Titre de l'atelier du lundi P2-02 : **Florilège de tours mathémagiques**

(Dominique SOUDER)

Description :

Au carrefour de l'irrationnel et de la culture scientifique : contes et légendes de méditerranée mettant en valeur les notions de symétrie (jeux arrangés en miroir), de période, la quadrature du cercle, la distinction aire/périmètre, le repérage dans l'espace, etc.
Matériel : jeu de 52 cartes, papier, crayon, ciseaux, vieux journal.
En bis : un tour utilisant les 78 tarots de Marseille.

Programme :

1) La légende de la fondation de la ville de Carthage (distinction aire et périmètre)
2) Le dé pour passer le temps pendant le siège de Troie.
    - Observation, rotation dans l'espace et parité
    - Narcisse et le jeu en miroir qui est invariant
3) Du carré greco-latin au carré greco-arabo-latin avec des chiffres arabes
4) Les tarots de Marseille :
    - les 22 arcanes majeurs et les permutations avec invariants et échanges
    - les 48 cartes de la baraja, l'organisation logique et le point fixe
    - les 78 tarots et la formule d'élimination dessous/dessus jusqu'à la dernière carte, utilisant une puissance de deux
5) Les lapins et la suite de Fibonacci mêlés à la notion de racine numérique et de période
6) « J'ai perdu mon Eurydice », les couleurs complémentaires, Gardner et encore la symétrie miroir
7) Fêtons les anniversaires par des carrés magiques
8) La quadrature du cercle d'un magicien.

1. La légende de la fondation de la ville de Carthage

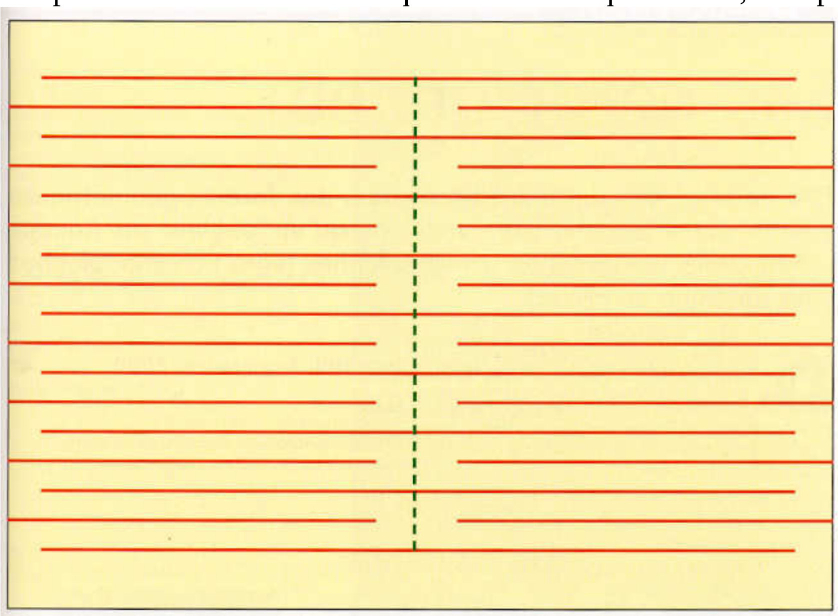
Effet

Le magicien présente une banale feuille de papier 21 × 29,7 cm à son public et lance le défi suivant : - **découpez avec ces ciseaux un trou à l'intérieur de cette feuille de façon que je puisse passer debout à travers !**

Déroulement du tour

Devant les yeux écarquillés de l'assistance et le manque de volontaire pour relever le défi, il indique qu'il va raconter une histoire dont la conclusion donnera la solution du défi…
En l'an 814 avant Jésus Christ, le royaume de Tyr (actuellement au Sud-Liban) avait à sa tête le roi Mutto, lequel avait deux enfants : Elissa, l'aînée, et Pygmalion, le cadet. Le roi meurt. Pour monter sur le trône, Elissa devait être mariée à un grand prêtre. Elle décide de prendre le pouvoir et donc épouse le grand prêtre Acherbas qui est aussi son oncle ; deux jours après le mariage, celui-ci est assassiné. Elissa fait faire une enquête discrète qui révèle que son frère Pygmalion est le responsable, son but étant de monter sur le trône. Elissa décide alors de quitter son pays pour échapper à la soif (meurtrière) de pouvoir de son frère. Elle part en bateau vers l'ouest avec des amis fidèles.

Elle fait une escale en Afrique, sur une presqu'île qui fait partie maintenant du pays qu'on appelle Tunisie. Les indigènes ont à leur tête Iarbas : Elissa lui demande l'hospitalité, mais aussi, pour elle et ses amis, « autant de terre que peut en contenir la peau d'un bœuf ». Iarbas se montre généreux mais peut-être pas très malin : Elissa effectue le découpage en bandes fines de la peau de bœuf selon la tactique et le dessin qui suivent, et déplie…



(Découper selon les traits rouges et selon les traits pointillés, sans dépasser. Avec de l'entraînement, on peut partir d'une feuille blanche, la plier en deux, découper le pli au centre en laissant intactes les extrémités du pli, puis faire des découpes parallèles à la largeur, démarrant alternativement d'un bord et de l'autre. Attention à avoir un nombre impair de découpes parallèles, au moins 13 pour obtenir une hauteur d'homme).

Le contour, par les bandelettes de peau, de la terre cédée à Elissa se révèle suffisamment long pour qu'Elissa puisse s'installer à l'intérieur et fonder Qart Hadasht (la nouvelle ville), dont le nom déformé deviendra Carthage. Rapidement Elissa a été appelée par les africains **Didon** ce qui signifie « l'Errante » et l'on parle donc de **la fondation de la ville**

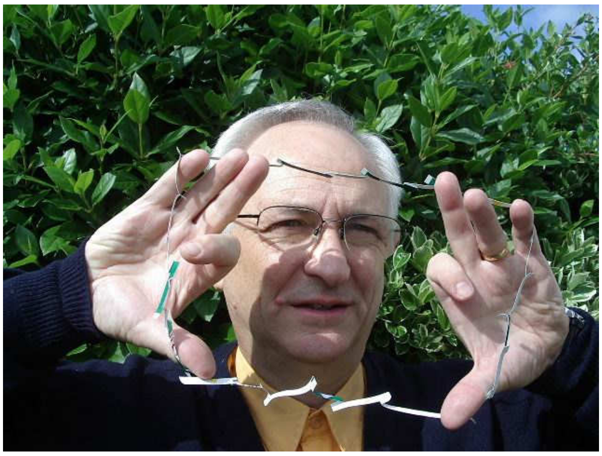
de Carthage par Didon. Selon la légende Didon a été demandée en mariage par Iarbas, elle a accepté mais pour ne pas tromper son époux elle s'est jetée sur un bûcher.

Le magicien a exhibé sa feuille découpée et est passé au travers à la fin de son discours, relevant lui-même son défi. Les matheux savent bien que l'aire et le périmètre ce n'est pas la même chose, et se rendent compte que si la feuille n'a pas changé d'aire pendant le découpage, le périmètre par contre est devenu très grand. Certains profs seraient même prêts à faire calculer à leurs élèves le nombre de découpes à faire dans la feuille pour que ce soit un éléphant qui passe au travers de celle-ci !

.

À vous de jouer !

- Adaptez ce tour pour *une carte à jouer* au lieu d'une feuille de papier.
- Attention le carton est plus difficile à découper que le papier, de plus les découpes vont être très proches les unes des autres, et l'objet obtenu sera très fragile. Vous pouvez présenter ce tour comme le défi du magicien à *faire passer sa tête à travers* une carte.
- Pour voir le résultat, allez ci-dessous et payez-vous la tête de l'auteur !



Dominique SOUDER

dominique.souder@gmail.com

2. Le dé

Histoire du dé

Selon la légende grecque, le héros Palamède inventa les **dés** pour distraire ses compagnons qui, dix années durant, firent le siège de Troie. Nous savons même, d'après Homère, qu'à l'époque, les notables pratiquaient le jeu assis sur des peaux de boeuf devant la porte du palais d'Ulysse. En fait, les dés étaient connus plusieurs siècles avant la guerre de Troie. On en a retrouvé dans des tombeaux égyptiens et il est déjà fait allusion aux funestes effets du goût immodéré pour les jeux de dés dans le plus ancien des quatre livres sacrés de l'Inde.

Le dé qui doit son nom au latin datura (donné par le sort), en grande faveur chez les Grecs et les Romains, apparaît en France dès le XII e siècle. Le jeu connaît vite un grand succès, au temps de la Chevalerie. Il existe même à Paris et dans certaines grandes villes des Académies de Jeu de dés (scholae deciorum). La corporation des déciers ou fabricants de dés devient fort importante et le demeure même après l'apparition des premiers « cartiers » à la fin du XIV e siècle. Nombre d'ordonnances royales, dont une de Saint-Louis interdisent ou réglementent, sans grand effet, les jeux de dés.

La passion du jeu gagne aussi le petit peuple. On en a pour preuves notamment une ordonnance du Magistrat de Lille de 1382 portant défense aux guetteurs de jouer aux dés et au tric-trac. En 1398, la Prévôté de Paris interdit aux « gens de métier », à peine de prison, de jouer les jours ouvrables ! Plus tard, assez joueur lui- même, le bon roi Henri IV, reprenant une idée de son prédécesseur, décide de tirer « quelque commodité » des cartes et des dés, en les soumettant à l'impôt. On n'en joue pas moins et si les déciers devenus moins nombreux se montrent récalcitrants, les cartiers vont mettre tous les moyens en œuvre pour lutter contre cette façon d'aider au rétablissement des finances.

Si le dé demeure le symbole du hasard, les jeux de dés ont perdu avec le temps les graves défauts dont on les accablait. Le démon du jeu a trouvé tant de nouveaux moyens de tentation que les dés ne constituent plus guère la plupart du temps qu'une aimable récréation. En dépit des apparences pourtant le jeu n'est pas toujours aussi enfantin qu'il paraît. C'est en étudiant les chances qu'a un joueur d'obtenir un total donné en lançant deux dés, que Pascal établit les bases du calcul des probabilités.

2. A) Observez vos dés !

Une tradition populaire attribue à Palamède, un des héros de la guerre de Troie l'invention des jeux de dames et de dés. Dans une peinture de Lesché de Delphes, Thersite et Palamède étaient représentés jouant avec les dés imaginés par ce dernier, et dans la Corinthie on lit : « Au dessus du temple de Jupiter Néméen, s'élève l'antique temple de la Fortune, où Palamède fit l'offrande des dés qu'il avait inventés ». Attention de nombreux historiens ont remarqué qu'à toutes choses l'amour propre hellénique cherchait et attribuait une origine grecque… Avant d'agiter les dés on les remue dans un cornet aussi Pollux les appelait-il « les agités ». Les osselets dans la poétique grecque sont liés à l'enfance, à l'innocence, puis à une certaine immunité (Alcibiade enfant jouait avec des dés qui tombèrent sur la chaussée, il obligea au péril de sa vie un char à s'arrêter), tandis que les dés sont devenus le symbole de l'incertitude et du hasard.

Il est bien connu que dans le commerce la majorité des dés vérifient une règle de fabrication qui est la suivante : la somme des valeurs de deux faces opposées doit être 7. Ainsi derrière le 1 c'est le 6, derrière le 2 c'est le 5, derrière le 3 c'est le 4.

Attention il n'y a pas qu'un seul type de dé possible : observez les dés marron et blanc ci-dessous.

La différence entre les deux dés est une question d'orientation des valeurs. Si l'on se place au sommet correspondant aux trois mêmes valeurs (2, 3, 6) celles-ci dans l'ordre des faces gauche-haut-droite peuvent être (6, 3, 2) ou (6, 2, 3).

Intéressons-nous maintenant à la somme des trois valeurs jouxtant ce sommet : dans les deux cas c'est la même, soit 2+3+6 = 11.

Posons le dé de gauche (le marron) sur un papier, dessinons le contour de sa base. Nous allons faire tourner le dé d'un quart de tour, en obligeant sa nouvelle base à être dans le contour déjà dessiné. Il y a plusieurs façons de faire cela...

