L'apport de l'histoire des mathématiques dans notre enseignement

Martine BOSC, Christian MARCHAL, Valérie THÉRIC

Groupe épistémologie et histoire des mathématiques

IREM Aix-Marseille Université

irem Aix-Marseille

JOURNÉES NATIONALES A.P.M.E.P. Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public de la Maternelle à l'Université... www.apmep.asso.fr

21 Octobre 2013

Des questions…

- Dans quelles classes peut-on aborder l'histoire des mathématiques ?
- Est-ce nécessaire ?
- En quoi cela peut-il être intéressant ?
- Traiter des aspects historiques ne constitue-t-il pas une perte de temps ?
- Comment concevoir des activités liées à l'histoire ?
- Comment faire autre chose que raconter anecdotes ou biographies ?
- Où trouver de la documentation ?
- Faut-il une formation spécifique pour cela ?

Des éléments de réponses…

- **Pour qui ?** — Tout le monde !

- **Pourquoi ?**
  - Incarner notre matière
  - Insister sur les connaissances en évolution
  - S'émerveiller de l'ingéniosité des anciens
  - …..

- **Comment ?**
  - Tous les moyens sont bons :
  - Des anecdotes et des histoires
  - Analyse de textes anciens
  - En illustrant avec nos moyens modernes (algorithmique, géométrie dynamique, …)
  - …..

Dans nos textes officiels:

- **Au collège:**

« La perspective historique donne une vision cohérente des sciences et des techniques et de leur développement conjoint. Elle permet de présenter les connaissances scientifiques comme une construction humaine progressive et non comme un ensemble de vérités révélées… »

- **Au lycée:**

« Des éléments d'épistémologie et d'histoire des mathématiques s'insèrent naturellement dans la mise en œuvre du programme. Connaître le nom de quelques mathématiciens célèbres, la période à laquelle ils ont vécu et leur contribution fait partie intégrante du bagage culturel de tout élève ayant une formation scientifique. La présentation de textes historiques aide à comprendre la genèse et l'évolution de certains concepts. »

- **Au lycée professionnel:**

« **Sujet**: Évolution des sciences et techniques

Thématique: Découvrir les nombres à travers l'histoire des mathématiques »

- **En quoi cela peut-il être intéressant ?**

✓ ***Pour les élèves*:**

- « permet de présenter les connaissances scientifiques comme une construction humaine progressive et non comme un ensemble de vérités révélées… »

- « La présentation de textes historiques aide à comprendre la genèse et l'évolution de certains concepts. »

- L'intérêt évident des élèves

✓ ***Pour les enseignants*:**

- Peut porter un éclairage sur les choix qui sont faits pour la construction des programmes

- **Traiter des aspects historiques ne constitue-t-il pas une perte de temps ?**

Non un élève motivé avance ensuite plus vite dans les apprentissages et ce d'autant plus que ce type d'activité aide à leur en faire comprendre le sens

- **Comment concevoir des activités liées à l'histoire ?**

  On va en voir quelques exemples…issus pour la plupart des thèmes des panneaux de notre exposition.
- **Comment faire autre chose que raconter anecdotes ou biographies ?**

  On peut partir des textes…
- **Où trouver de la documentation ?**

  On va donner quelques pistes…
- **Faut-il une formation spécifique pour cela ? NON!**

Les tablettes babyloniennes

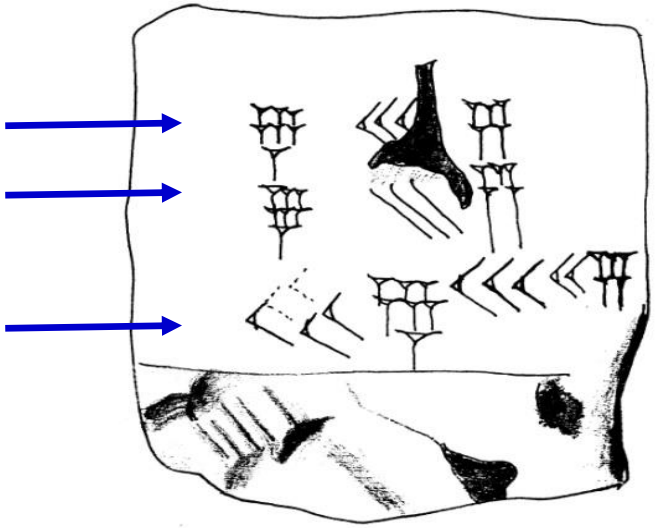
C3
6e

Intérêt: - **Rencontrer un autre système de numération**
Exemple d'activité: **Déchiffrer une tablette**

Énoncé: Pour écrire les nombres, les mésopotamiens les regroupent en paquets de 60 unités. Un clou représente 1 unité, un chevron représente 10 unités

7 clous, 3 chevrons et 5 clous (7 soixantaines et 35 unités)
7 clous, 3 chevrons et 5 clous (7 soixantaines et 35 unités)

5 chevrons et 7 clous, 3 chevrons, 2 chevrons et 5 clous
(57 soixantaines de soixantaines, 30 soixantaines, 2 unités)



Question: Quelle est l'opération effectuée par cet écolier?

