Journées de l'APMEP

Les mathématiques au carrefour des cultures de la Méditerranée

MARSEILLE 19-22 octobre 2013

Confrontation de jeux de tâches entre élèves de 11-12 ans et étudiants en formation

Christine Del Notaro

Université de Genève

Préambule

- *« Soit, je suis un cas pathologique. Mais avez-vous saisi le message? Les maths ne se résument pas à celles qu'on fait à l'école. Mieux : celles qu'on n'y fait pas sont passionnantes. On s'amuse souvent beaucoup avec les maths. Surtout quand il n'y a ni examen au bout ni calculs à vérifier. »*

Stewart, I. (2008). Mon cabinet de curiosités mathématiques. Paris, Flammarion.

- Recherche en cours qui vise à montrer comment le milieu d'une tâche évolue à travers un jeu de tâches proposé à des élèves et à de futurs enseignants primaires

- Dispositif interactif, confrontation des deux milieux

- Interface : la chercheuse menant le jeu

- Distinction chiffre/nombre

Jeux de tâches

Contextualisation

- DDMES, F. Conne , J.- M. Favre, 2008 et collaborateurs, enseignants secondaires et primaires, spécialisé.
  - Investigation du milieu
  - « Etirement » du milieu

Liste de tâches

Définition

- À partir d'une liste de tâches, l'expérimentateur pilote le jeu
- Il engage ses connaissances en réponse à celles des élèves
- But: entretenir et faire durer l'interaction milieu-élèves par l'aménagement de surprises

Le jeu de tâches

- Del Notaro, 2010, 2011, 2012

Définition

- Enchaînement de tâches non hiérarchisées (étirer le milieu enrichir la tâche)
- Condition : interaction de connaissances entre expérimentateur et élèves
- Pas de liste de tâches au sens de Favre, mais définition de quelques tâches, à l'image de ma propre exploration du milieu
- Certaines tâches non prévues, proposées dans le feu de l'interaction

Ancrage du jeu de tâches

- Interaction de connaissances entre expérimentateur et élèves.
- Mise en lien entre connaissances et expérience.
- Mise en exergue des connaissances que les élèves ont accumulées par leur expérience du nombre
- Tenter de spécifier celles qui se manifestent en rapport avec une tâche précise

Interaction de connaissances ⬄ interactions d'expériences

L’enchaînement des tâches

Sauts par les tâches pour rester dans les tâches.

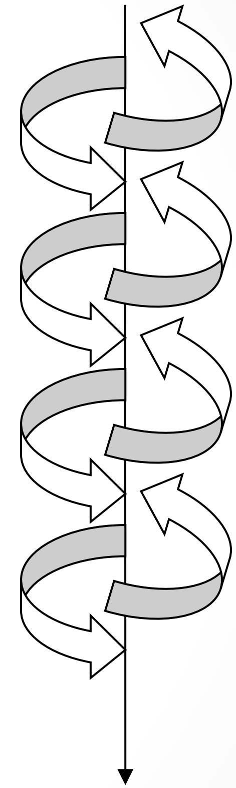
⇨ Manière de relancer a-didactiquement.