- En faisant tourner autour d'un axe vertical passant par le centre de la face supérieure, le 3 reste en face supérieure ; on peut tourner le dé pour avoir le 2 à gauche, avec le 1 (opposé du 6) qui apparaît à droite; ou bien on peut tourner le dé pour avoir le 6 à droite, avec le 5 (opposé du 2) qui apparaît à gauche. Dans le premier cas la somme des trois valeurs du sommet visible est 2+3+1 = 6, dans le deuxième cas c'est 5+3+6 = 14.

- En faisant tourner autour d'un axe horizontal passant par le centre de la face de valeur 6, cette valeur reste à gauche. On peut tourner de façon à avoir 2 en face supérieure, et il apparaît à droite le 4 (opposé du 3); la somme des trois valeurs du sommet visible est 6+2+4 = 12. On peut tourner dans le sens opposé pour avoir le 3 à droite, il apparaît alors en face supérieure le 5 (opposé du 2) ; la somme des trois valeurs du sommet visible est 6+5+3 = 14.

- En faisant tourner autour d'un axe horizontal passant par le centre de la face de valeur 2, cette valeur reste à droite. On peut tourner de façon à avoir 6 en face supérieure, et il apparaît à gauche le 4 (opposé du 3); la somme des trois valeurs du sommet visible est 4+6+2 = 12. On peut tourner dans le sens opposé pour avoir le 3 à gauche, il apparaît alors en face supérieure le 1 (opposé du 6); la somme des trois valeurs du sommet visible est 3+1+2 = 6.

Dans tous les (six) cas la somme qui était au départ impaire (valeur 11) devient paire (valeurs 6, 12 ou 14). **L'effet d'un quart de tour est donc de changer la parité de la somme des trois valeurs du sommet visible**. Ceci est vrai pour n'importe lequel des 8 sommets du cube. On peut raisonner ainsi :
effectuer un quart de tour, d'une façon ou d'une autre, consiste à garder au sommet visible deux des trois valeurs, et à remplacer la troisième par celle qui est sur sa face opposée.

Les valeurs opposées ayant pour somme 7 (impair) il y en a toujours une paire et l'autre impaire, elles sont de parité différente. Remplacer l'une par l'autre change la parité du résultat. Dans l'exemple 2+3+6 = 11 (impair), quand on change le 2 par 5 on trouve 14, quand on change le 3 par 4 on trouve 12, et quand on change le 6 par 1 on trouve 6, et le résultat (soit 14, 12 ou 6) devient pair.
Multiplions les quarts de tours successifs :
- après 2 quarts de tour on revient à la parité d'origine du sommet observé
- après 3 quarts de tour, la parité est l'inverse de celle de départ
- après un nombre pair de quarts de tour, la parité ne change pas
- après un nombre impair de quarts de tour, la parité est inversée.

Ceci retenu, on peut mettre en oeuvre des tours de magie sur ce thème...

Votre héros de BD favori ?

Le magicien apporte un dé qu'il pose sur un papier, et marque au feutre le contour du carré de base. Il explique à un spectateur qu'il peut faire subir au dé des quarts de tour de diverses manières à condition que la base du dé soit toujours sur le carré dessiné. Le magicien dit qu'il va s'éloigner de la table, et propose au spectateur de choisir en secret soit Astérix soit Obélix, puis de faire faire au dé autant de quarts de tour qu'il y a de lettres au prénom de son héros choisi. Quand le spectateur annonce qu'il a fait le travail demandé, le magicien revient vers la table et annonce si c'est Astérix ou Obélix qui a été choisi.

Le magicien propose de recommencer le tour avec d'autres héros, par exemple le spectateur choisira cette fois entre Tintin et Milou, et fera les quarts de tour nécessaires pour épeler le nouveau nom de héros choisi. Là encore le magicien reviendra vers la table et trouvera lequel des deux noms a été choisi.

Explication :

Le magicien ajoute les trois valeurs du sommet visible, avant de se retirer loin de la table. Quand il revient il ajoute les trois nouvelles valeurs du sommet visible. Si la parité des deux résultats est la même (deux nombres pairs ou deux nombres impairs), le nom de héros utilisé a un nombre pair de lettres (donc c'est Obélix, ou Tintin selon le tour). Si les parités des deux résultats sont différentes (l'une paire, l'autre impaire), c'est que le nom du héros a un nombre impair de lettres (donc c'est Astérix, ou Milou selon le tour).

Le couple d'amoureux célèbre

Le magicien apporte deux dés qu'il pose séparément sur un papier, et marque au feutre le contour du carré de base de chaque dé. Il explique à un spectateur qu'il peut faire subir aux dés des quarts de tour de diverses manières à condition que la base de chaque dé soit toujours sur le carré dessiné.

Le magicien dit qu'il va s'éloigner de la table, et propose au spectateur d'attribuer en secret le nom Roméo à un dé et le nom Juliette à l'autre dé. Le spectateur doit faire faire à chaque dé autant de quarts de tour qu'il y a de lettres au prénom de l'amoureux (se) attribué. Quand le spectateur annonce qu'il a fait le travail demandé, le magicien revient vers la table et annonce quel dé s'appelle Roméo et quel dé se nomme Juliette.

Le magicien propose de recommencer le tour avec d'autres amoureux, par exemple Tristan et Isolde, et fera les quarts de tour nécessaires pour épeler le nouveau nom d'amoureux selon chaque dé choisi. Là encore le magicien reviendra vers la table et trouvera quel est le nom attribué à chacun des deux dés.

Explication :

Le magicien ajoute les trois valeurs du sommet visible, ceci pour chacun des deux dés, avant de se retirer loin de la table. Quand il revient il ajoute les trois nouvelles valeurs du sommet visible, pour chacun des deux dés. Un des deux dés a changé de parité, c'est celui de l'amoureux dont le nom possède un nombre impair de lettres (donc c'est Roméo ou Tristan, donc le garçon). L'autre dé n'a pas changé de parité, c'est celui de l'amoureuse dont le nombre de lettres est pair (donc Juliette, ou Isolde).

Je suis sûr qu'il y beaucoup de malins dans mes lecteurs, et qu'ils se fatigueront moins, pour faire ce tour, que ce que je viens de demander... Au lieu de faire une somme et de la retenir, deux fois d'abord, deux autres fois ensuite (soit 4 opérations à faire), ils se contenteront d'observer un seul dé (le même), une fois avant les rotations et une fois après. Ils connaîtront son nom, et en déduiront le nom de l'autre dé sans avoir eu à l'observer !

2. B) Le miroir et le dé

Version du mythe de Narcisse selon Ovide

À sa naissance, le devin Tirésias, à qui l'on demande si l'enfant atteindrait une longue vieillesse, répond : « Il l'atteindra s'il ne se regarde pas. » Il se révèle être, en grandissant, d'une beauté exceptionnelle mais d'un caractère très fier : il repousse de nombreux prétendants et prétendantes, amoureux de lui, dont la nymphe Écho. Une de ses victimes éconduites en appelle au ciel. Elle est entendue par Rhamnusie - autre nom de Némésis - qui l'exauce. Un jour qu'il s'abreuve à une source, Narcisse voit son reflet dans l'eau et en tombe amoureux. Il reste alors de longs jours à se contempler et à désespérer de ne jamais pouvoir rattraper sa propre image. Tandis qu'il dépérit, Écho, bien qu'elle n'ait pas pardonné à Narcisse, souffre avec lui ; elle répète, en écho à sa voix : « Hélas ! Hélas ! ». Narcisse finit par mourir de cette passion qu'il ne peut assouvir. Même après sa mort, il cherche à distinguer ses traits dans les eaux du Styx. Il est pleuré par ses sœurs les naïades. À l'endroit où l'on retire son corps, on découvre des fleurs blanches : ce sont les fleurs qui aujourd'hui portent le nom de narcisses.

L'histoire de Narcisse est passée dans le langage courant ; en effet, on dit d'une personne qui s'aime à outrance qu'elle est narcissique.

Préparation du tour : « Associons les jumelles ! »

Constituez du haut vers le bas le paquet de 12 cartes suivant (K = carreau ; C = coeur) : 1K, 2K, 3K 4K, 5K, 6K, 6C, 5C, 4C, 3C, 2C, 1C .
Ce paquet de 12 cartes est en « miroir », au sens où, si on se place au milieu des 12 cartes (entre le 6K et le 6C) les cartes de la même valeur sont en position symétrique : l'as de K et l'as de C, le 2 de K et le 2 de C, etc.

Déroulement

Le spectateur distribue alternativement les cartes en deux piles, faces cachées. Le magicien retourne les cartes supérieures de chaque pile et fait constater qu'elles ne sont pas « jumelles » (= de même valeur et de même couleur). Il fait rassembler les deux piles, les fait redistribuer de la même façon, puis fait constater encore une fois que les deux cartes supérieures sont de valeurs différentes. Il fait rassembler les deux piles, les fait redistribuer une troisième fois en deux piles. Le spectateur choisit l'une des piles, le magicien prend l'autre (elles sont toutes deux faces cachées).

Maintenant l'on va utiliser un dé cubique ordinaire (faces de 1 à 6).
Le spectateur jette le dé : le numéro sorti sert à trouver, en comptant à partir du haut de son jeu, une carte qui est mise de côté sur la table, pour l'instant face encore cachée.
Le magicien demande au spectateur de bien vouloir retourner son dé et de donner la valeur écrite sur cette face de dessous : on l'utilise pour trouver une nouvelle carte, en comptant, à partir du haut, cette fois-ci dans le paquet du magicien. On la met à côté de celle choisie précédemment, on les retourne ensemble… Surprise : ce sont deux cartes jumelles !
Le tour s'arrête là, on ne s'occupe pas de faire les autres paires de jumelles.

Explication

Si vous faites distribuer le paquet par un spectateur, carte après carte en deux piles alternativement, faces cachées, vous obtenez un paquet constitué à partir du haut ainsi : 2C, 4C, 6C, 5K, 3K, 1K, et l’autre paquet ainsi : 1C, 3C, 5C, 6K, 4K, 2K. Vous constatez que les cartes sont en ordre inversé dans ces paquets. Plus fort, si vous replacez ces deux paquets de 6 cartes l’un sur l’autre dans n’importe quel ordre, et si vous redistribuez les 12 cartes en deux piles alternativement, carte après carte, les deux paquets obtenus continueront à être classés en ordre inverse l’un de l’autre pour leurs valeurs. Par exemple vous obtiendrez pour l’un : 4K, 5C, 1C, 3K, 6C, 2C et pour l’autre : 2K, 6K, 3C, 1K, 5K, 4C.

La distribution en deux piles alternatives a laissé invariant le côté miroir du paquet regroupant les deux piles, et c’est cela qui permet de faire de la magie.

La somme des faces opposées d’un dé courant est toujours 7 (autre invariant connu). Si vous ajoutez les positions des cartes jumelles (dont on note ci-dessous les noms a, b, c, d, e, f) dans les deux paquets arrangés en miroir, vous constatez que c’est aussi 7 :

Sp	ec	ta	te	u	r		M	a	gi	ci	e	n
a	b	c	d	e	f		f	e	d	c	b	a
1	2	3	4	5	6		1	2	3	4	5	6

Par exemple pour la lettre « a » on obtient 1+6 = 7, pour la lettre « b » c’est 2+5 =7, etc.
Le dé permet de remplacer l’inversion d’ordre des valeurs dans les deux paquets par une formule : celle de passage du numéro dans la première pile d’une certaine valeur de carte, vers le numéro de la carte jumelle dans la deuxième pile. Si on appelle x la position d’une valeur dans la première pile, et y la position de la même valeur (c’est à dire de la carte jumelle), dans la deuxième pile, la formule est : $y = 7-x$.

3. Chiffres arabes pour carré gréco latin…

A propos de carré gréco-latin…

Un carré latin d'ordre n est un tableau carré à n lignes et n colonnes composé avec n éléments (lettres, nombres, figures géométriques) disposés de façon à ce qu'ils n'apparaissent qu'une fois et une seule sur chaque ligne et dans chaque colonne. Les éléments permutent entre les lignes et entre les colonnes ; chaque élément est écrit n fois dans le tableau.

Les grilles de Sudoku sont des carrés latins.

Exemple : le Sudoku et carré latin d'ordre 4 obtenu avec les quatre chiffres arabes de 1 à 4

1	2	3	4
4	3	2	1
2	1	4	3
3	4	1	2

Changeons les chiffres en lettres latines 1 = A, 2 = B, 3 = C, 4 = D.

