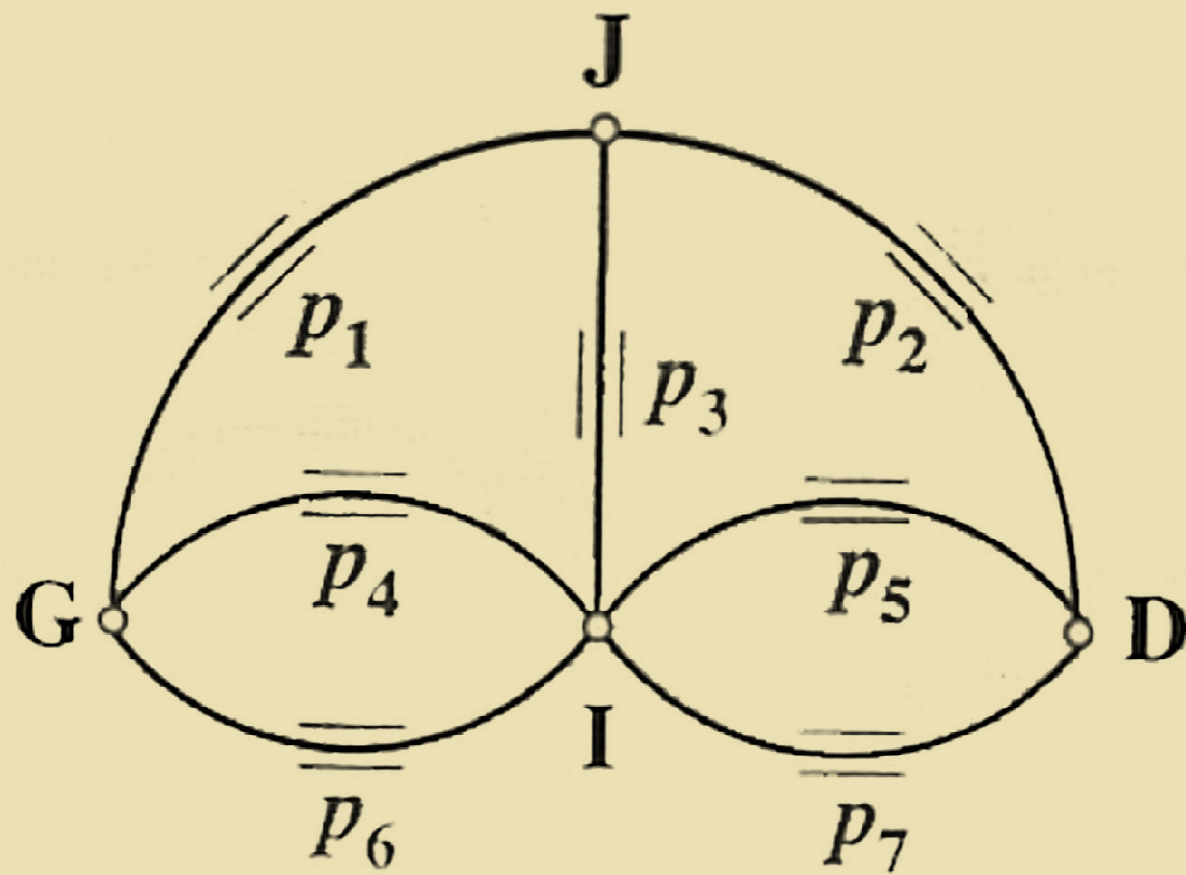
Le problème fondateur

On attribue à
Leonard Euler
le problème fondateur
de la théorie des
graphes



KONINGSBERGA

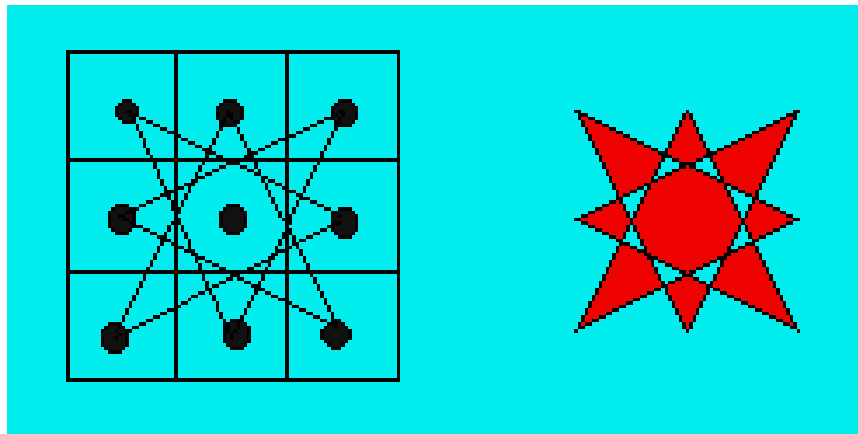
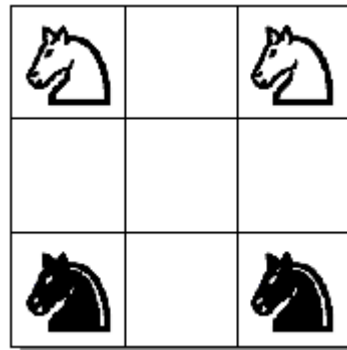




Echanges de cavaliers

- **Échange de cavaliers.** – Problème trouvé dans un manuscrit de P. Guarini di Forli (1512) et qui est considéré comme le plus vieux problème européen d'échecs.
- Ce problème apparut d'abord dans un livre sur les échecs attribué à al-Adli vers 840.
- *Deux cavaliers blancs d'un côté et deux cavaliers noirs de l'autre côté sont placés aux quatre coins de l'échiquier réduit à neuf cases. Déterminer de quelle façon les cavaliers blancs peuvent prendre la place des cavaliers noirs et inversement selon le mode du déplacement du cavalier, et cela en un nombre minimal de coups.*

Echanges de cavaliers

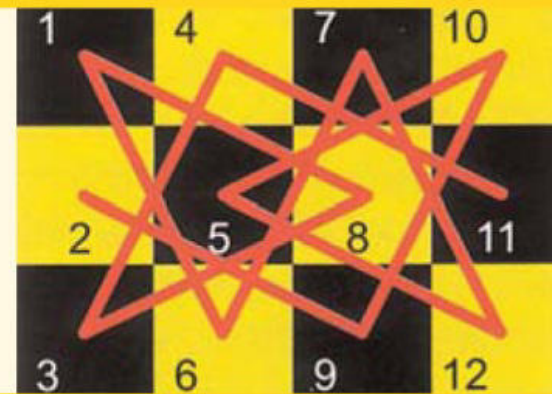


Le [chemin](#) d'un cavalier est illustré à gauche. Il forme un octogone étoilé, comme il est illustré à droite.