Tâche 1

Tâche 2

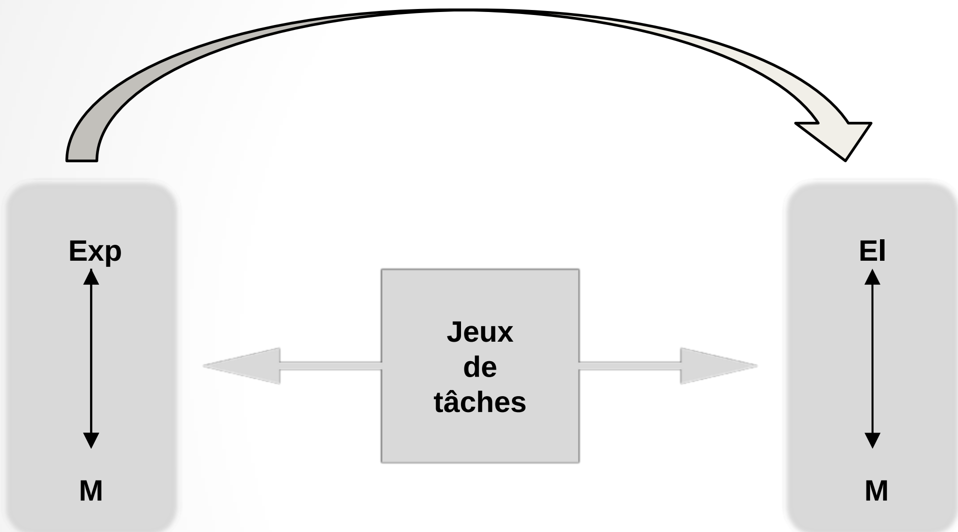
Tâche 3

Tâche 4



⇨ ***Réservoir de tâches (variables didactiques) en relation avec ce que les élèves vont faire ou dire***.

Une manière particulière d'interagir avec l'élève



Interaction du milieu de l'expérimentateur et de celui de l'élève

La particularité du jeu de tâches est *l'interaction des explorations* du milieu : celui de l'expérimentateur et celui de l'élève.

- Milieu : ensemble de tâches qui procèdent d'un savoir mathématique.
- Expérimentateur : improvise sur le moment.
- Elève : expérience des relations de divisibilité.

Dispositif interactif

« Se former à la recherche et par la recherche »

- Recherche en tant qu'investigation du milieu mathématique
- Recherche en tant qu'investigation des connaissances des *autres* en lien avec les siennes (interaction)
- Recherche en tant qu'improvisation (jazz) dans un cadre strict et contraignant

Un moyen: le jeu de tâches

- Permet cette interaction entre les différentes entités
- Permet l'exploration des mathématiques et de ses propres connaissances
- Etc.

$$\frac{1}{9801}$$

- Une division particulière…
- Calculatrice online
- Investigation du milieu

- Essayez!

$$\frac{1}{9801}$$

Investigation du milieu

Surprise: les décimales s'organisent en une suite de 00 à 99 (logiciel de calcul) qui s'interrompt: 0.00010203040506070809101112131415161718192021222324252627282930313233343536373839404142434445464748495051525354555657585960616263646566676869707172737475767778798081828384858687888990919293949596**9799**00, puis la suite reprend : 010203…

Autres absences de régularités, les racines carrées de ces nombres: 99, 999, …

- 1/998001, où, par groupes de 3 décimales, on obtient tous les entiers de 000 à 999, sauf 998.

Investigation du milieu

- racines carrées de ces nombres (99, 999),
- 9: constater que la division 1/81 a pour quotient la suite 0,01234567**9**012345…
- 2/9801 = 0.0002040608101214
- 3/9801 = 0.00030609121518212427…
- 4/9801, le quotient est 0.00040812162024283236…
- 5/9801 (= 0.00051015202530354045…), on *voit* les M5
- 10 au dénominateur = 0,0010203040506070… Le jeu sur les propriétés de la division pointe
- Nombres moins attendus: 247/9801: 0,02520151004999489847974696… comment retrouver les M247?

Investigation du milieu

- Multiples de 247 dans les décimales de ce nombre,
  0,0252015100…
  -247
  00501
  - 494
  reste 7
- on pense « *nombre* » dans cet exemple.
- Autre mise en forme :
  0, 0252 0151 0049 9948 9847 9746 9645 9544… on pense « *chiffres* »: (0,) 02-52-01-51-00-49-99-48 etc. ; d'autres régularités apparaissent.

Les élèves vont effectuer ce genre de constat, *aspirés*

- qu'ils sont, par ce type de démarche.

Interaction de connaissances avec des étudiants en début de formation

- Jouer ce jeu avec eux
- Se mettre en interaction
- Calculette online et projetée pour effectuer les opérations qu'ils me diraient de faire, toujours à propos de la division 1/9801
- Deux étudiants par groupe sont chargés de garder trace de ce qui se passe
- Narration: détour par Walter Benjamin (1936)

Narration

« Le narrateur emprunte la matière de sa narration soit à son expérience propre, soit à celle qui lui a été transmise. Et ce qu'il narre devient expérience pour qui l'écoute ».

(W. Benjamin, Le Narrateur, 1936).