On obtient un carré latin d'ordre 4 :

A	B	C	D
D	C	B	A
B	A	D	C
C	D	A	B

Changeons les chiffres en lettres grecques 1 = α, 2 = β, 3 = γ, 4 = δ.

On obtient un carré latin de lettres grecques :

α	β	γ	δ
δ	γ	β	α
β	α	δ	γ
γ	δ	α	β

Mais on peut en imaginer d'autres, par exemple :

α	β	γ	δ
γ	δ	α	β
δ	γ	β	α
β	α	δ	γ

Deux carrés latins à n lignes et n colonnes, chacun constitué avec n symboles, *s*ont qualifiés d'**orthogonaux** si leur superposition compose un nouveau carré constitué avec 2n symboles comportant les n×n couples différents possibles. Ce nouveau carré est alors appelé **"gréco-latin".** Ces carrés sont ainsi nommés depuis le mathématicien suisse Leonhardt Euler qui les avait composés avec des lettres grecques et latines.

Si on superpose le carré latin de lettres latines ci-dessus et le premier carré latin de lettres grecques ci-dessus on obtient :

Aα	Bβ	Cγ	Dδ
Dδ	Cγ	Bβ	Aα
Bβ	Aα	Dδ	Cγ
Cγ	Dδ	Aα	Bβ

Ce n'est pas un carré gréco-latin. On y retrouve quatre couples différents Aα, Bβ, Cγ, Dδ (chacun écrit quatre fois) et non 16 couples différents. C'est un carré latin mais non gréco-latin.

Mais si on superpose le carré latin de lettres latines ci-dessus et le deuxième carré latin de lettres grecques ci-dessus on obtient :

Aα	Bβ	Cγ	Dδ
Dγ	Cδ	Bα	Aβ
Bδ	Aγ	Dβ	Cα
Cβ	Dα	Aδ	Bγ

Et là c'est un carré gréco-latin car les 16 couples sont différents.

Carré latin diagonal

Sur les grandes diagonales du carré ci-dessous les quatre éléments ne sont pas différents, contrairement à ce qui se passe sur chaque ligne et chaque colonne…

1	2	3	4
2	1	4	3
3	4	2	1
4	3	1	2

Il s'agit d'un carré latin, mais non diagonal

Cependant sur les quatre premiers carrés latins du début de ce chapitre (le Sudoku, les carrés de lettres latines ou grecques) on trouvait sur les grandes diagonales tous les éléments différents. C'étaient des carrés latins diagonaux.

Différences avec la notion de carré magique

Avec n^2 nombres on peut fabriquer un carré magique d'ordre n.

Un carré de $n \times n$ nombres est magique quand la somme des nombres de chaque ligne, de chaque colonne, et de chaque diagonale donne le même total.

On a vu qu'un Sudoku était un carré latin.

Le Sudoku écrit en début d'article est un carré latin diagonal, c'est aussi un carré magique, de somme 10.

Mais le carré de chiffres juste ci-dessus, qui est latin mais non diagonal, n'est pas un carré magique à cause de ses diagonales. Remarquons que ce n'est pas non plus un Sudoku : on ne peut pas faire de régionnement par quarts de carré des quatre valeurs.

Toutefois on peut avoir un Sudoku qui ne soit pas un carré magique, voici un exemple, sous forme d'un Sudoku carré latin non diagonal :

1	2	3	4
3	4	1	2
4	1	2	3
2	3	4	1

Voici un carré gréco-latin d'ordre 10 fabriqué avec dix lettres latines et les nombres de 1 à 10

A1	B2	C3	D4	E5	F6	G7	H8	I9	J10
D7	I3	B10	C5	A4	E8	H6	G2	J1	F9
G6	A7	J5	B9	C8	I4	E2	D10	F3	H1
E10	D6	I7	F8	B1	C2	J4	A9	H5	G3
F4	E9	A6	J7	H2	B3	C10	I1	G8	D5
C9	H4	E1	I6	F7	G10	B5	J3	D2	A8
B8	C1	G4	E3	J6	H7	D9	F5	A10	I2
H3	G5	D8	A2	I10	J9	F1	B4	C7	E6
I5	J8	F2	H10	G9	D1	A3	E7	B6	C4
J2	F10	H9	G1	D3	A5	I8	C6	E4	B7

Changeons les lettres en chiffres ainsi :
A=0, B=1, C=2, D=3, E=4, F=5 ; G=6 ; H=7, I=8, J= 9.
Remplaçons le nombre 10 du tableau ci-dessus par 0. On obtient :

01	**12**	**23**	**34**	**45**	**56**	**67**	**78**	**89**	**90**
37	**83**	**10**	**25**	**04**	**48**	**76**	**62**	**91**	**59**
66	**07**	**95**	**19**	**28**	**84**	**42**	**30**	**53**	**71**
40	**36**	**87**	**58**	**11**	**22**	**94**	**09**	**75**	**63**
54	**49**	**06**	**97**	**72**	**13**	**20**	**81**	**68**	**35**
29	**74**	**41**	**86**	**57**	**60**	**15**	**93**	**32**	**08**
18	**21**	**64**	**43**	**96**	**77**	**39**	**55**	**00**	**82**
73	**65**	**38**	**02**	**80**	**99**	**51**	**14**	**27**	**46**
85	**98**	**52**	**70**	**69**	**31**	**03**	**47**	**16**	**24**
92	**50**	**79**	**61**	**33**	**05**	**88**	**26**	**44**	**17**

C'est presque le tableau de nombres qui va servir à faire un tour de magie… Mais comme la première ligne est :

01	**12**	**23**	**34**	**45**	**56**	**67**	**78**	**89**	**90**

ce qui pouvait donner à un spectateur futé des idées sur la fabrication du tableau, le malicieux magicien va faire bouger cette ligne vers l'intérieur du tableau, à un endroit moins évident : en sixième ligne au lieu de première ! Vérifiez dans le tour qui suit…

Déroulement du tour

Le magicien propose un carton sur lequel est inscrit un tableau carré formé des dix × dix = cent nombres de 0 à 99.

37	**83**	**10**	**25**	**04**	**48**	**76**	**62**	**91**	**59**
66	**07**	**95**	**19**	**28**	**84**	**42**	**30**	**53**	**71**
40	**36**	**87**	**58**	**11**	**22**	**94**	**09**	**75**	**63**
54	**49**	**06**	**97**	**72**	**13**	**20**	**81**	**68**	**35**
29	**74**	**41**	**86**	**57**	**60**	**15**	**93**	**32**	**08**
01	**12**	**23**	**34**	**45**	**56**	**67**	**78**	**89**	**90**
18	**21**	**64**	**43**	**96**	**77**	**39**	**55**	**00**	**82**
73	**65**	**38**	**02**	**80**	**99**	**51**	**14**	**27**	**46**
85	**98**	**52**	**70**	**69**	**31**	**03**	**47**	**16**	**24**
92	**50**	**79**	**61**	**33**	**05**	**88**	**26**	**44**	**17**

Le magicien se place de façon à ce qu'il ne puisse pas voir ce tableau.
Le magicien donne une pièce de monnaie à un spectateur et lui demande de la lancer :

- si le résultat est pile le spectateur utilisera une ligne du tableau
- si le résultat est face le spectateur utilisera une colonne du tableau.

Le magicien donne un dé particulier au spectateur : celui-ci a dix faces numérotées de 1 à 10.
Le spectateur le lance, et le numéro qui sort donne le numéro de la ligne ou de la colonne auquel le spectateur va s'intéresser.
Le magicien demande au spectateur d'entourer, sur la ligne ou la colonne que le sort vient de désigner, un nombre. Il tend au spectateur une calculatrice et lui demande d'ajouter tous les nombres sauf celui entouré dans la colonne ou la ligne en question.
Le spectateur dit son total, le magicien donne alors la valeur du nombre entouré.

Explication

Le tableau est rempli de nombres dont l'écriture nécessite deux chiffres : celui des unités et celui des dizaines. Sur chaque ligne et sur chaque colonne chaque chiffre de 0 à 9 ne figure qu'une fois à la place des unités, et ne figure qu'une fois à la place des dizaines.
(Il s'agit d'un carré gréco-latin 10×10 pour les deux caractéristiques « chiffre des dizaines, chiffre des unités » ; on fera un commentaire plus loin sur ceci.)
Le total des dix chiffres des unités de toute ligne ou colonne est le total des nombres de 0 à 9 soit 45. Le total des dix chiffres des dizaines de toute ligne ou colonne est le total des nombres de 0 à 9 soit 45 dizaines. Dans l'addition des dix nombres d'une ligne ou d'une colonne ou trouve toujours $45 + 45\times10 = 495$.

Quand le spectateur annonce son total de neuf nombres soit T, le magicien calcule (495 – T) et trouve ainsi le nombre manquant.
Exemples :
- le spectateur a obtenu une colonne, la septième à partir de la gauche. Il a entouré le nombre 94. Il calcule la somme : 76+42+20+15+67+39+51+03+88 et trouve 401.
Le magicien calcule (495 – 401) et trouve 94.
- le spectateur a obtenu une ligne, la neuvième à partir du haut. Il a entouré le nombre 69. Il calcule la somme : 85+98+52+70+31+03+47+16+24 et trouve 426.
Le magicien calcule (495 – 426) et trouve 69. Si la soustraction est difficile à faire de tête comme ici, on peut utiliser le fait que 495 = 500 – 5 et partant de 500 enlever 5 de plus que le total T annoncé. Ici le magicien calcule 426+5 = 431 puis 500 – 431= 69.

Variante
Si vous n'avez pas de calculatrice sous la main, et si vous êtes inquiet de la capacité du spectateur à faire des additions justes, voici une parade à cette situation désagréable.
Une fois un nombre entouré par le spectateur, au lieu de faire calculer le total des neuf autres, le magicien peut faire énoncer ces neuf nombres (même dans un ordre farfelu), et déclarant qu'il a une mémoire exceptionnelle, trouver le nombre entouré. Pour cela le magicien doit noter les neuf nombres énoncés et repérer dans les neuf unités proposées quelle est celle qui manque, puis repérer dans les neuf chiffres des dizaines proposés quel est le chiffre qui manque. S'il manque 3 comme unité et 2 comme dizaine, le nombre entouré est 23.

De plus en plus fort…

Un carré arabo-gréco-latin

A partir de la structure unique suivante, en 4x4 cases, de, cette fois-ci, trois alphabets de 4 lettres :

aα1 bβ2 cγ3 dδ4
bγ4 aδ3 dα2 cβ1
cδ2 dγ1 aβ4 bα3
dβ3 cα4 bδ1 aγ2

voici un tour de magie qui propose des tableaux de nombres :

111	222	333	444
234	143	412	321
342	431	124	213
423	314	241	132

ou

411	322	233	144
334	443	112	221
242	131	424	313
123	214	341	432

ou

421	332	243	114
344	413	122	231
212	141	434	323
133	224	311	442

ou

414	321	232	143
333	442	111	224
241	134	423	312
122	213	344	431

Déroulement du tour :
Choisissez un des tableaux, puis une ligne ou une colonne, puis un nombre à l'intérieur. Dites-moi les 3 autres nombres de cette ligne ou colonne, je retrouverai votre nombre choisi.

Variante :
Choisissez un des tableaux, puis une ligne ou une colonne, puis un nombre à l'intérieur. Donnez-moi le total des 3 autres nombres de votre ligne ou colonne du tableau choisi, je retrouverai votre nombre.

Solution :

- dans la colonne des unités, celle des dizaines, celle de centaines, chaque chiffre de 1 à 4 doit être représenté, on repère donc facilement celui qui manque
- sinon quand on donne le total il doit faire 1110 diminué du chiffre choisi. En effet 1+2+3+4 = 10 et 10 centaines +10 dizaines +10 unités = 1110. Le nombre caché vaut donc 1110 moins le total annoncé.

Variante : un tour diabolique…

Changez respectivement dans les tableaux ci-dessus les valeurs 1, 2, 3, 4 par 0,1, 2, 3. Si on pose l'addition des quatre nombres d'une ligne ou colonne, le total de chaque colonne (unité, dizaine, centaine) sera cette fois 0+1+2+3 = 6 et le total des quatre nombres de chaque colonne ou ligne de tableau sera 666 (le nombre de la bête !) au lieu de 1110.