La multiplication autour de la Méditerranée

C3
à 4e

Intérêt: **Rencontrer des algorithmes différents et montrer qu'ils peuvent produire le même résultat**
Faire fonctionner des algorithmes
Travailler sur les décompositions des entiers
Travailler sur les propriétés des opérations

Exemple d'activité: Multiplier autour de la Méditerranée

Questions: **Effectuer des multiplications en utilisant l'une des techniques**

Prolongements: Décomposer un entier en somme de carrés,…

Les Éléments d'Euclide

4e 3e
Tle

Intérêts: Connaître un ouvrage fondamental des mathématiques
Rencontrer le vocabulaire « théorèmes », « axiomes », …
Mettre en œuvre des raisonnements
Rédiger avec rigueur et précision
Rencontrer plusieurs démonstrations de deux célébrissimes théorèmes

Exemples d'activité:

- Traductions en langage actuel…
- Identité remarquable proposition II 4
- Démontrer le théorème de Pythagore
- Démontrer le théorème de Thalès
- Démontrer que l'ensemble des nombres premiers est infini

Question: Traduire en langage actuel cet extrait du livre I des éléments d'Euclide

5 DEMANDES (postulats)

1. Qu'il soit demandé de mener une ligne droite de tout point à tout point.
2. Et de prolonger continûment en ligne droite une ligne droite limitée.
3. Et de décrire un cercle de tout centre et au moyen de tout intervalle.
4. Et que tous les angles droits soient égaux entre eux.
5. Et que, si une droite tombant sur deux droites fait les angles intérieurs et du même côté plus petit que deux droits, les deux droites, indéfiniment prolongées, se rencontrent du côté où sont les angles plus petits que deux droits.

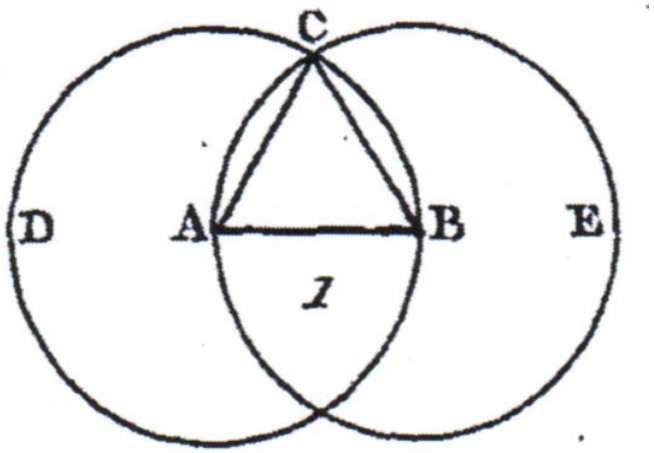
9 NOTIONS COMMUNES (axiomes)

1. Les choses égales à une même chose sont égales entre elles.
2. Et si, à des choses égales, des choses égales sont ajoutées, les touts sont égaux.
5. Et les doubles du même sont égaux entre eux.
7. Et les choses qui s'ajustent les unes aux autres sont égales entre elles.
8. Et le tout est plus grand que la partie.

Question: Écrire en langage moderne le programme de construction d'un triangle équilatéral à la règle et au compas. Le justifier.

PROPOSITION I.1 :

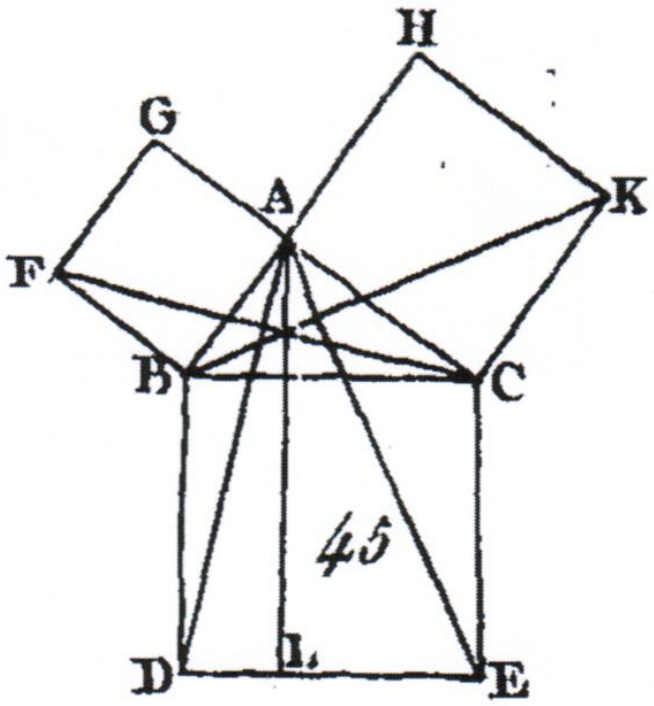
PROBLÈME. Sur une droite donnée et finie, construire un triangle équilatéral.