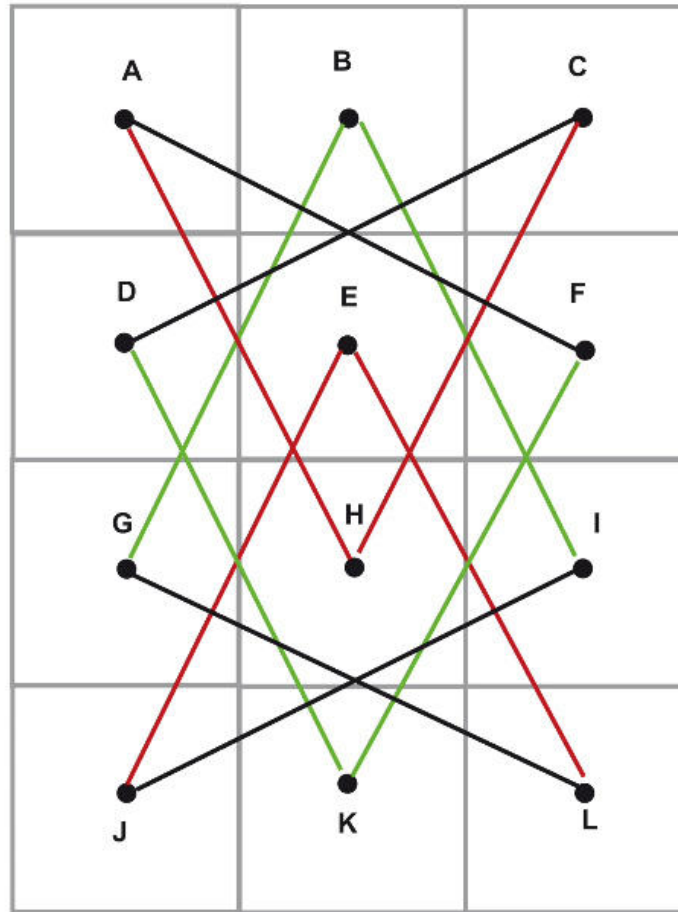
Le cavalier sur une grille 4 X 3

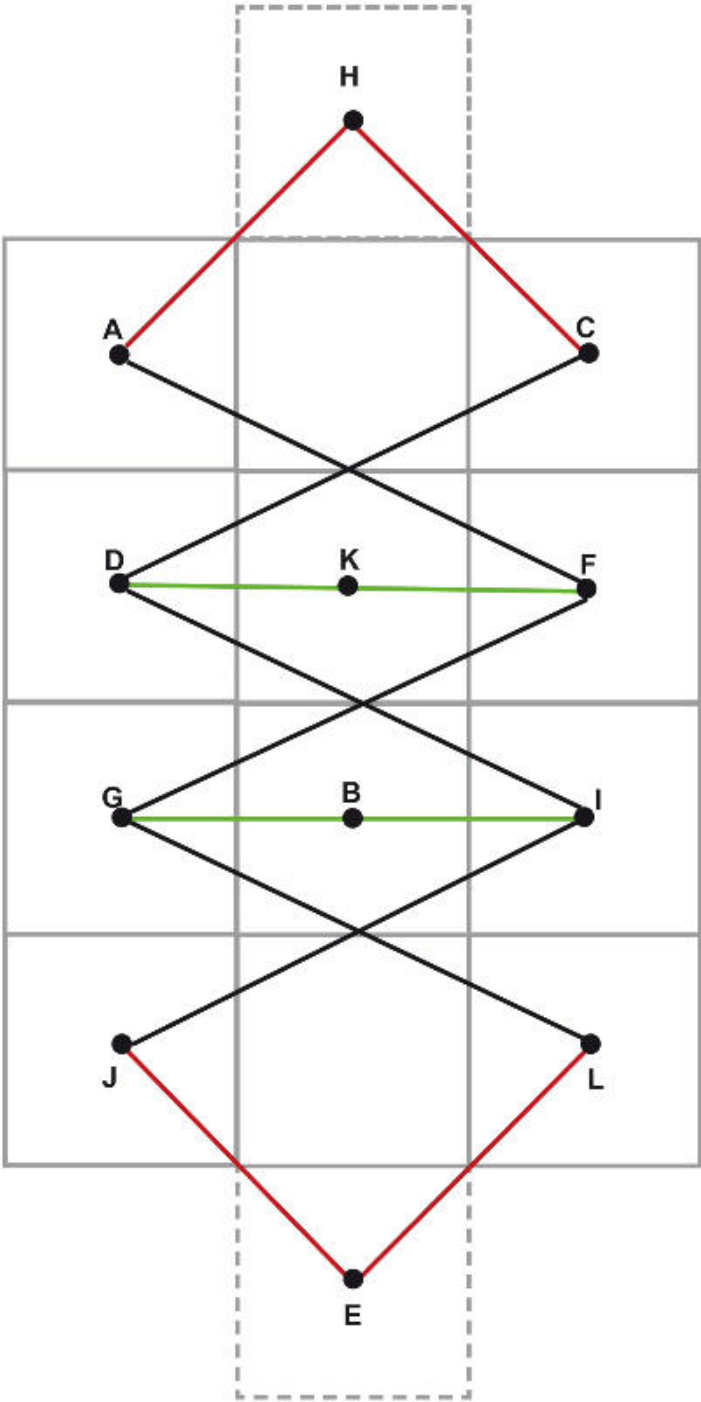