Le magicien pour retrouver le nombre choisi doit enlever de 666 le total fourni par le spectateur.

4. Les tarots de Marseille

Du vécu ! Du vécu !!

Vous avez piqué une colère en découvrant au lycée le premier journal de l'année scolaire, rédigé sous la responsabilité des élèves. En effet on y trouve en bonne place et bien développé un horoscope pour le mois. Vous décidez de réagir à votre façon en demandant la publication, dans le prochain numéro qui suit, d'un article présentant votre club de jeux mathématiques, agrémenté de la présentation et de l'explication des tours de mathémagie ci-dessous…

Un jeu de tarots de Marseille se compose de 78 cartes : 22 Arcanes majeurs (numérotés de 1 à 21 et en 22^{e} une carte appelée « le mat ou fou ») et 56 Arcanes mineurs, réparties en quatre familles (deniers, coupes, épées et bâtons) de quatorze valeurs chacune dont les valeurs croissantes vont de 1 à 10 puis valet, cavalier, dame, roi.

L'origine des tarots est difficile à définir, et sujette à vives controverses. Nous n'entrerons pas dans des études des tarots du point de vue des occultistes ou du point de vue philosophique. De nombreux auteurs estiment que ce sont les chinois qui découvrirent et firent connaître les tarots dès le X^{e} siècle. Une autre théorie expose une origine égyptienne des tarots dans le livre de Thot, constitué de hiéroglyphes et de chiffres magiques gravés sur 78 tablettes d'or. Le jeu de cartes semble avoir été introduit en Europe avant 1240, année où le synode de Worchester interdit le « jeu des rois et des reines ». La cartomancie (« l'art de dire la bonne aventure grâce aux cartes ») semble avoir fait ses débuts chez les espagnols avant de s'étendre ailleurs en Occident. Ceci s'appuie sur le fait que les anciennes cartes espagnoles étaient divisées en deniers, coupes, épées et bâtons et s'inspiraient du modèle égyptien. Les couleurs classiques (cœur, carreau, pique et trèfle) ne furent adoptées que plus tard. On peut établir un parallèle entre les quatre couleurs des Arcanes mineurs (représentant pour les occultistes le monde des effets, la vie quotidienne de l'homme) et la division en quatre classes de la société espagnole médiévale. Les Deniers correspondaient aux commerçants et à la classe moyenne, le Coupes représentaient les membres du clergé, les Epées symbolisaient la noblesse, et les Bâtons la classe paysanne. Les Arcanes majeurs indiquent pour les occultistes les causes des faits et des comportements humains.

Nous allons vous présenter trois tours de ressorts mathématiques très différents :

- Le premier utilisant les 22 Arcanes majeurs, basé sur les permutations
- Le deuxième utilisant 48 des 56 Arcanes mineurs, en fait un vieux jeu de cartes espagnol, basé sur des comptages, une organisation logique en cycle et la recherche d'invariant
- Le troisième réunissant le jeu entier de 78 tarots, basé sur une formule mathématique d'élimination où les puissances de deux jouent un rôle important.

4. A) Les échanges…

Matériel et réflexion préalable au tour

Vous avez besoin d'un paquet de 22 cartes (ce tour est donc bien adapté aux 22 « arcanes majeurs » d'un jeu de tarots). Il vous faut aussi un papier et un crayon pour faciliter la compréhension.

Apprenez d'abord une façon originale de battre un jeu de cartes. Le jeu se présente faces cachées sur le dessus, tenu en main gauche. On prend en main droite la carte du dessus, on fait glisser dessus la deuxième carte, puis on fait passer sous ce paquet droit la troisième carte, on fait glisser sur le dessus la quatrième carte, puis on met la cinquième carte sous le paquet, et ainsi de suite alternativement, une à une, dessus dessous jusqu'à épuisement du paquet de la main gauche.

Appliquez cette méthode de mélange à votre jeu de 22 cartes, placées du 1 en haut, au 22 en bas. Notez les nouvelles positions des cartes du haut vers le bas.
-Constatez qu'une carte peut rester à la même position après cette battue : laquelle ? Quel est le numéro à partir du haut de la carte stable ? Notez qu'il n'y a qu'elle dans ce cas.
-Y a-t-il deux cartes dont les positions sont échangées ? Lesquelles ?
-Si on fait le mélange une deuxième fois, qu'arrive-t-il à ces cartes échangées lors du premier mélange ?
(Les réponses apparaissent dans le tableau ci-dessous.)

Ordre initial	1	2	3	4	**5**	6	7	**8**	9	10	11	12	13	**14**	15	16	17	18	19	20	21	22
Après un mélange	22	20	18	16	**14**	12	10	**8**	6	4	2	1	3	**5**	7	9	11	13	15	17	19	21
Après deux…	21	17	13	9	**5**	1	4	**8**	12	16	20	22	18	**14**	10	6	2	3	7	11	15	19

Déroulement du tour

Il vous faut préparer 4 petits papiers et un crayon et avoir 4 amis…

Tendez le paquet de 22 cartes et dites à un premier ami de noter (en cachette de tous les présents) sur une feuille de papier les noms des huitième et quatorzième cartes (et de laisser ces cartes dans leurs positions).

Tendez le paquet à un deuxième ami, demandez-lui d'exécuter le mélange magique selon la tactique exposée plus haut, et de noter les cinquième et huitième cartes sur un deuxième papier.

Faites mélanger comme plus haut par un troisième ami, qui note la huitième et la quatorzième cartes. Enfin un quatrième ami fait le mélange et note la cinquième et la huitième cartes sur un quatrième papier.

Les 4 papiers doivent dévoiler, après lecture commune, les deux mêmes noms de cartes… Voilà une bonne occasion de constater les liens de l'amitié !

Explication

Avec 22 cartes, la $8^{\text{ème}}$ à partir du haut est stable, et les $5^{\text{ème}}$ et $14^{\text{ème}}$ cartes échangent leurs places de mélange en mélange (pour un nombre pair de mélanges celles-ci sont stables).

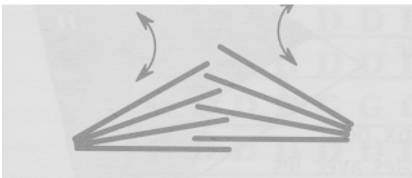
On peut parler d'un **point fixe** pour la position 8, d'un mélange qui est une manipulation **involutive** pour les positions 5 et 14 revenant à leur place au bout de deux mélanges, et encore de la paire des positions 5 et 14 qui est **globalement invariante** dans un mélange (le 5 et le 14 bougent individuellement mais la paire – sans considération d'ordre entre les deux valeurs, ce n'est pas un couple – ne change pas globalement). On pourrait aussi parler de **cycle de permutations d'ordre 2** avec l'ensemble des positions {5, 14}, de **cycle d'ordre 3** avec l'ensemble des positions {3, 18, 13}, etc.

4. B) « Le soleil espagnol »

Déroulement

Le magicien déclare être enchanté de ses vacances espagnoles. Il a goûté le soleil, et les jeux de cartes à l'ombre. Il a joué à la « baraja » espagnole : le jeu est composé de 48 cartes, soit 12 cartes dans quatre couleurs : oros (deniers), copas (coupes), espadas (épées) et bastos (bâtons). Les valeurs numérales habituelles sont 1 (uno), 2 (dos), 3 (tres), 4 (cuatro), 5 (cinco), 6 (seis), 7(siete), 8 (ocho), 9 (nueve). Il n'y a pas notre dix habituel : la carte numérotée dix est une figure, elle représente un valet (sota), la carte numérotée onze est un cavalier (caballo, qui remplace notre dame habituelle) et la carte numérotée douze est un roi (rey).

Le magicien attrape un tel jeu, et le coupe pour faire un mélange en queue d'aronde,



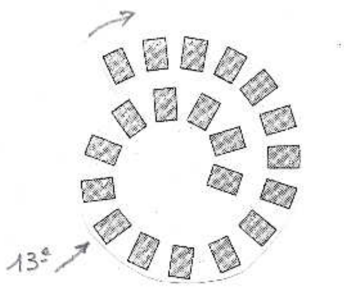
puis il recoupe le paquet rassemblé.

Il ajoute que ce pays sang et or est associé pour lui à la famille des « oros », et il se met à les sortir dans l'ordre où ils arrivent après ce mélange et cette coupe qui viennent d'être faits : il constitue une pile de ces 12 cartes, faces cachées.

Il poursuit en disant qu'il va épeler successivement les noms en espagnol (qu'il connaît maintenant) de toutes ces cartes, tout en bougeant une carte par lettre, et il commence avec r-e-y. La carte « r » est déplacée du dessus du jeu vers le dessous, ainsi que la suivante, la carte « e », puis la carte « y » qui finit le mot est retournée : on constate que c'est le roi des oros. Le magicien continue avec c-a-b-a-l-l-o, en faisant passer une à une toutes les cartes nécessaires, du dessus vers le dessous de son paquet, depuis la première, le « c », jusqu'à la carte qui termine, le « o », qui est retournée : c'est bien le cavalier. Ensuite c'est le tour du sota (valet), puis du 9 (nueve) et ainsi de suite en décroissant jusqu'au « uno ».

Les oros ont été mis en pile faces visibles dans l'ordre d'apparition, le magicien les prend et place discrètement ce paquet de 12 cartes sur le reste du jeu, présenté faces cachées.

Le magicien demande au spectateur de couper le jeu vers le milieu, de prendre la moitié qui était en dessous. Il se retourne, et invite le spectateur à choisir en secret dans son tas le nombre de cartes qu'il veut, mais moins d'une douzaine pour ne pas rallonger le jeu. Il demande au spectateur qu'il retienne ce nombre de cartes, regarde la carte de dessous du petit paquet qu'il vient de faire, qu'il se rappelle son nom, et place ce petit paquet sur la première moitié du jeu coupé. Il revient vers le spectateur, se saisit des cartes et poursuit en disant qu'en Espagne parfois la tête lui tournait, à cause du soleil, et qu'il lui arrivait de placer les cartes en spirale sur la table, tombant presque en léthargie… Le magicien étale alors sur la table une vingtaine de cartes, faces cachées (sans les compter à haute voix).



Malgré la douce somnolence il indique qu'il va retrouver la carte choisie et le nombre de cartes, à condition que la chance l'aide un peu à se fixer les idées : pour cela il retourne une carte : la 13e de celles qu'il vient de poser en spirale, puis lit sa valeur, et dit :

- « oui, c'est le nombre de cartes prélevé par le spectateur»

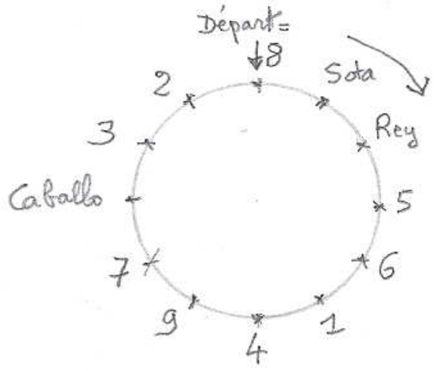
Il retourne alors une autre carte, en disant « c'est la bonne ». Le spectateur approuve les deux affirmations.

Explication

L'ordre des 12 cartes utiles a été calculé par le magicien : 8-Sota- Rey-5-6-1-4-9-7-Caballo-3-2. Il faut placer les 12 oros au milieu du jeu de 48 cartes. Le fait de couper et de mélanger comme indiqué plus haut ne fait pas se mélanger les oros entre eux : les six cartes du bas d'une moitié ne sont pas en face des six du haut de l'autre moitié ; par contre ceux qui doivent se trouver en haut (pour démarrer l'ordre magique) sont dans la deuxième moitié du paquet, c'est pourquoi il faut recouper après le mélange pour rétablir l'ordre voulu.

D'où vient cet ordre magique ?

Il suffit de dessiner un cercle avec 12 positions correspondant à vos 12 cartes, le départ (la carte du dessus du paquet) étant marqué à l'une des 12 positions.