Soit AB la droite donnée et finie : il faut construire sur la droite AB un triangle équilatéral. Du centre A et avec un intervalle AB, décrivez la circonférence BCD (dem. 3); ensuite du centre B et avec l'intervalle BA décrivez la circonférence ACE, et du point C, où les circonférences se coupent mutuellement, conduisez aux points A, B, les droites CA, CB (dem. 1). Car puisque le point A est le centre du cercle CDB, la droite AC sera égale à la droite AB (déf. 15); de plus, puisque le point B est le centre du cercle CAE, la droite BC sera égale à la droite BA; mais il a été démontré que la droite CA était égale à la droite AB : donc chacune des droites CA, CB est égale à la droite AB ; or les quantités qui sont égales à une même quantité sont égales entre elles ; donc la droite CA est égale à la droite CB : donc les trois droites CA, AB, BC sont égales entre elles. Donc le triangle ABC (déf. 24) est équilatéral, et de plus il est construit sur la ligne donnée et finie AB; ce qu'il fallait faire.

PROPOSITION I. XLVII. THÉORÈME
(le fameux théorème de Pythagore).

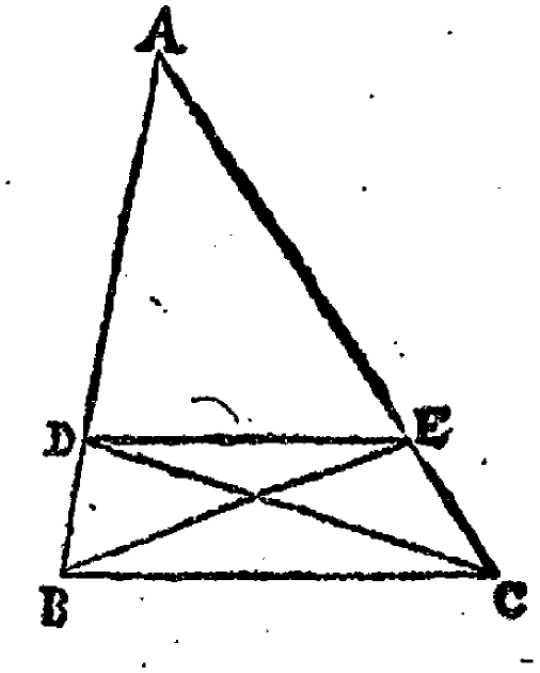
le théorème de Pythagore



http://therese.eveilleau.pagesperso-orange.fr/pages/truc_mat/pythagor/textes/euclide.htm

PROPOSITION VI.II THÉORÈME
(le fameux théorème de Thalès).

Le théorème de Thalès



http://therese.eveilleau.pagesperso-orange.fr/pages/truc_mat/textes/euclide_thales.htm

Traduire en langage moderne l'énoncé et la démonstration de la proposition 20 du livre IX des Éléments d'Euclide.

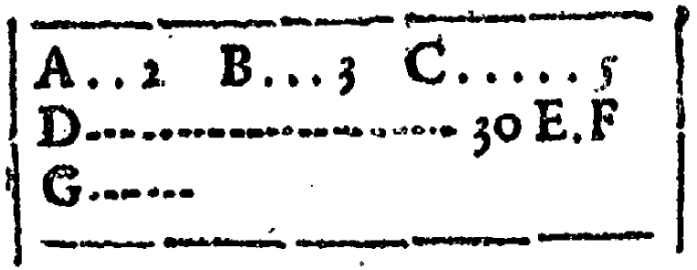
Ou

la comparer avec une démonstration moderne.

THEOR. 18. PROP. XX.

Quelque multitude de nombres premiers qu'on propose, il s'en trouuera encores d'autres.

Soit quelconque multitude de nombres premiers, A, B, C. Ie dis qu'il s'en trouuera encores d'autres.



Car si on trouue le nombre D E, le plus petit de tous ceux qui peuuent estre mesurez par les trois nombres A, B, C, par la 37. prop. 7. & à icelüy D E on adiouste l'vnité EF, le tout D F sera premier ou non : S'il est premier, on a vn nombre premier autre que pas vn des proposez : Mais si DF n'est premier, il sera mesuré par quelque nombre premier, par la 34. prop. 7. Soit donc mesuré par G ; il est éuident que G ne peut pas estre vn des trois A, B, C : car s'il estoit quelqu'vn d'iceux, il mesureroit comme eux DE. Donc G mesurant le tout D F, & le retranché D E, par la 12. comm, sent. il mesureroit aussi le reste DF, sçauoir vn nombre l'vnité : Ce qui est absurde. Donc G est autre nombre premier que pas vn des proposez. Et en ceste façon on en peut trouuer infiny autres. Parquoy quelque multitude de nombres premiers qu'on propose, &c. Ce qu'il falloit demonstrer.