La narration est en lien avec l'expérience

Idée de circulation de l'expérience et d' interaction entre les expériences

L'écart *expérience «faite» et expérience narrée* met en évidence les contenus maths, la pertinence d'une tâche pour un élève

L'interpré-tation des données (expérience + narration) est le fil qui relie un jeu de tâches et une logique.

Les fonctions de la narration

Pour l'expérimentateur

Prise de distance

- ***Se narrer à soi-même*** *(Et ce qu'il narre devient expérience pour qui l'écoute*).
- **Interprétation** de sa propre narration: permet de comprendre comment se joue l'interaction de connaissances dans le but de voir si cela se reproduit et à quelles conditions.

Pour les élèves

Mise en évidence

- **des contenus maths**: permet la restitution d'une pensée qui implique le contenu mathématique de l'événement narré.
- **de l'expérience math**: permet la restitution de l'expérience dans une certaine logique déterminée par le recours à certaines règles ou certaines régularités

Jouer avec les narrations

… Pour véhiculer des connaissances maths autour de cette fraction

… Comme interface de deux publics→ jouer l'interaction pour produire un jeu de tâches nouveau

… Provoquer l'étonnement avec récits d'élèves

… Provoquer la curiosité avec des réponses d'étudiants

Etc.

Exemple de jeu d'étudiants

Deux étudiants sont chargés de garder trace

1. *« $1/9801=1.02030*10^{-4}$*
   10/9801=0.00102030
   100/9801=0.0102030
   1000/9801=0.10203
   10000/9801=1.0203
   100000/9801=10.203

La narration, comprise comme un « *rapport* »

- *A chaque fois qu'on ajoute un 0, on augmente d'une puissance de 10. Le numérateur est 10 fois plus grand. Le résultat sera donc toujours 10 fois plus grand. Nous avons une division qui est proportionnelle.*
  $2/9801=2.0406 *10^{-4}$
  20/9081=0.0020406

2. *Le résultat sera le même pour 2, 20, 200. On aura toujours 2.0406… mais à des puissances de plus en plus grandes dès qu'on aura un numérateur plus grand.*

3. *Le rapport entre $1/9801=1.02030*10^{-4}$ et $2/9801 = 2.0406*10^{-4}$ c'est que l'un est le double de l'autre. Si on a 4/9801 le résultat sera le double de 2/9801.*

4. *Si on multiplie le numérateur de la division 1/9801 par n'importe quel nombre le résultat sera ce nombre fois le résultat de la division 1/9801. $a*1/9801=a*1.1012*10^{-4}$ pour tout a.*

5. *Si on multiplie le dénominateur par 10 que se passe-t-il ?*
   $1/(9801*10)=1.1012*10^{-5}$
   $1/(9801*100)=1.1012*10^{-6}$
   A chaque fois que le dénominateur est multiplié par 10 le résultat est lui divisé par 10.

6. *Si on divise le dénominateur par 10 que se passe-t-il ?*
   $1/(9801/10)=1.1012*10^{-3}$
   $1/(9801/100)=1.1012*10^{-2}$
   A chaque fois le dénominateur est divisé par 10 le résultat est lui multiplié par 10.

7. *Si à présent on double le dénominateur ? $1/(9801*2)=2.04060*10^{-5}$ Le rapport entre $2.04060*10^{-5}$ et $1.1012*10^{-4}$ est….2. Donc si on multiplie le dénominateur par 2 le résultat sera divisé par 2. Et si on divise le dénominateur par 2 ? $1/(9801/2)=2.04060*10^{-4}$ ce qui est la même chose que 2/9801, le résultat a donc doublé.*

8. *En général si on multiplie le dénominateur par n'importe quel nombre, le résultat sera divisé par ce nombre. Si on divise le dénominateur par n'importe quel nombre, c'est comme multiplier le numérateur par ce nombre et donc multiplier le résultat par ce nombre. »*

Résumé *(…avec fautes d'orthographe…)* :

Si a vaut 10, 100, 1000, 1000…

- $\frac{a*1}{9801}$ $la\ virgule\ du\ résultat\ est\ déplacé\ de\ autant\ de\ chiffre\ à\ droite\ que\ a\ possède\ de\ 0.$