Tournez dans le sens des aiguilles d'une montre sur votre cercle : si vous voulez le « rey », placez celui-ci en troisième position car r-e-y fait trois lettres. Continuez ainsi avec « caballo », celui-ci vient en dixième place, puis « sota » qui vient en deuxième place sur le cercle. Attention pour le « nueve » il faut sauter bien sûr la position du roi qui a été sorti du jeu (et du cercle). De même il faut penser à éliminer toutes les positions de cartes déjà distribuées. A partir du départ de votre cycle les cartes se succèderont selon l'ordre suivant (de haut en bas du paquet) : 8-Sota- Rey-5-6-1-4-9-7-Caballo-3-2.

Il faut bien sûr respecter la même succession des noms des cartes dans votre préparation et dans le déroulement du tour ensuite.

Au fur et à mesure que les 12 cartes apparaissent elles sont placées en pile face visible de façon que l'ordre décroissant 12, 11, 10, 9, etc., 3, 2, 1 soit respecté. La petite douzaine de cartes choisies ensuite par le spectateur viennent par dessus celles-ci. Voyons ce qui se passe dans le tableau ci-dessous, où la carte disposée en 13^{e} place pour former le dessin de spirale nous intéresse particulièrement. On a appelé x le nombre de cartes prélevées par le spectateur.

x premières cartes de valeurs sans importance, puis…	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1
Numéro de la carte dans la spirale….	x+1	x+2	x+3	x+4	x+5	x+6	x+7	x+8	x+9	x+10	x+11	x+12

- Remarquons que sur une colonne le total de deux cases verticales est toujours (x+13). Par conséquent sur la deuxième ligne, là où se cache la valeur 13 il y a au-dessus la valeur x. Ainsi la 13^{e} carte de la spirale donne le nombre x de cartes utilisé par le spectateur (avec 12 si c'est le roi, 11 si c'est le cavalier, et 10 si c'est le valet). Ce 13 porte chance !
- Remarquons aussi que pour que le tour réussisse il ne faut pas que le spectateur ait pris plus de 12 cartes, car alors la 13^{e} serait dans ces cartes-là, et non dans la série des valeurs décroissantes de 12 à 1 qu'on a si bien préparé en première partie de tour.

- Pour trouver la carte choisie, il suffit au magicien de compter à partir du début de la spirale le nombre de cartes égal à la valeur de la 13e carte, et de retourner celle sur laquelle on arrive.

<u>4. C) « Le dernier tarot »</u>

Préparation

Le magicien vient de faire les deux tours précédents, il a sur la table trois tas de cartes : les 22 Arcanes majeurs, les 48 cartes du jeu espagnol et les huit cartes non utilisées (quatre dix et quatre dames). Le magicien fait battre les 22 Arcanes par une personne, le paquet des 48 cartes par une autre personne. Pendant ce temps le magicien regroupe les quatre 10, puis les quatre dames où la dame d'épée (=pique) se trouve en deuxième place, soit en sixième dans ce tas de huit cartes. Le magicien se débrouille pour ramasser les cartes en constituant un paquet avec du haut vers le bas, les 22 Arcanes majeurs, puis ses huit cartes (ainsi donc la dame de pique est la vingt-huitième carte à partir du haut), et enfin les 48 dernières cartes.

Déroulement

Après l'Espagne le magicien souhaite évoquer la Russie et plus précisément un opéra de Tchaikovsky qu'il apprécie beaucoup : « la dame de pique » basé sur une nouvelle de Pouchkine. Une riche comtesse surnommée « la dame de pique » est réputée avoir gagné à la cour de Versailles grâce au « secret des trois cartes » transmis par l'immortel Comte de saint Germain. Le héros la menace pour obtenir son secret, elle meurt d'effroi. Plus tard son fantôme lui livre le secret : il doit jouer les 3 cartes le 7, le 3 et l'as. Au jour J, les deux premières cartes le font gagner, mais à cette troisième carte le héros perdra tout, car c'est la dame de pique qui sortira et non l'as. Bien sûr cette dame de pique lui rappelle la comtesse qu'il a fait mourir. Il se suicide. Cette dame de pique symbolise la malédiction du héros joueur de cartes par appât du gain, elle est diabolique. Dans le jeu de tarots, ce qui correspond à la dame de pique c'est la dame d'épée qui est une personne malveillante, une ennemie. Si l'on se met à éliminer dans ce jeu de tarots toutes les cartes une à une jusqu'à ce qu'il n'en reste qu'une il est persuadé que ce sera elle. Le magicien donne le jeu à un spectateur qui doit jeter la carte de dessus, faire passer la suivante sous le paquet puis éliminer la carte du dessus, faire passer la suivante sous le paquet, et ainsi de suite jusqu'à ce qu'il n'en reste qu'une ; on la retourne : c'est bien sur la dame d'épée (dame de pique).

Explication

Les tours d'élimination consistent à retrouver une carte après avoir éliminé toutes les autres de son paquet. Par exemple, quand on élimine de son paquet en jetant une carte sur la table, puis en faisant passer la carte du dessus vers le dessous, et en recommençant ce manège jusqu'à ce qu'il ne reste qu'une carte en main, on se rappelle que la formule qui donne le numéro de la carte (à partir du haut du paquet) qui reste en dernier est : $2(x-2^n)$ où x est le nombre de cartes du paquet, et 2^n la plus grande puissance de deux inférieure strictement à x.

Ici pour 78 cartes, la plus grande puissance de deux inférieure strictement à 78 est 64. On calcule $2(78-64) = 2\times 14 = 28$. C'est la 28e carte qui reste la dernière : c'est là qu'on avait placé la dame d'épée.

Revenons à la justification de la formule…

> **Vous comprenez rapidement que si vous éliminez la première carte, puis la troisième, et ensuite toutes les cartes de position impaire, cela justifie qu'il y aura un 2 en facteur dans la formule donnant le numéro de la carte qui reste la dernière.**

Maintenant nous vous proposons d'étudier les cas où le nombre de cartes est exactement une puissance de 2. Ce sera toujours la dernière carte (celle du dessous du paquet) qui sera sélectionnée à la fin de la manœuvre. A la fin de la première étape, chaque carte ayant été touchée une seule fois pour être soit éliminée soit passée en dessous, il ne reste plus que les cartes de numéros pairs et leur nombre est le précédent divisé par 2 donc c'est encore une puissance de 2. Le dernier numéro (pair) a été gardé. La deuxième étape commence donc par l'élimination du 2, on garde le 4, etc. A la fin de la deuxième étape, il reste des multiples de 4, en un nombre qui est encore une puissance de deux. Comme 4 divise le nombre de cartes du paquet le dernier numéro a été gardé. La troisième étape s'il y en a une, commence par l'élimination du 4, on garde le 8 et ses multiples, etc. A la fin de l'histoire il reste un numéro qui est une puissance de 2, la plus grande possible donc ici le nombre de cartes du paquet lui-même. Remarquez que la formule donne alors :

$$2(x - 2^n) = 2(2^{n+1} - 2^n) = 2(2^n)(2 - 1) = 2\,(2^n) = 2^{n+1} = x.$$

Ensuite, envisageons un nombre de cartes qui vaut « p » de plus que 2^n avec $p < 2^n$. On a donc $x = 2^n + p$, et $p = x - 2^n$. Quand on enlève la p^e carte, puis qu'on passe la suivante sous le paquet, celle qui est maintenant sous le paquet avait le numéro 2p au départ. Comme le paquet contient alors un nombre de cartes égal à une puissance de deux, celle du dessous sera la restante. La carte de numéro 2p est donc la bonne soit encore le numéro **$2(x - 2^n)$.**

5. Les lapins de Fibonacci

Leonardo Pisano (1170 - 1250), fils de Guilielmo et membre de la famille Bonacci est plus connu sous le nom de **Fibonacci**. Ce fils de diplomate qui s'appelait lui-même parfois Bigollo (bon à rien ou voyageur) rédigea le livre 'Liber abbaci' (1202) où il exploite ses connaissances en arithmétique accumulées lors de ses voyages (entre autres en Afrique du nord où il avait accompagné son père). Apparaît ainsi en Europe la notation décimale arabo-hindoue de position et l'usage des chiffres "arabes". Il s'attaqua ensuite à la géométrie grecque à laquelle les Arabes avaient accès, et poursuivit, en parallèle, ses propres travaux.

Et c'est ainsi que nous arrivons à notre **problème de lapins** :

« Possédant initialement un couple de lapins (dans un lieu isolé de tous les côtés par un mur), combien de couples obtient-on en douze mois si chaque couple engendre tous les mois un nouveau couple à compter du second mois de son existence ? (On suppose que les lapins ne meurent pas).»

Le premier couple engendre un couple.

Le mois suivant, le premier et le second couple engendrent chacun un couple, soit deux couples.

Le troisième mois, les trois couples engendrent chacun un couple, soit trois couples

Le quatrième mois, les deux premiers couples et les trois derniers engendrent chacun un couple, soit 5 couples et ainsi de suite…

Si vous poursuivez, alors votre suite sera la suivante :

1 – 1 – 2 – 3 – 5 – 8 – 13 – 21 – 34 – 55 – 89 – 144

Vous constatez alors que le troisième résultat est la somme des deux premiers, que le quatrième est la somme du troisième et du second, et ainsi de suite, jusqu'à l'infini...

La définition est alors la suivante :

Si l'on note F_n le n^e nombre de la suite de la suite de Fibonacci : $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$

Vous devez trouver 144 couples de lapin le douzième mois !

Suites de Fibonacci et tours de magie…

Une suite de Fibonacci est une succession de nombres dont les deux premiers sont laissés au choix, et dont chaque nombre à partir du troisième est la somme des deux nombres qui le précèdent. Certaines propriétés des suites de Fibonacci permettent de réaliser des tours de magie. La plus connue est sans doute celle-ci :

« la somme de 10 termes successifs est égale au septième terme multiplié par 11 ».

Elle peut être présentée sous la forme d'un tour de magie ainsi… Le magicien propose à un spectateur d'écrire 2 nombres de son choix dans les 2 cases du haut d'un ensemble de 10 cases en forme de L, et ensuite de poursuivre de proche en proche le remplissage des cases du L en respectant la règle qu'un nombre doit être la somme des deux précédents. Le magicien peut se tenir éloigné, et de revenir qu'une fois le travail terminé. Il annonce alors de suite le total des 10 cases. Le spectateur vérifie laborieusement, éventuellement avec une calculatrice. Le travail du magicien consiste simplement à jeter un œil au 7^e terme, qui se trouve être l'angle du L et donc facile à repérer, et à le multiplier de tête par 11 (par exemple en le multipliant par 10, et en ajoutant le nombre en question).

10			
16			
26			
42			
68			
110			
178	288	466	754

a			
b			
a+b			
a+2b			
2a+3b			
3a+5b			
5a+8b	8a+13b	13a+21b	21a+34b

Pour le L de gauche, on multiplie le coin 178 par 11 et on trouve 1958.

L'intérêt pédagogique de ce tour est qu'il montre l'utilité et la puissance du calcul littéral pour la justification de la réussite du magicien.

En appelant a puis b les 2 premiers termes, on calcule les autres cases, on fait la somme des 10 cases et on trouve 55a+88b. On compare avec le 7^{e} terme qui vaut 5a+8b et on vérifie que 11(5a+8b)=55a+88b.

Avant d'aborder d'autres propriétés beaucoup moins connues des suites de Fibonacci, expliquons ce qu'on appelle **la racine numérique d'un nombre**.

Pour trouver la « racine » d'un nombre, on enlève 9 autant de fois qu'on peut du nombre pour obtenir finalement un nombre allant de 1 à 9. La racine d'une puissance de 10 est toujours 1 car une puissance de 10 c'est le total d'un nombre qui s'écrit avec une série de 9, et du nombre 1. En conséquence, à partir de l'écriture d'un nombre N, on ajoute tous ses chiffres : si l'on trouve un nombre entre 1 et 9 (compris) c'est la racine numérique de N, mais si l'on obtient un résultat ayant au moins deux chiffres on ajoute les chiffres de l'écriture, et ainsi de suite jusqu'à obtenir un nombre entre 1 et 9.
Exemples : la racine numérique de 2012 est 2+0+1+2=5, celle de 975 est donnée par 9+7+5 = 21 puis par 2+1 = 3 et c'est donc 3.