Les équations de degré 3: la résolution graphique de Ménechme

2e
1ere

Intérêts : Montrer un intérêt historique des coniques
Faire découvrir des mathématiciens moins connus
Lectures graphiques de solutions d'équations
Activités Tice
Activités faisant intervenir 3 registres: géométrique, algébrique et graphique

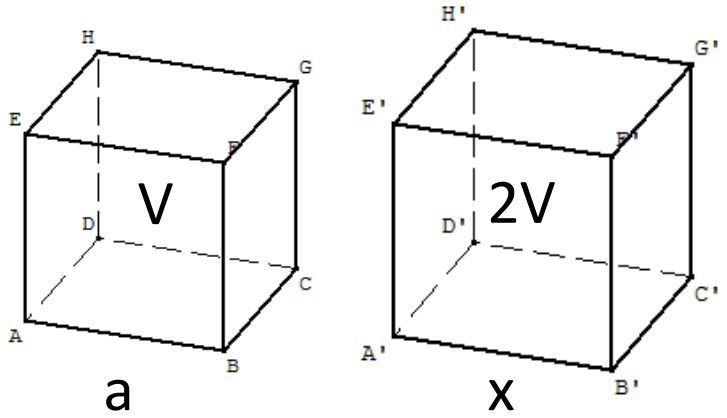
Exemples d'activité:

La duplication du cube

Le calcul du périmètre d'un polygone régulier (méthode d'Abul-Gud, Xe siècle)

La duplication du cube: la technique de Ménechme

Énoncé: Comment construire un cube dont le volume est le double d'un cube donné ?



Le mathématicien grec Ménechme (IVe siècle avant J.C), disciple de Platon, en trouva une solution approchée à l'aide de ses connaissances sur les paraboles et les hyperboles :

Ménechme trace les courbes d'équation $y = \frac{2a^2}{x}$ et $y = \frac{1}{a}x^2$

et montre que la solution de l'équation est l'abscisse (positive) de leur point d'intersection.

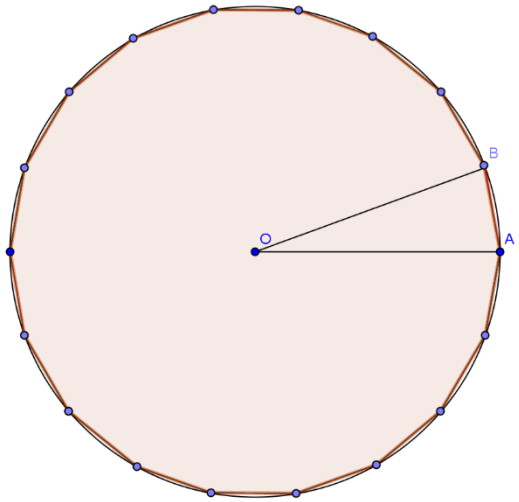
Questions :

1. Justifier la technique de Ménechme
2. Avec un logiciel de géométrie dynamique, déterminer des solutions approchées pour *a* variant de 1 à 10 avec un pas de 1.
3. Avec une règle graduée et une équerre représenter un cube d'arête 4 et le cube dont le volume est le double du volume du premier.

menechme_duplication_cube.ggb

Déterminer la mesure du périmètre d'un polygone régulier à 18 côtés

Figure 1



La technique d'Abul-Gud (Xe siècle)

Il construit dans le triangle OAB les points

- $C \in [OA]$ tel que le triangle ABC est isocèle en B
- $D \in [OB]$ tel que le triangle BCD est isocèle en C
- $E \in [OA]$ tel que le triangle CDE est isocèle en D
- F pied de la hauteur issue deE du triangle OED
- G pied de la hauteur issue de B du triangle ABC
- H pied de la hauteur issue de O du triangle AOB

Questions :

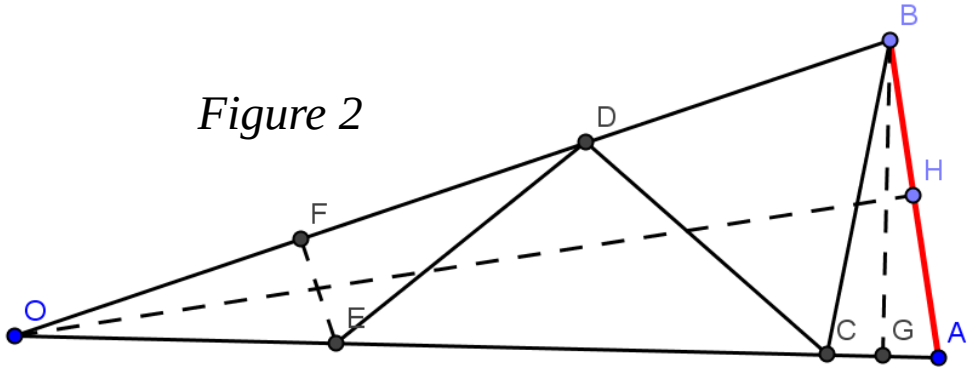
1. Déterminer les mesures de tous les angles de la *figure 2*