  $\frac{1/a}{9801}$ $la\ virgule\ du\ résultat\ est\ déplacé\ de\ autant\ de\ chiffre\ à\ gauche\ que\ a\ possède\ de\ 0.$

- $\frac{1}{a*9801}$ $la\ virgule\ du\ résultat\ est\ déplacé\ de\ autant\ de\ chiffre\ à\ gauche\ que\ a\ possède\ de\ 0.$

- $\frac{1}{9801/a}$ $la\ virgule\ du\ résultat\ est\ déplacé\ de\ autant\ de\ chiffre\ à\ droite\ que\ a\ possède\ de\ 0.$

Constats

- **Connaissances**: ont été activées et restituées par les étudiants, de manière méthodique.
- **Explorations**: permettent de revisiter les liens entre le numérateur et/ou le dénominateur et le quotient.
- **Résumé:** «trahit» leur re-découverte de certaines de ces propriétés, pourtant déjà décrites de manière précise et répétées en 8).

  Ils ont fait un «*copié-collé*» dans leur rapport; formulé de manière plus simpliste et moins *scientifique* que leur propre restitution, comme s'ils voulaient s'assurer que l'on comprenne bien.

Le dispositif interactif entre étudiants et élèves

13-calendrier 1sur9801.docx

Interaction effective

- Exemple: mon jeu face aux étudiants (préparation B1-B2-B3-B4)

Groupe B

- B1 & B2: prendre connaissance de la réponse des élèves et poursuivre la recherche (notez chaque étape)

- B3: prendre connaissance de la réponse de Max et lui répondre

- B4: décrire le cheminement de la pensée des élèves et écrire ce que cela évoque pour vous (surprise, questions, etc.)

1 0,0001020304

Mon constat : Depuis 2 : 9801 tout les deux nombres à la fin il y a le premier nombre de la suite, aussi j'ai remarqué que depuis 4 : 9801 il commence à avoir de moins en moins de zéro. Et depuis 10 : 9801 il n'y a plus 0,000... mais 0,00...

constat de Max

2 0,0002040608

3 0,00030609012

4 0,000408 12 16

5 0,0005101520253035404550 5560...

6 0,000612182430364248546066 72...

7 0,0007142128354249566370 7784...

8 0,0008162432404856 64 72 80 88...

9 0,00091827364554637281 90 99...

10 0,00102030405060708090

11 0,001122334455667788 99... vous pourriez regarder la suite

12 0,0012243648 60 72 84 96

13 0,0013 26 39 52 65 78 91...

14 0,0014 28 | 42 | 56 | 70

15 0,0015 | 30 | 45 | 60 | 75

problème d'arrondi de la calculatrice : les derniers chiffres sont-ils fiables ?

① Els

② Els

③ Els

④ Els

19 0,001938|57|76|95

20 0,0020|40|60|80|100

21 0,0021|42|63|84|105

22 0,0022|44|66|88|110

si on regarde maintenant le 12ème chiffre, ça recommence

Les chiffres ne s'arrondissent pas mais se coupent car la calculette n'a pas assez de chiffres sur l'écran. Nous pouvons imaginer les prochains chiffres!

Il ne faut pas lire de 10 en 10 mais de 1 en 1

10 11 12 13 14 15 16 ...

exemple 10:9801=0,0010203040506070809

Quelle est la suite?

Question très intelligente!

① Els
② Els
③ Els
④ Els

1 0,0001020304
2 0,0002040608
3 0,00030609012
4 0,0004081216
5 0,0005101520
6 0,0006121824
7 0,0007142128
8 0,0008162432
9 0,0009182736
10 0,0010203040
11 0,0011223344
12 0,0012243648
13 0,0013263952
14 0,001428 42 56
15 0,00 1530 45 60
16 0,0016324864
17 0,0017345168
18 0,0018365472
19 0,0019385776
20 0,0020406081
21
22

Mes constat : Depuis 2 : 9801 tout les deux nombre à la fin il y a le premier nombre de la suite, aussi j'ai remarqué que depuis 4 : 9801 il commence à avoir de moins en moins de zéro. Et depuis 10 : 9801 il n'y a plus 0,000... mais 0,00...

constat de Max

→ multiple de 6

→ multiples de 8

... vous pourriez regarder la suite

?

quand y aura-t-il un 7 ?