Pour trouver la racine numérique d'un nombre on peut calculer le reste de la division par 9 du nombre, mais si c'est 0, on prend comme racine alors le nombre 9. En fait la notion de racine numérique d'un entier non multiple de 9 coïncide avec celle de reste de la division du nombre par 9, mais si le nombre est multiple de 9 la racine numérique du nombre est 9 alors que le reste de la division par 9 est 0.
Concrètement pour calculer la racine d'un nombre, plusieurs **astuces** permettent de gagner du temps, et même de ne pas calculer la somme de tous les chiffres de l'écriture du nombre…
- on peut éliminer facilement certains chiffres de l'écriture dont la somme est 9 (par exemple 4+5, ou 3+6, ou 2+7, ou 1+8).

Exemple : pour calculer la racine de 27 536, on peut remarquer que 2 + 7 = 9 et enlever ces deux chiffres ; de même 3 + 6 = 9 on enlève le 3 et le 6. Il ne reste que le 5, qui est donc la racine de 27 536.
- on ne tient pas compte des zéros et des 9 de l'écriture.

Exemple : la racine de 200109 est celle de 21 donc c'est 3.

Revenons aux suites de Fibonacci, dans lesquelles on va remplacer chaque nombre par sa racine numérique. Ayons le courage d'écrire, après les 2 premiers termes a et b, les 25 termes qui suivent, en enlevant de l'écriture tous les multiples de 9…

Numéro du terme	Valeur	Valeur simplifiée
1	a	a
2	b	b
3	a+b	a+b
4	a+2b	a+2b
5	2a+3b	2a+3b
6	3a+5b	3a+5b
7	5a+8b	5a+8b
8	8a+13b	8a+4b
9	13a+21b	4a+3b
10	21a+34b	3a+7b
11	34a+55b	7a+b
12	55a+89b	a+8b
13	89a+144b	8a
14	144a+233b	8b

15	233a+377b	8a+8b
16	377a+610b	8a+7b
17	610a+987b	7a+6b
18	987a+1597b	6a+4b
19	1597a+2584b	4a+b
20	2584a+4181b	a+5b
21	4181a+6765b	5a+6b
22	6765a+10946b	6a+2b
23	10946a+17711b	2a+8b
24	17711a+28657b	8a+b
25	28657a+46368b	a
26	46368a+75025b	b
27	75025a+121393b	a+b

Il y a beaucoup de remarques intéressantes à faire dans la colonne de droite…
1°) On voit s'amorcer un cycle périodique de 24 termes : les nombres n°1 et n°25 sont égaux (à a), de même le n°2 et le n°26 sont égaux (à b), puis le n°3 et le n°27 sont égaux à (a+b), etc
2°) Si on ajoute 24 termes consécutifs on trouvera toujours le même total. Par exemple celui de termes numéros 3 à 26 est le même que celui des termes n°1 à 24 ou n°2 à 25, ou encore n°4 à 27.
3°) Pour des numéros qui diffèrent de 12, si on ajoute les valeurs simplifiées on trouve toujours un multiple de 9 :

Numéros des termes ajoutés	1 et 13	2 et 14	3 et 15	4 et 16	5 et 17	6 et 18	7 et 19	8 et 20	9 et 21	10 et 22	11 et 23	12 et 24
Valeurs simplifiées ajoutées	9a	9b	9a+9b = 9(a+b)	9a+9b = 9(a+b)	9a+9b = 9(a+b)	9a+9b = 9(a+b)	9a+9b = 9(a+b)	9a+9b = 9(a+b)	9a+9b = 9(a+b)	9a+9b = 9(a+b)	9a+9b = 9(a+b)	9a+9b = 9(a+b)

Les valeurs « racines numériques » qui se trouvent à des numéros qui diffèrent de 12 se trouvent donc avoir pour somme soit 9 (selon 1+8, 2+7, 3+6 ou 4+5) soit 18 (deux fois 9).

Concrètement, avec des chiffres, si on envisage 9 valeurs possibles de a et 9 valeurs possibles de b pour démarrer une suite de Fibonacci où les nombres sont remplacés par leurs racines numériques, on peut étudier 9×9 = 81 cas différents. On peut se restreindre aux 12 premiers termes de la période, les 12 suivants se trouvant en prenant leurs compléments à 9 (par exemple pour 2 le complément est 7), ou en réécrivant la valeur 9 douze cases plus loin quand on tombe sur un 9.

Intéressons-nous au nombre de valeurs 9 qui figurent dans la succession des 12 termes. Il va y avoir quelques cas à distinguer selon le choix initial pour (a, b) dont nous donnons des exemples représentatifs…

a	3	3	3	3	3	3	3	3	3	6	6	6	9	9	9
b	1	2	3	4	5	6	7	8	9	3	6	9	3	6	9
a+b	4	5	6	7	8	9	1	2	3	9	3	6	3	6	9
a+2b	5	7	9	2	4	6	8	1	3	3	9	6	6	3	9
2a+3b	9	3	6	9	3	6	9	3	6	3	3	3	9	9	9
3a+5b	5	1	6	2	7	3	8	4	9	6	3	9	6	3	9
5a+8b	5	4	3	2	1	9	8	7	6	9	6	3	6	3	9
8a+4b	1	5	9	4	8	3	7	2	6	6	9	3	3	6	9
4a+3b	6	9	3	6	9	3	6	9	3	6	6	6	9	9	9
3a+7b	7	5	3	1	8	6	4	2	9	3	6	9	3	6	9
7a+b	4	5	6	7	8	9	1	2	3	9	3	6	3	6	9
a+8b	2	1	9	8	7	6	5	4	3	3	9	6	6	3	9

Les colonnes qui démarrent par (3, 3), (3, 6), (3, 9), (6, 3), (6, 6), (6, 9), (9, 3), (9, 6) contiennent trois fois la valeur 9 parmi douze valeurs. La colonne qui démarre par (9, 9) ne contient que des 9. Toutes les autres colonnes (il y en aurait 72 sur 81) contiennent une et une seule valeur 9.

Quel est le total de 24 cases consécutives, constituées de 12 paires de somme 9 ou 18 ?
- Cas le plus fréquent (72 fois sur 81) : il y a 11 paires de somme 9 et une paire de somme 18. Total : $11\times9 + 18 = 117$.
- 8 cas (sur 81) où il y a 3 paires de somme 18 et 9 paires de somme 9. Total : $9\times9 + 3\times18 = 135$.
- un cas où il y a 12 paires de sommes 18. Total 216.

Quels tours de magie peut-on inventer à partir de ces constatations ? En voici, inspirés de ce que Martin Gardner a imaginé dans « Apocalypse » (août 1978) à partir du travail de Stewart James en 1959, et de Howard Lyons en 1978…

Un premier tour :

Le magicien propose un carré de $5\times5 = 25$ cases. Le spectateur marque deux nombres entre 1 et 9 dans les deux cases de gauche de la première ligne, puis, en cachette du magicien, il remplit de proche en proche, ligne après ligne, les autres cases en appliquant les règles « un nombre est la somme des deux qui le précèdent » et « un nombre est remplacé pour simplifier par sa racine numérique ». Le magicien revient et donne instantanément le total des 25 cases. Le spectateur vérifie péniblement.

Le truc du magicien :

il regarde le premier nombre, et il sait que le 25^{e} sera identique… Si ce n'est ni un 3 ni un 6 ni un 9, il ajoute 117 (le total des 24 dernières cases formant un cycle) à ce premier nombre, pour donner le résultat. Si c'est un 3 ou un 6 ou un 9, il regarde si le deuxième nombre est encore un de ces nombres 3, 6, 9. Si non, il ajoute le premier nombre et 117 ; si oui il ajoute le premier nombre et 135, sauf dans le cas exceptionnel des deux 9 au départ, qui donne alors pour total 216 + 9 = 225 (soit 25 fois 9).

8	5	4	9	4		6	3	9	3	3
4	8	3	2	5		6	9	6	6	3
7	3	1	4	5		9	3	3	6	9
9	5	5	1	6		6	6	3	9	3
7	4	2	6	8		3	6	9	6	6

Exemples :
à gauche : 8+117 = 125 ; à droite : 6+135 = 141.
On peut rejouer, et si le premier nombre est différent d'une fois à l'autre le total à trouver sera différent, ce qui est appréciable pour le prestige du magicien...

Un deuxième tour :

Le magicien propose un rectangle de $9\times3 = 27$ cases. Le spectateur marque deux nombres entre 1 et 9 dans les deux cases de gauche de la première ligne, puis il a pour consigne, en cachette du magicien, de remplir de proche en proche, ligne après ligne, les autres cases en appliquant les règles « un nombre est la somme des deux qui le précèdent » et « un nombre est remplacé pour simplifier par sa racine numérique ». Mais avant de se retirer, le magicien place sous la dernière case en bas à droite une carte, face cachée, et écrit une prédiction sur un bout de papier qu'il plie et laisse sur la table…

Quand le spectateur a fait son travail le magicien revient, il retourne la carte : sa valeur correspond avec celle de la dernière case en bas à droite !

Encore plus fort : le magicien demande au spectateur d'ajouter les 27 valeurs, il déplie le papier de sa prédiction et on constate que c'est le bon total !

Le truc de magicien :
- la 3^{e} et la 27^{e} cases donnent le même résultat (à cause du cycle de 24 numéros), à savoir la racine numérique du total des deux premiers nombres ; le magicien choisit parmi des cartes valant de 1 à 9 qu'il a en poche celle qui correspond à cette dernière case.
- le total des 27 cases est celui des 3 premières et de 117 (le plus souvent) ou de 135 (si les deux premiers nombres sont des multiples de 3), ou alors il y a 27 fois 9 soit 243.

6	7	4						
								4

Exemple : total des 27 cases : 6+7+4+117 = 134.

Un troisième tour :

Le magicien arrive avec un grand stock de cartes marquées d'une valeur variant de 1 à 9, qui sera à disposition du spectateur chargé de remplir un tableau de $8\times3 = 24$ cases (chacune de la taille d'une carte). Le spectateur place 2 cartes en haut à gauche du tableau puis, là encore, va compléter de proche en proche les autres cases. Il a pour consigne d'appliquer les règles « un nombre est la somme des deux qui le précèdent » et « un nombre est remplacé pour simplifier par sa racine numérique ». Le magicien peut être loin de la table et ne jamais voir les cartes, même les deux premières. D'ailleurs quand le spectateur a fini de remplir le tableau, il reçoit pour consigne de retourner faces cachées toutes les cartes. Le magicien revient alors. Il déclare qu'il a le pouvoir de lire à travers les cartes et de réunir celles dont le total est 9. Il demande à un spectateur de retourner une carte, et alors le magicien en tourne une autre : leur total fait 9 (après un 7, il retourne un 2, etc.). Ce manège peut être recommencé plusieurs fois, le magicien trouve toujours où est le complément à 9 du nombre du spectateur. Dans le cas particulier où le spectateur retourne un 9, le magicien déclare qu'il n'y a pas de carte valant 0 et donc qu'il trouvera exceptionnellement un autre 9 dans le tableau.

Le truc du magicien :
il suffit de retourner la carte située 12 cases plus loin que celle du spectateur.

			7				
	9						2
					9		

Exemples :
12 cartes après le 7 c'est un 2, et 7+2 = 9 ; 12 cartes après le 9 c'est encore un 9.
(Tenir compte de toutes les cases, même si les cartes sont enlevées dans le déroulement du tour)
Evidemment pour tous ces tours le magicien doit avoir un public qui ne s'enfuie pas comme un lapin devant les chiffres, qui ne soit pas trop pressé, et qui accepte de faire quelques opérations… Cela doit pouvoir se trouver, et permettre de passer de bons moments…

6. Le miroir et la peinture. Le poète et son double. Le mathématicien et le magicien.

Le miroir occupe une position stratégique parmi les moyens de se connaître, de s'objectiver, de se regarder comme objet. Il permet de poser, en face de soi-même, un autre soi-même et de se regarder dedans. Je me connais alors en me projetant comme un autre. Mais quel piège! Il y a là deux personnes face à face. Sont-elles vraies?

"Dans cet affrontement avec le miroir, il y a à la fois dualité, dédoublement et unité, identité. C'est le même qui est deux", du moins dans la ressemblance extérieure.

Pour les anciens gnostiques, Adam aurait perdu sa nature céleste parce qu'il était tombé amoureux de sa propre image. Le parallèle entre Adam et Narcisse est de ce point de vue saisissant.