2. Montrer que $\frac{AC}{AB} = \frac{AB}{OA}$ **et que** $\frac{OG}{OB} = \frac{OF}{OE}$

3. On pose AB = *x* ; exprimer OG et OF en fonction de *x*

4. Montrer que *x* est solution de l'équation $x^3 + 1 = 3x$

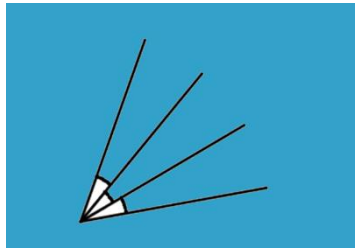
Figure 2



5. Déterminer une valeur approchée de *x* en utilisant la méthode de Ménechme.

6. Conclure

Abul Gud 3.ggb



La trisection de l'angle par Archimède

3e
2nde

Intérêt:

- ✓ C'est l'occasion de parler des constructions à la règle et au compas et des tentatives pour résoudre certains problèmes que l'on sait aujourd'hui insolubles.
- ✓ Rencontrer Archimède
- ✓ Activité nécessitant une manipulation

Énoncé: Matériel: un compas et une règle munis de 2 graduations

trisection Archimède

Un angle de centre O étant donné,

1.Tracer le cercle de centre O et de rayon le pas de la graduation.
Il coupe les côtés de l'angle en 2 points A et B

2. Tracer la droite (OA)

3. Placer la règle de sorte qu'elle passe par B et recoupe respectivement le cercle et la droite (OA) en deux points C et D tels que CD = OA.

Questions: Réaliser la construction et montrer que $ODB = \frac{1}{3} AOB$

Résoudre un problème par la méthode de « fausse position »

3e 2e

Intérêt

Montrer en quoi la méthode algébrique actuelle est plus générale

Mettre en évidence le côté graphique du procédé

Partir de la résolution originelle pour la traduire en un algorithme

Exemple d'activité

Voici le problème n°24 du papyrus de Rhind :
« Une quantité ajoutée à son septième devient 19. Quelle est cette quantité ? »

1. Mettre ce problème en équation puis le résoudre

2. Voici la méthode utilisée par le scribe (traduite en notation moderne)

✓ **J'essaye avec 7 :** $7+\frac{7}{7}$ **qui donne 8, alors qu'on veut 19.**

✓ **Par proportionnalité, 7 est à la valeur cherchée ce que 8 est à 19,**

autrement dit cette valeur est $\frac{7\times 19}{8}=\frac{133}{8}$

Pourquoi choisit-il 7 ? Choisir une autre valeur et observer si la solution trouvée est la même

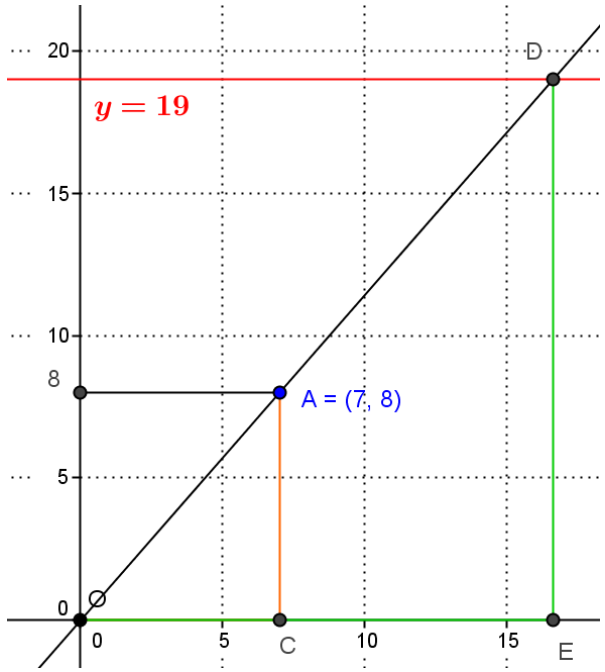
Résoudre un problème par la méthode de « fausse position »

3e
2nde

3. Quel lien existe-t-il entre le problème posé et la figure suivante ?

4. Où irait-on lire une valeur approchée de la solution sur ce graphique ?

5. A votre avis, pourquoi cette méthode est-elle appelée « fausse position »?



Prolongement :

Pour résoudre les problèmes du type

Quel est le nombre dont la somme du tiers et du quart est égale à 77 ?

les scribes utilisaient une méthode dite de « double fausse position »

Sauriez vous la décrire et faire le graphique associé ?