Je ne comprends votre questions, car vous l'avez trouvé le 7.

Je sais déjà la suit et vous ?

Nous aussi !

1 0,000102 03 04 05
2 0,000204 06 08 10
3 0,000306 09 12 15
4 0,000408 12 16 20
5 0,0005 10 15 20 25
6 0,0006 12 18 24 30
7 0,0007 14 21 28 35
8 0,0008 16 24 32 40
9 0,0009 18 27 36 45
10 0,0010 20 30 40 50
11 0,0011 22 33 44 55
12 0,0012 24 36 48 60
13 0,0013 26 39 52 65
14

M1 M2 M3 M4 M5 ... ⇐ suggestion !

15 0,00 14 28 42 56 70

0,00 15 30 45 60 75

15.1 15.2 15.3 15.4 15.5

Mes constats : Depuis 2 : 9801 tout les deux nombres à la fin il y a le premier nombre de la suite, aussi j'ai remarqué que depuis 4 : 9801 il commence à avoir de moins en moins de zéro. Et depuis 10 : 9801 il n'y a plus 0,000... mais 0,00...

constat de Max

vous pourriez regarder la suite

Cher Max,

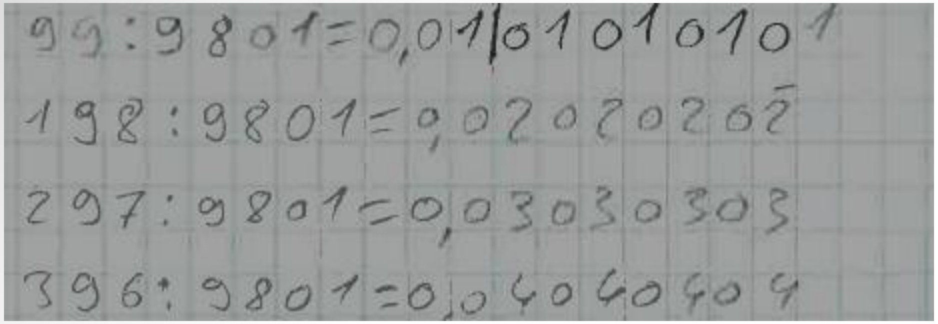
Si nous te demandons

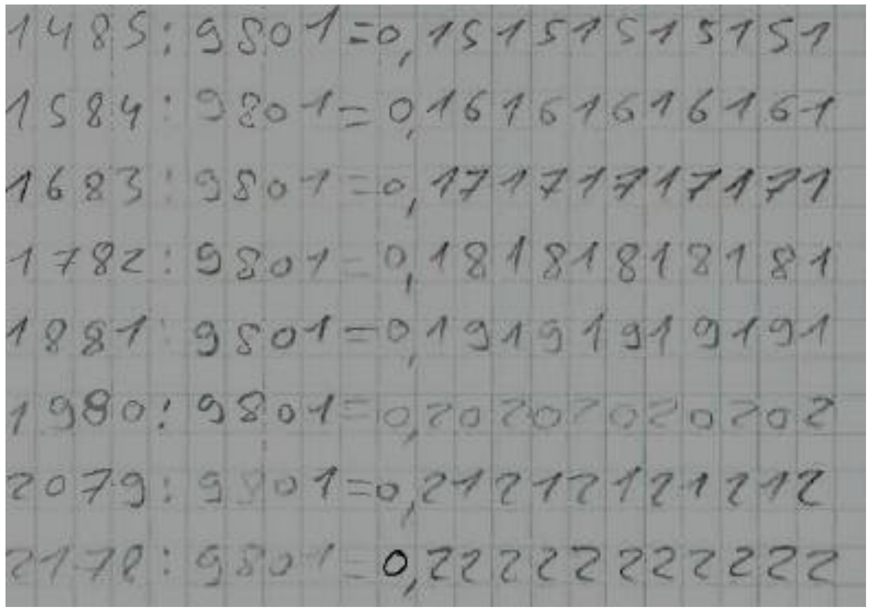
$$\frac{25}{9801}$$

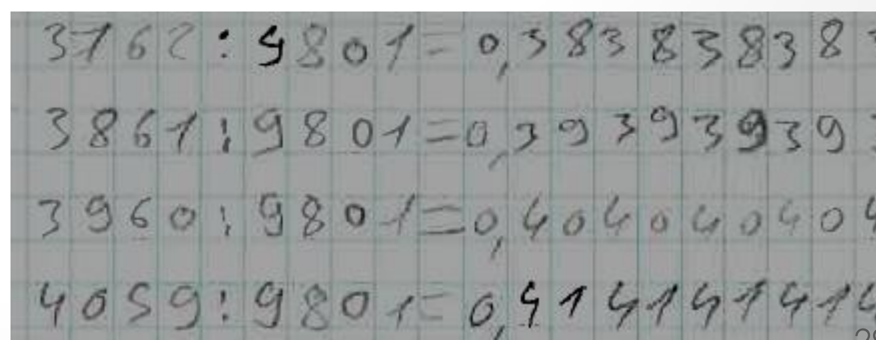
qu'obtiendrais-tu comme résultat, sans utiliser ta calculatrice, avec notre méthode ?

Merci.

Extraits Diego et Laura
pour B4







Comment avez-vous choisi 99 ? On a cherché quel chiffre à la puissance 2 faisait 9801.