En 1435 apparaît la notion de Miroir comme « Emblème de la peinture ». En effet, Leon Battista Alberti dans son *De Pictura*, fait de Narcisse l'inventeur de la peinture. « C'est pourquoi j'ai l'habitude de dire à mes amis que l'inventeur de la peinture, selon la formule des poètes, a dû être ce Narcisse qui fut changé en fleur, car s'il est vrai que la peinture est la fleur de tous les Arts, alors la fable de Narcisse convient parfaitement à la peinture. Elle est autre chose que l'art d'embrasser ainsi la surface de l'eau ». C'est ainsi, par le reflet dans l'eau clair de Narcisse, que le Miroir devient, selon Alberti, l'emblème de la peinture. Alberti voit donc la peinture comme une fenêtre ouverte sur l'histoire, qui donne à voir la réalité.

Voici un extrait de mon livre : « 60 tours magiques de mathématiques et de logique »

Take five (*) : de l'autre côté du miroir…

(*) Allusion au titre d'un morceau de jazz de Dave Brubeck, incitant à attraper le bon rythme. Encouragement au lecteur pour entrer dans la pensée de l'auteur lors de ce chapitre…

C'est la dernière partie du livre, le mathémagicien vient d'écouter le lied « Der Doppelgänger » de Schubert, transcrit par Liszt et joué par Vladimir Sofronitsky, pianiste halluciné… Il ne peut s'empêcher ni une certaine nostalgie, ni un regard en arrière…

Même si le souci de divertir et de satisfaire un public a toujours été présent, il ne s'agit pas ici de conclure un spectacle par un bis brillant, mais d'achever un livre, écrit dans un certain état d'esprit, pour lequel l'auteur espère que le lecteur a ressenti une certaine empathie.

Voici donc un petit temps suspendu pour des confidences…

Vous avez sans doute lu « la nuit de décembre » d'Alfred de Musset, je voudrais en reproduire plusieurs vers :

LE POETE

…
Comme j'allais avoir quinze ans
Je marchais un jour, à pas lents,
Dans un bois, sur une bruyère.
Au pied d'un arbre vint s'asseoir
Un jeune homme vêtu de noir,
Qui me ressemblait comme un frère.

Je lui demandai mon chemin ,
Il tenait un luth d'une main,
De l'autre un bouquet d'églantine.
Il me fit un salut d'ami,
Et, se détournant à demi,
Me montra du doigt la colline.
…

Partout où j'ai touché la terre,
Sur ma route est venu s'asseoir
Un malheureux vêtu de noir,
Qui me ressemblait comme un frère.

Qui donc es-tu, toi que dans cette vie
Je vois toujours sur mon chemin ?
Je ne puis croire, à ta mélancolie,
Que tu sois mon mauvais Destin.
Ton doux sourire a trop de patience,
Tes larmes ont trop de pitié.
En te voyant, j'aime la Providence.
Ta douleur même est sœur de ma souffrance ;
Elle ressemble à l'Amitié.
…
Qui donc es-tu ? - Tu n'es pas mon bon ange,
Jamais tu ne viens m'avertir.
Tu vois mes maux (c'est une chose étrange !)
Et tu me regardes souffrir.
Depuis vingt ans tu marches dans ma voie,
Et je ne saurais t'appeler.
Qui donc es-tu, si c'est Dieu qui t'envoie ?
Tu me souris sans partager ma joie,
Tu me plains sans me consoler !
…
Sur mon rideau j'ai vu passer une ombre ;
Elle vient s'asseoir sur mon lit.
Qui donc es-tu, morne et pâle visage,
Sombre portrait vêtu de noir ?
Que me veux-tu, triste oiseau de passage ?
Est-ce un vain rêve ? Est-ce ma propre image
Que j'aperçois dans ce miroir ?

Qui donc es-tu, spectre de ma jeunesse,
Pèlerin que rien n'a lassé ?
Dis-moi pourquoi je te trouve sans cesse
Assis dans l'ombre où j'ai passé.
Qui donc es-tu, visiteur solitaire,
Hôte assidu de mes douleurs ?
Qu'as-tu donc fait pour me suivre sur terre ?
Qui donc es-tu, qui donc es-tu, mon frère,
Qui n'apparais qu'au jour des pleurs ?
…

LA VISION

- Ami, notre père est le tien.
Je ne suis ni l'ange gardien,
Ni le mauvais destin des hommes.
Ceux que j'aime, je ne sais pas
De quel côté s'en vont leurs pas
Sur ce peu de fange où nous sommes.

Je ne suis ni dieu ni démon,
Et tu m'as nommé par mon nom

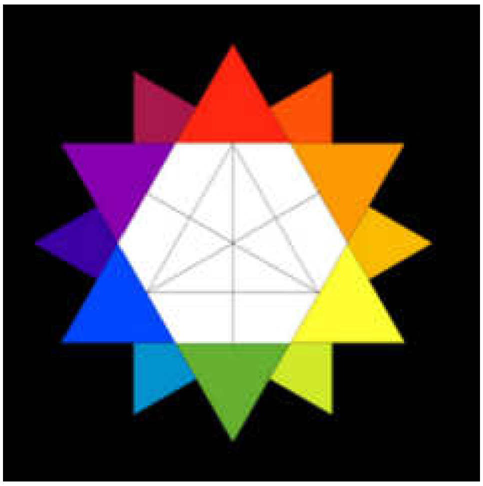
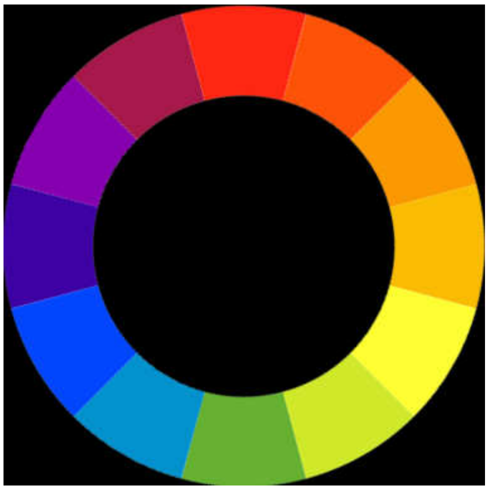
Quand tu m'as appelé ton frère ;
Où tu vas, j'y serai toujours,
Jusques au dernier de tes jours,
Où j'irai m'asseoir sur ta pierre.

Le ciel m'a confié ton cœur.
Quand tu seras dans la douleur,
Viens à moi sans inquiétude.
Je te suivrai sur le chemin ;
Mais je ne puis toucher ta main,
Ami, je suis la Solitude.

Voilà : après le double visage de magicien et de mathématicien, après la réflexion du miroir, au sens double de symétrie et de pensée introvertie, je vais maintenant vous en faire voir de toutes les couleurs ! A un humain qui cherche son double, ou sa moitié, son âme sœur, je vais associer l'aspiration d'une couleur à trouver sa couleur complémentaire.

Sur le cercle chromatique, dans le domaine de la peinture (et non dans des notions de synthèses additive ou soustractive) on peut représenter :

- les couleurs primaires (ce sont le rouge, le bleu et le jaune )
- les couleurs secondaires (ce sont l'orange, le vert et le violet )
- et des couleurs tertiaires (ce sont le rouge orangé, le jaune orangé, le jaune-vert, le bleu-vert, le bleu violacé et le rouge violacé) ,

On appelle couleurs complémentaires des couleurs qui occupent des positions diamétralement opposées sur ce cercle chromatique. Nous allons mettre en scène un tour avec 10 cartons, dont 8 colorés formé de 4 paires de couleurs complémentaires : rouge/vert, bleu/orangé, jaune/violet, et jaune-vert/rouge-violacé .

Vous trouverez plus loin les 10 cartes utiles, à photocopier en couleurs ou découper.

Tour : « J'ai perdu mon Eurydice »

Préparation

Le magicien dispose les 8 cartes colorées de façon que les couleurs complémentaires soient en position miroir. Il prépare aussi deux cartes supplémentaires : l'une consacrée au

Saint patron des peintres Fra Angelico (*), et l’autre à Martin Gardner(**), grand vulgarisateur des mathématiques magiques et ludiques.

(*) En 1984, le Pape Jean-Paul II décida de béatifier FRA ANGELICO et d'en faire le Saint Patron des peintres. Il n’y a pas de muse de la peinture.
Fra Angelico *(Guido di Pietro, dit parfois le peintre des Anges) : 1387 –1455 est un peintre du Quattrocento italien, qui a cherché à associer les principes picturaux de la Renaissance — constructions en perspective et représentation de la figure humaine — avec les vieilles valeurs médiévales de l'art : sa fonction didactique et la valeur mystique de la lumière.*

(**) ***Martin Gardner*** *(1914 - 2010) a popularisé le domaine des mathématiques récréatives dans la revue « Scientific American » et sa traduction française « Pour la Science ». Un de ses livres, qui a pour titre « Mathématiques, magie et mystère », a été la source de beaucoup de vocations de matheux…*

Déroulement

Le magicien montre les 8 cartes et explique ce que sont les couleurs complémentaires. Il les laisse rangées en miroir (comme il les a préparées), puis il fait distribuer par un spectateur les cartes, faces colorées cachées, une à une, alternativement en deux tas. Le spectateur pose un tas de son choix sur l’autre et peut recommencer plusieurs fois le processus distribution/regroupement. Le magicien arrête au bout d’un certain temps quand deux piles sont formées, et fait choisir la carte supérieure de l’une des deux piles à un spectateur : cette carte n’est pas retournée, elle est mise de côté sur la table. L’autre pile (de 4 cartes) est mise par-dessus la pile de 3 cartes. Le magicien déclare que le but du tour est de retrouver la carte de couleur complémentaire : il dit que sa carte choisie est malheureuse comme Orphée l’était, qui avait perdu son Eurydice, et qu’il faut réparer ce malheur.

Pour l’aider le magicien appelle à son secours le grand mathémagicien Martin Gardner et le Saint patron des peintres. Les deux cartes les représentant sont mises l’une au-dessus et l’autre sous le paquet, prenant en sandwich les 7 cartes, mais avec leurs faces visibles, alors qu’on voit les dos des 7 autres cartes.

Le magicien invite le spectateur à faire une distribution dessous/dessus du paquet de 9 cartes, c’est à dire à prendre la carte supérieure du paquet, à la faire passer en dessous, puis à jeter sur la table la carte suivante. Ensuite, la carte supérieure du paquet en main est passée en dessous, et la suivante mise sur la table sur la première carte. On continue ainsi jusqu’à ce que la pile de 9 cartes soit sur la table, le spectateur n’ayant plus de cartes en main. On étale en ruban les 9 cartes, on observe que les deux cartes de faces visibles encadrent une seule carte : on s’en saisit, on la rapproche de la carte mise de côté, on les retourne : ce sont deux cartes de couleurs complémentaires.

Le magicien enlève les deux cartes non colorées, et dit qu’il va essayer avec les 6 cartes qui restent de poursuivre dans l’harmonie de la réunion des complémentaires.
Il saisit les deux cartes du dessus, les retourne : elles sont complémentaires.
Il saisit les deux cartes extrêmes du paquet de 4 cartes : elles sont complémentaires.
Il reste deux dernières cartes complémentaires.

Tout est bien qui finit bien !

Explication

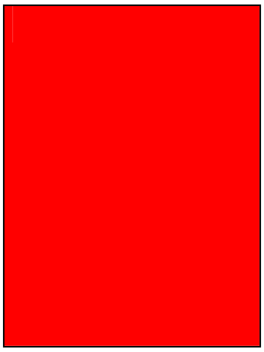
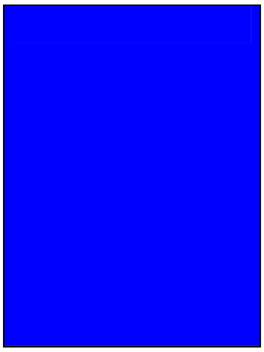
Notons à chaque fois par la même lettre les deux cartes associées complémentaires. Le jeu de 8 cartes est présenté en miroir, puis distribué en deux piles classées en ordre inverse que je note (du bas vers le haut de la pile) abcd et dcba. Le spectateur prélève une carte supérieure, mettons dans la première pile, donc soit d cette carte, puis il met l’autre pile par-dessus, et on obtient le paquet de 7 cartes abcdcba.