Algorithme de Héron

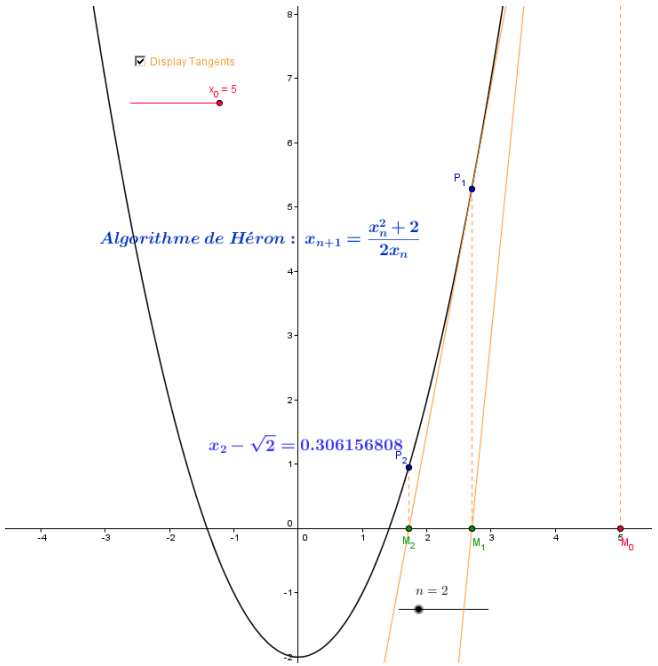
2nde

1ere

Intérêt Ancrer une activité d'algorithmique dans un contexte concret

Faire le lien avec la méthode beaucoup plus tardive de Newton

S'interroger sur la performance d'un algorithme



Exemple d'activité

Étude d'un extrait des Métriques de Héron d'Alexandrie | **2012**

Martine Bühler

Introduction

Dans le présent texte, le lecteur trouvera un extrait des *Métriques* de Héron d'Alexandrie (Traduction du grec par Jacqueline Guichard - IREM de Poitiers) que l'auteure a exploité dans sa classe de Première S en 2011-2012 au troisième trimestre. Dans la première partie, nous donnons le texte tel qu'il a été distribué en classe ; dans la seconde, nous commentons la séance d'enseignement.

A. Document de travail

I. Explorations numériques
Lecture du texte

Texte	Questions
Puisque donc, 720 n'a pas de racine rationnelle, nous extrairons, avec la plus petite différence possible, la racine de la façon suivante : puisque le carré qui s'approche le plus de 720 est 729 et a pour racine 27, divise 720 par 27 ; cela fait 26 et $\frac{2}{3}$; ajoute 27 cela fait $53\frac{2}{3}$; prends-en la moitié ; cela fait $26\frac{1}{2}\frac{1}{3}$. Ainsi donc, la racine la plus proche de 720 sera $26\frac{1}{2}\frac{1}{3}$.	1. Que signifie : « 720 n'a pas de racine rationnelle » ?
	2. Vérifier, par un calcul de fractions fait sur la copie, que $\frac{720}{27} = 26 + \frac{2}{3}$.
	3. Vérifier de même que : $\frac{1}{2} \times \left(53 + \frac{2}{3}\right) = 26 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}$.
En effet, $26\frac{1}{2}\frac{1}{3}$ multiplié par lui-même fait $720\frac{1}{36}$; de sorte que la différence est de $\frac{1}{36}$.	4. Calculer $\left(26 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right)^2 = \left(26 + \frac{5}{6}\right)^2$ et vérifier le calcul de Héron.

Méthodes numériques de recherche de racines

Tle

Intérêt

Analyser un texte ancien « dans son jus »

Faire acquérir un vocubulaire mathématique de base dans une langue étrangère

Faire découvrir une période et des personnages clés des mathématiques du lycée

Proposer une activité d'algorithmique dans un contexte concret

Exemple d'activité

1. Lire le passage suivant du manuscrit de Newton. Quelle équation se propose t-il de traiter en exemple ?
2. Observer comment Newton détermine une valeur approchée d'une racine.

Appliquer cette méthode pour résoudre $x^2 - x - 1 = 0$.