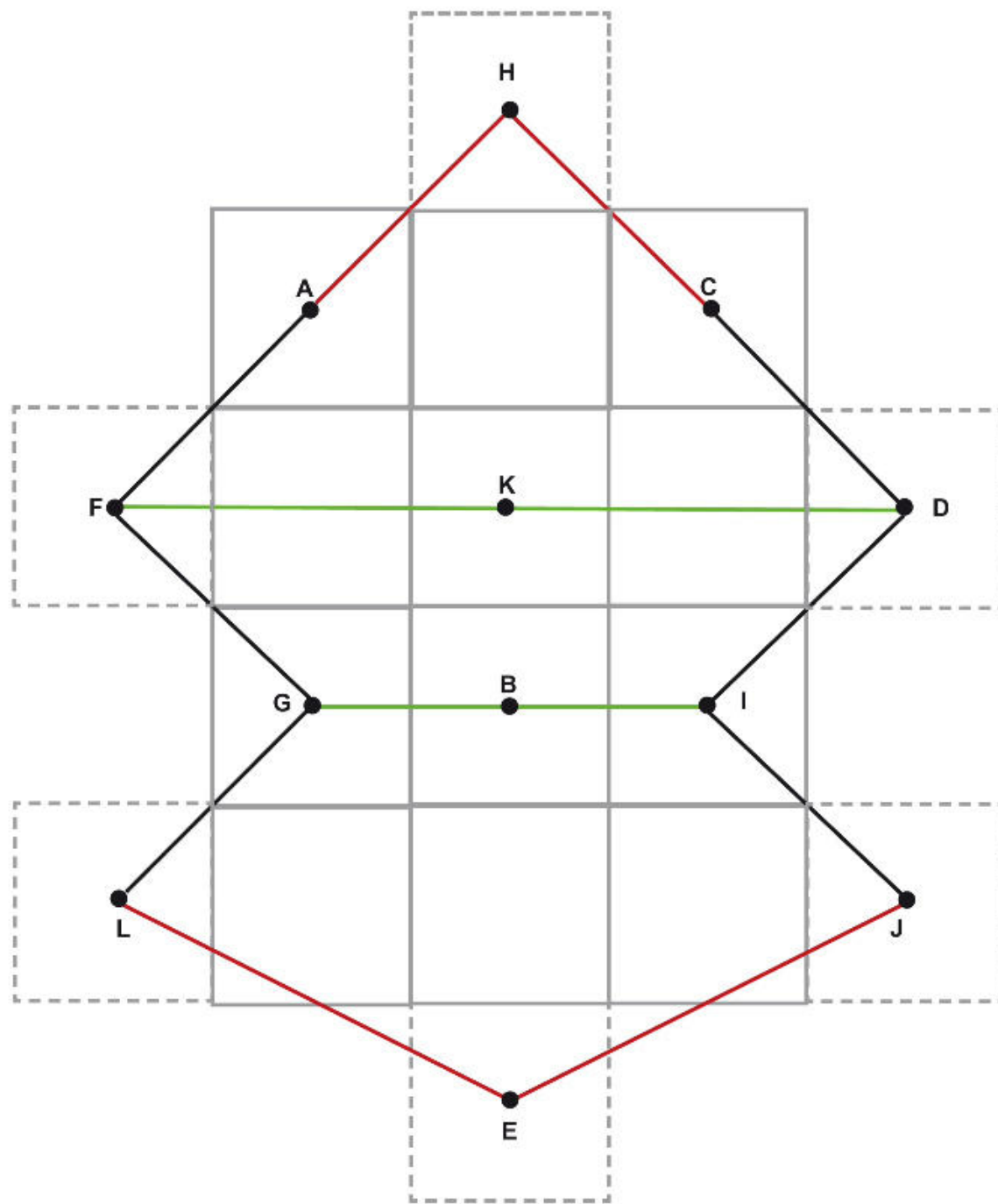
Comment faire en sorte
que le cavalier
visite toutes les cases de
l'échiquier une fois
et une seule ?