On voit qu'en multipliant 99 par un nombre, celui-ci se retrouve dans le résultat de la division par 9801.

Par contre, à partir de (99x100) ÷ 9801, on voit que l'on obtient une régularité différente.

Est-ce que vous pensez que cela a un lien avec le fait que 99 x 99 = 9801 ? Oui

Que pouvez-vous dire de cette nouvelle régularité ? (pour les nombres au-delà de 100, comme 100x99 ou 102x 99 par exemple ?)

Essayez de faire ce calcul : (990x99) ÷ 9801 puis avec (991x99) ÷ 9801

=10 =10,0101010101

Que remarquez-vous ?

99x10=990

Groupe B4, le 22 avril 2013

992 : 9801 = 10,0202020202
993 : 9801 = 0,1013161922
994 : 9801 = 0,1014182263
995 : 9801 = 0,1015202530
996 : 9801 = 0,10162228344 (?)
997 : 9801 = 0,1017224313 (?)

Groupe C

- C1: traiter les réponses des élèves (ont-ils raison?) et relancer la tâche.
- C2: relancer la tâche pour les élèves, proposer une suite de tâches, à partir de vos constats.
- C3: traiter le constat 4 de l'élève et poursuivre votre exploration, proposer une suite de tâches.
- C4: synthèse de la narration de vos collègues du gr. C et de la réponse des élèves (cf. A1).

C1

1) Êtes-vous sûrs que le 1er chiffre est toujours égal au diviseur ?
 · Essayez avec : 21 ; 31 ; 41 ; 51
 · Que constatez-vous ? Expliquez