So in the present Example $y^3 - 2y - 5 = 0$, 'tis easy to perceive, that $y = 2$ *ferè*; for $2 \times 2 \times 2 - 2 \times 2 = 4$, which should make 5. Therefore let p be the Supplement of the Root, and it will be $y = 2 + p$, and therefore by substitution $-1 + 10p + 6p^2 + p^3 = 0$. As p is here suppos'd to be much less than the Approximation 2,

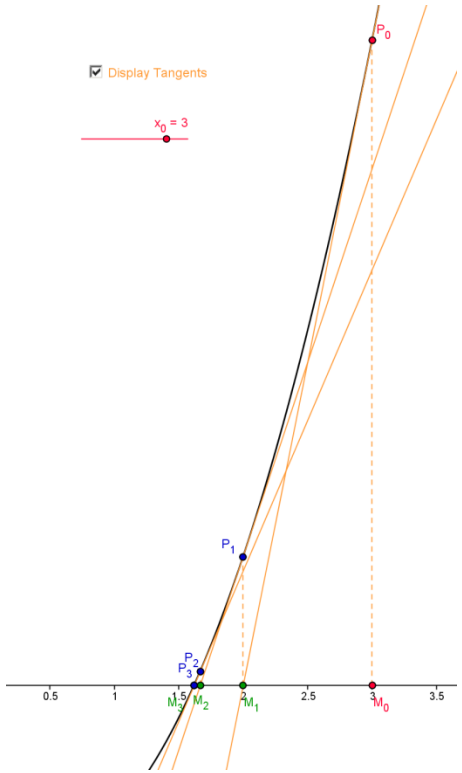
188 *The Method of* FLUXIONS,

by this substitution an Equation will be form'd, in which the Terms will gradually decrease, and so much the faster, *cæteris paribus*, as 2 is greater than p. So taking the two first Terms, $-1 + 10p = 0$, *ferè*, or $p = \frac{1}{10}$ *ferè*; or assuming a second Supplement q, 'tis $p = \frac{1}{10} + q$ accurately. This being substituted for p in the last Equation, it becomes $0{,}61 + 11{,}23q + 6{,}3q^2 + q^3 = 0$, which is a new Supplemental Equation, in which all the Terms are farther depress'd, and in which the Supplement q will be much less than the former Supplement p. Therefore it is $0{,}61 + 11{,}23q = 0$, *ferè*, or $q = -\frac{0{,}61}{11{,}23}$ *ferè*, or $q = -0{,}0054 + r$ *accuratè*, by assuming r for the third Supplement. This being substituted will give $0{,}00054155 + 11{,}162r$, &c. $= 0$, and therefore $r = -\frac{0{,}00054155}{11{,}162} = -0{,}00004852$, &c. So that at last $y = 2 + p =$ &c. or $y = 2{,}00455148$, &c.

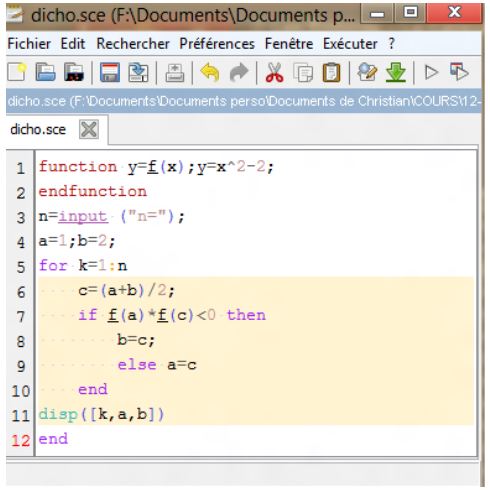
Methodus fluxionum et serierum infinitorum (1664-1671)