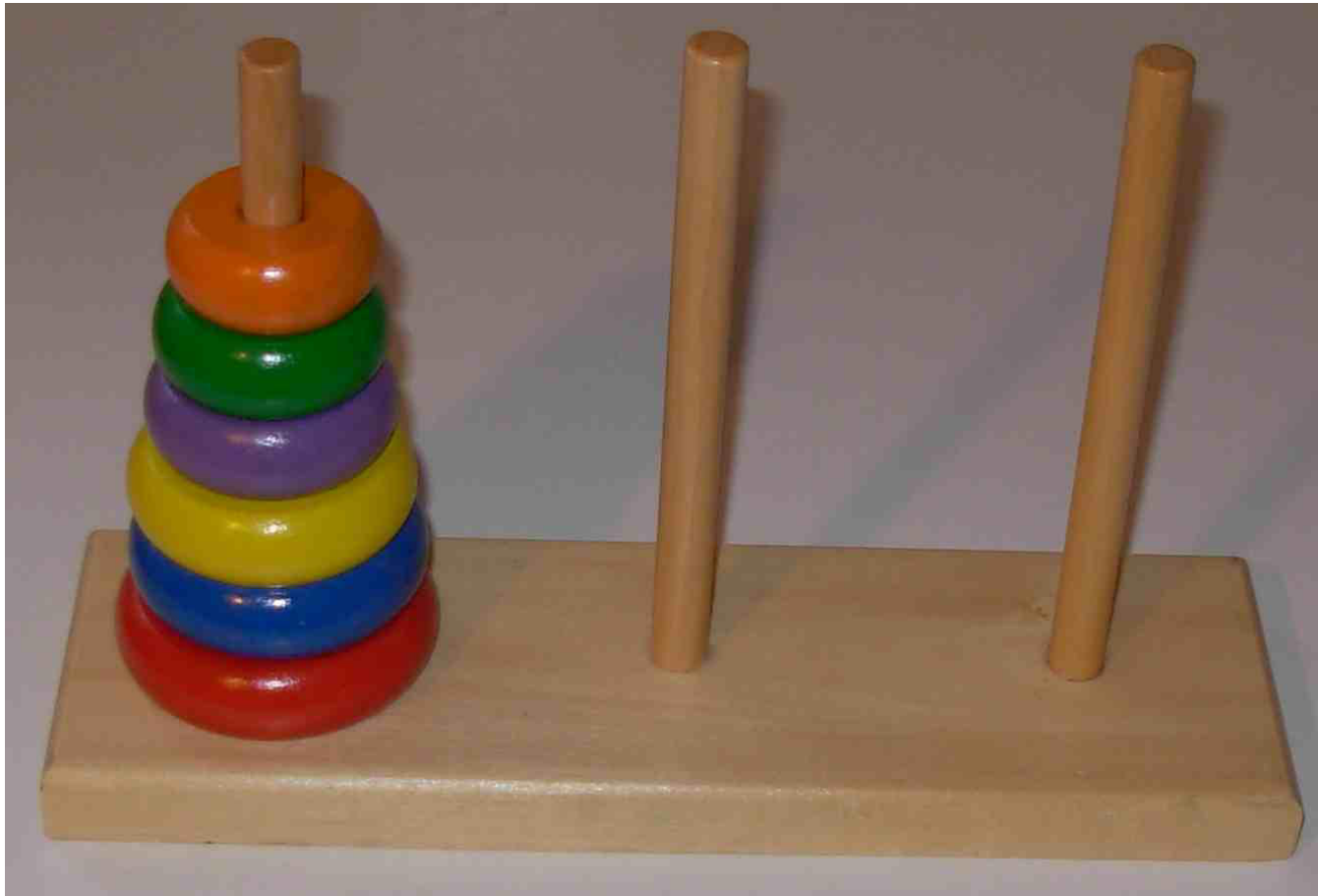
Dénouons le graphe







Les tours de Hanoi



$$U_{n+1} = 2U_n + 1$$

$$U_n = 2^n - 1$$

Les pions sauteurs

Chaque pion avance dans le sens de sa couleur et ne peut pas reculer.

Un pion peut avancer sur la case voisine si elle est libre ou sauter un pion de l'autre couleur pour aller sur la case suivante si elle est libre.

Il faut échanger les pions ...

$$U_{n+1} = U_n + 2n+3 \quad \text{et} \quad U_n = n(n+2)$$