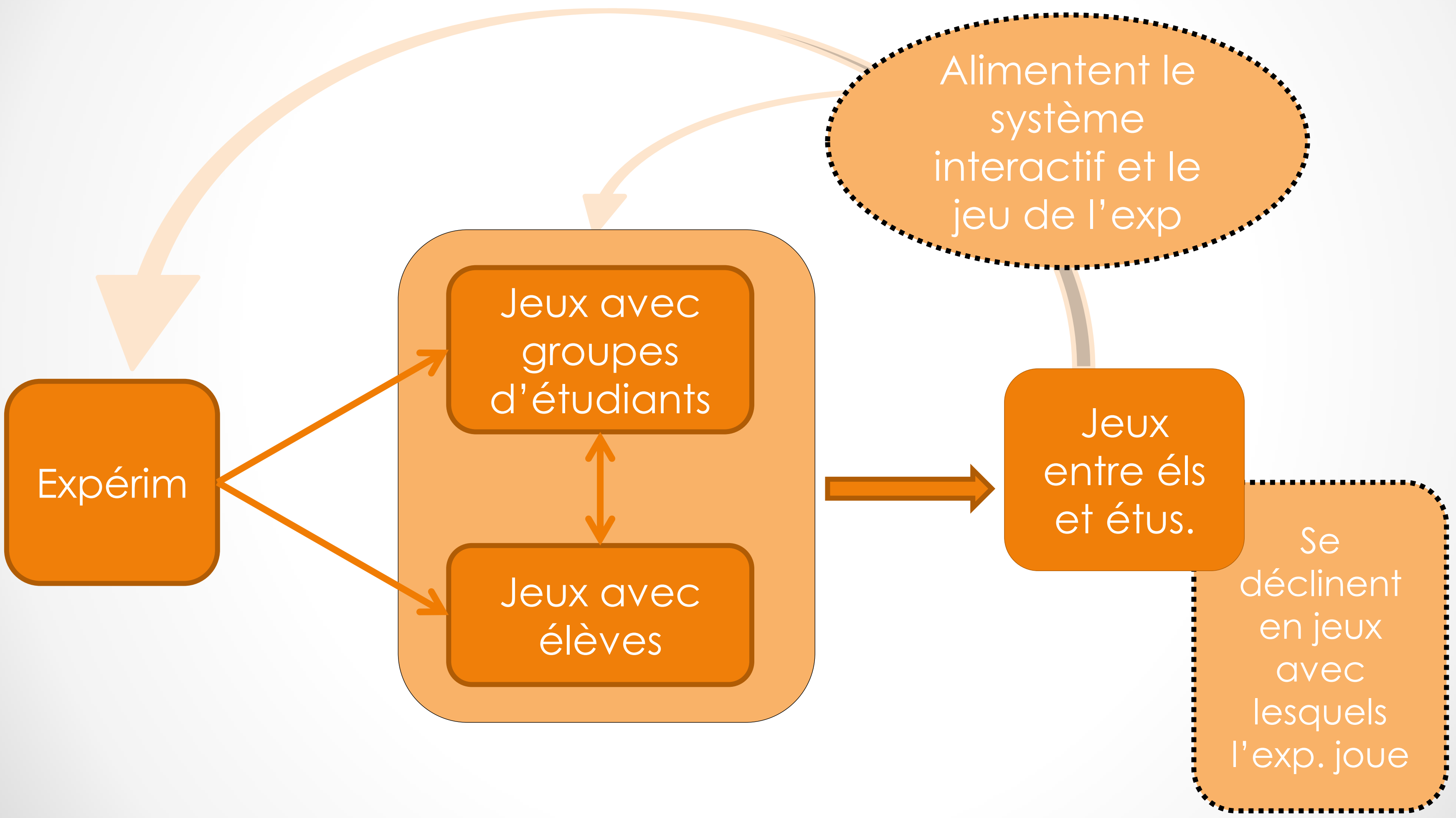
2) Nos camarade ont faux et raisson, nous allons vous dire pourquoi? : Les chiffres qui son inférieur à 49 est le premier chiffres et identique au diviseurs et les chiffres qui sont superieurs à 49 ne donne pas le numerateur mais un de plus. (exemple) nombre inferieur à 41 27÷9801 = 0,0027548209 3. Nombre superieure à 41 78÷9801=0,0079583715 9. Toutes les barre des 50 le numerateur monte de 1 chiffres par-exemple 200:9801=0.0204060810 1
250:9801 = 0.0255076012 6

Mathias Théo

2) Si on fait 21 sa marche comme avec le 31 et 41 mais plus avec le 51 ça marche que j'usquà a 49. Donc j'avoue que j'ai fait faut, mais on peut trouver le 51 avec le 50 (par exemple)
50:9801=0,00510152 025 comme mes camarade. mais j'ai remarquer que apparter de 101 ce sont deux chifres qui sont plus haut que le diviseur par excemple 66÷9801=0,0067340067 3 donc 1 chiffre après le diviseur mais 101÷9801=0,0103050709 1 et avec 201÷9801 ça fait 4 de plus

DOMINIK

Schéma interactif *bouclé*



Questions ouvertes…

- Quels liens avec l'étude du nombre peut-on effectuer à partir de ces travaux

- Trouvailles à importer en formation puis en classe, comment?

Fin