Méthodes numériques de recherche de racines

Tle

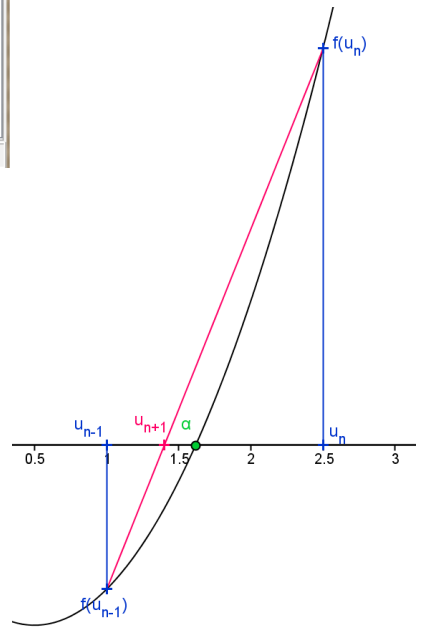


3. Approche graphique et lien avant les méthodes très anciennes de fausse position.



4. Approche algorithmique.

5. Analyse et implémentation d'autres méthodes approchées : Lagrange, dichotomie.

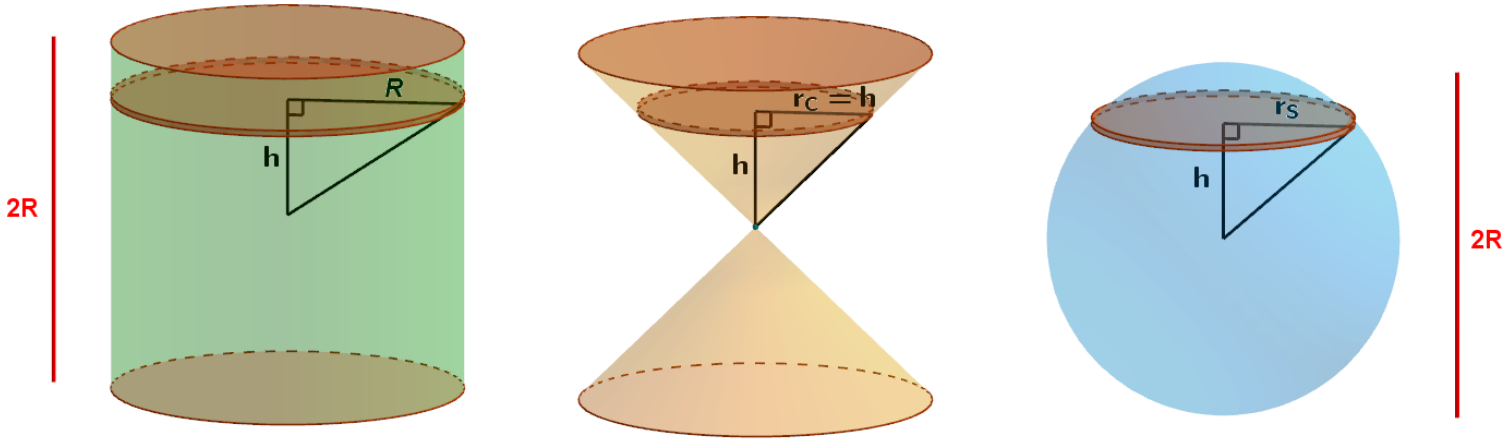


6. Comparaisons (rapidité, robustesse, temps de calcul)

Archimède et l'épure du calcul intégral

Tle

épaisseur de la tranche : e = 0.1



Volume de la tranche :
$\pi R^2 e$

Volume de la tranche :
$\pi h^2 e$

Volume de la tranche :
$\pi r_s^2 e = \pi(R^2 - h^2)e$

Somme de ces deux tranches :
$\pi h^2 e + \pi(R^2 - h^2)e = \pi R^2 e$

Quelques références pour trouver des activités
Éléments de sitographie

Les publications de l'APMEP, des IREM et des sites académiques

- ✓ *APMEP: http://www.apmep.asso.fr/-Histoire-des-maths-*
- ✓ *IREM de Toulouse: http://www.irem.ups-tlse.fr/groupes/04histoire/*
- ✓ *IREM Paris VII: http://www.irem.univ-paris-diderot.fr/sections/math_histoire_des_mathematiques/*
- ✓ *IREM de la Réunion: http://www.reunion.iufm.fr/recherche/irem/spip.php?rubrique19*
- ✓ *Maths 93, une histoire des mathématiques: http://www.math93.com/index.php/histoire-des-maths*

Quelques références pour trouver des activités
Éléments de sitographie

- ✓ *Images des maths (CNRS): http://images.math.cnrs.fr/-Histoire-des-Mathematiques-.html*

- ✓ *Études Didactiques de l'Utilisation de l'Histoire des Mathématiques en classe et en formation : http://eduhm.univ-artois.fr/*

Et aussi: Quelques références pour trouver des activités

Des sites perso très intéressants:

- ✓ *Chronomaths , une chronologie des MATHÉMATIQUES: http://serge.mehl.free.fr/*
- ✓ *Therese Eveilleau: http://therese.eveilleau.pagesperso-orange.fr/pages/hist_mat/indexF.htm*
- ✓ Bibm@th.net: http://www.bibmath.net/

Les classes numériques proposées par le CNDP (SCEREN)

- ✓ Curiosphère: http://www.curiosphere.tv/histoire-maths/home.htm
- ✓ Maths-Rometus: http://www.maths-rometus.org/mathematiques/histoire-des-maths/
- ✓ *Ératosthène, l'arpenteur de la Terre: http://www.lacartoonerie.com/cartoon/id830446499_dessin-anime-eratosthene-arpenteur-terre*

Et aussi bien entendu,
notre jeune groupe « épistémologie et histoire des maths »
de l' IREM d'Aix-Marseille

http://www.irem.univ-mrs.fr/Epistemologie-et-histoire-des

Vous y trouverez:

- Tout sur notre exposition « Regards sur les mathématiques, itinéraires méditerranéens »
- Les conférences que nous avons organisées
- Une liste de nos interventions dans les classes

Enfin n’oublions pas

Les documents papier

- ✓ Bulletin vert de l’APMEP, Plot, Publimath,… !
- ✓ « Histoires d’algorithmes », Collectif, Éditions BELIN
- ✓ …..