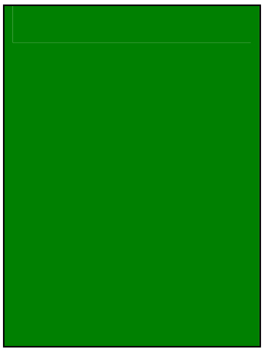
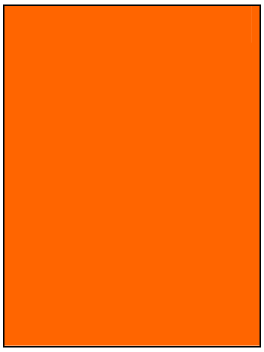
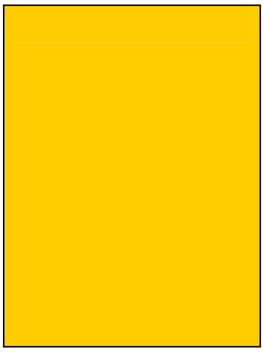
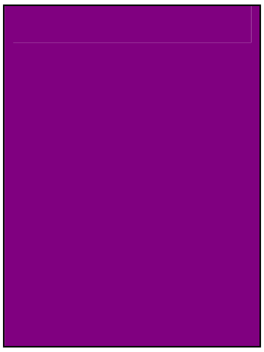
Notons deux fois J (comme Joker) les deux cartes qu'on ajoute alors et qui prennent le jeu en sandwich : il devient JabcdcbaJ. Le tableau ci-dessous montre l'évolution des 9 cartes par la tactique « on passe une carte en dessous puis on jette la suivante sur la table ».

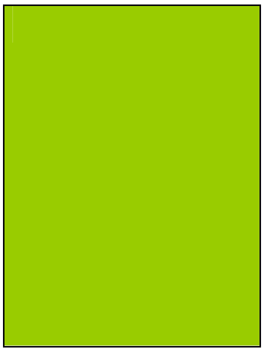
Main	Table	M	T	M	T	M	T	M	T	M	T	M	T	M	T	M	T
J																	b
a		b															b
b		c		d											J		J
c		d		c		b							d		d		d
d		c		b		a		J			J		J		J		J
c		b		a		J		J	a	b	a		a		a		a
b		a		J		J	c	b	c	d	c	b	c		c		c
a		J		J	c	b	c	d	c	b	c	J	c	b	c		c
J	-	J	a	b	a	d	a	b	a	J	a	b	a	b	a	-	a

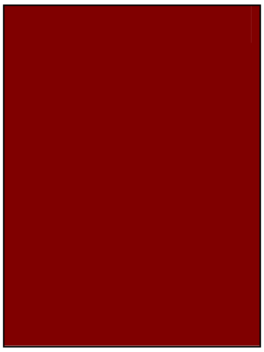
On constate qu'à la fin, entre les deux lettres J, il y a la lettre d de même nature que la carte d prélevée au début du tour.
Si l'on enlève les trois cartes JdJ il reste bbacca. En prélevant les deux cartes supérieures ensemble on a une paire de cartes associées bb. Il reste acca. En prélevant les cartes extrêmes on forme la paire aa, et il reste la paire cc.

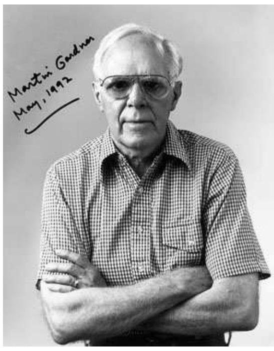
« J'ai perdu mon Eurydice » : les 10 cartes à utiliser



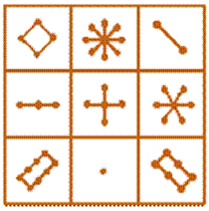



Martin Gardner
May, 1992

7. Carrés magiques…

Les carrés magiques ont une longue histoire. Toute une mythologie s'est développée autour des carrés magiques.

Le carré ci-dessous, selon une légende chinoise, aurait été révélé, à l'empereur Yü sur le dos d'une tortue au XXIII^{e} siècle avant J.-C. (- 2200).



4	9	2
3	5	7
8	1	6

La somme des trois nombres de chaque ligne, chaque colonne, chaque diagonale est 15 (mais la somme des coins est 20).

Au Moyen Age, en Chine, on trouvait des carrés magiques gravés sur des ustensiles divers. La croyance dans les vertus magiques de ces carrés s'est répandue dans les pays voisins de la Chine.

Antiquité

Les Babyloniens ont utilisé les carrés magiques.

On retrouve les carrés magiques chez les arabes au neuvième siècle, avec les mêmes connotations magiques et numérologiques.

Les Égyptiens utilisaient les carrés magiques comme moyen de s'imposer aux ignorants et crédules.

Le mathématicien égyptien Ibn al-Haytham (XI^{e}) développe des méthodes pour les construire.

Les Pythagoriciens (l'école de Pythagore) étudient aussi les carrés :

- magique d'ordre 2, qui n'existe pas est symbole de chaos;
- Ordre 3: dédié au soleil;
- Ordre 4: à la lune;
- Ordre 5: aux étoiles;
- Ces carrés étaient positionnés dans des figures géométriques, polygones du même ordre et cercles, complétés des signes du Zodiaque.

Installation en Occident

À la Renaissance, Cornelius Agrippa (1486-1535) travaille sur les carrés magiques: Il donne une signification astronomique aux carrés d'ordre 3 à 9: Saturne, Jupiter, Mars, Soleil, Vénus, Mercure, et Lune.

De la symbolique grecque, il ne conserve que 4 éléments: feu, eau, air et terre.

Vers 1450, Luca Pacioli (italien) étudie les carrés magiques.

Des reproductions de carrés magiques, gravées sur du bois ou autre, servent de porte-bonheur. En particulier, gravés sur une plaque d'argent, ils sont censés protéger de la peste.

Chez les Rose-Croix, ils servent à masquer le chiffre de la Bête (666) dans le carré magique de 6 x 6 = 36 cases (somme = 111).

Gaffarel, célèbre cabaliste français et bibliothécaire de Richelieu, a porté l'étude de ce jeu d'esprit au niveau d'une science complète.

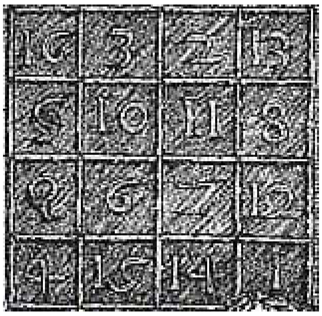
Ci-dessus la gravure d'Albrecht Dürer, exécutée sur cuivre au début du XVIè siècle est intitulée "la mélancolie". Elle porte en exergue un petit carré magique d'ordre 4, image destinée à renforcer le concept de magie ou de culture magique du tableau.

On y retrouve des symétries et le nombre 1514, date de réalisation de la gravure.

Les sommes des lignes, des colonnes et des diagonales sont égales à 34.

Cette somme est aussi celle des quatre cases du carré central : 10 + 11 + 6 + 7 = 34.

C'est aussi celle des cases en coin : 16 + 13 + 4 + 1 = 34.



En 1693, les 880 carrés magiques d'ordre 4 ont été publiés à titre posthume dans le texte *Des Quarrez ou tables magiques* de Bernard Frénicle de Bessy.

La première étude concernant ces carrés semble dater du quatorzième siècle. Elle vient du moine grec Moscopule ou Moschopulos Manuel qui publia un traité sur les carrés magiques. La Hire en 1691, à l'Académie des Sciences, lut et traduisit cette recherche.

Maintenant, un tour… « Carré magique anniversaire »

J'ai déjà décrit diverses façons de fabriquer un carré magique dont la somme, supérieure ou égale à 34, est proposée par un spectateur (voir « 80 petites expériences de maths magiques », éd. Dunod, ou « 32 tours de maths pour 32 cartes », éd. ACL Kangourou). A chaque fois je faisais d'abord travailler le spectateur, qui devait fabriquer un tableau carré de 16 cases genre Sudoku avec 4 valets, 4 dames, 4 rois et 4 as respectant la règle « sur chaque ligne et sur chaque colonne il ne doit y avoir qu'une carte de chaque famille (pique, cœur, carreau, trèfle) et qu'une carte de chaque valeur (valet, dame, roi, as). A partir du tableau formé par le spectateur, et sans voir celui-ci, je donnais les instructions pour écrire sous les 16 cartes les 16 valeurs formant un carré magique de la somme voulue.

Je rappelle ci-dessous une tactique valable parmi d'autres …

Si « n » est la somme voulue, supérieure ou égale à 34, on calcule (n-34), puis on divise ce nombre par 4 on obtient un quotient q, et un reste entier r (inférieur strictement à 4).

- On attribue pour les carreaux les valeurs (1+q) au valet, (2+q) à la dame, (3+q) au roi et (4+q) à l'as ;

- On attribue pour les trèfles les valeurs (5+q) au valet, (6+q) à la dame, (7+q) au roi, (8+q) à l'as ;

- On attribue pour les coeurs les valeurs (9+q) au valet, (10+q) à la dame, (11+q) au roi, (12+q) à l'as ;

- On attribue pour les piques les valeurs (13+q+r) au valet, (14+q+r) à la dame, (15+q+r) au roi, (16+q+r) à l'as.

Le tour est très beau et spectaculaire, mais un peu long, surtout si le spectateur n'est pas très porté à la logique et a du mal à réaliser seul le tableau de 16 cartes respectant les consignes.

Le magicien peut aller plus vite, sans passer par le tableau de 16 cartes et le martyr du spectateur, pour constituer un carré magique ayant pour somme par exemple l'âge d'une personne ayant au moins 34 ans. Voici comment …

En se basant sur la construction du tableau Sudoku de cartes à partir de ses 4 cases centrales, le magicien peut repérer un ordre de remplissage des cases comme ci-dessous , dans l'ordre alphabétique a, puis b, c, d, e, etc. Retenir la tactique pour une dizaine ou une douzaine de cases, cela suffit , car les nombres à mettre dans les dernières cases se trouvent facilement à partir de la somme magique « n » voulue.

j	l		f
	a	b	
e	d	c	h
k	i	g	

Avec un peu d'habitude les cases h, k, l ne sont pas à apprendre, mais elles peuvent faire gagner du temps si on se rappelle comment les remplir. Les 4 cases blanches ci-dessus se calculent en complément de trois cases d'une ligne ou d'une colonne pour atteindre la somme n.

Voici les valeurs utiles à mettre dans les cases au départ…

Case	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	l
Valeur	1+q	6+q	11+q	16+q+r	2+q	3+q	4+q	5+q	7+q	8+q	9+q	10+q

La valeur « a » est à trouver d'abord. Pour les cases abcd, la succession se fait de 5 en 5 sauf pour « d » où il faut ajouter en plus « r ». Pour les cases efgh on reprend de 1 en 1 à partir de « a ». Pour « i » il faut un saut de 2 à partir de « h » car un saut de 1 redonnerait la valeur b. Les cases ijkl se suivent de 1 en 1.

- **Voici un exemple pas à pas pour fêter l'anniversaire de Papy qui a 79 ans.**

On calcule 79-34 = 45, puis 45 = 4x11+1 donc q=11 et r=1.
La valeur inférieure du carré est 1+q=1+11 = 12, c'est la case « a ».
Puis b=12+5 = 17, c= 17+5 = 22, et comme r=1 on obtient d = 22+5+1 = 28.
Après « a =12 », les cases e, f, g, h valent 13, 14, 15, 16.
Ensuite un saut de 2 puis des valeurs de 1 en 1 qui sont i = 18, j=19, k=20, l=21.

19	21		14
	12	17	
13	28	22	16
20	18	15	

On termine…
Première colonne la case vide vaut 79-19-13-20 = 27.
Troisième colonne la case vide vaut 79-17-22-15 = 25.
Deuxième ligne la case à droite vaut 79-27-12-17 = 23 ;
Dernière case en bas à droite : 79-20-18-15 = 26.

Voici le résultat, carré de somme magique 79 :

19	21	25	14
27	12	17	23
13	28	22	16
20	18	15	26

On peut remarquer qu'en plus de la somme 79 pour chaque ligne et chaque colonne, c'est aussi :

- La somme des quatre cases centrales 12+17+22+28 =79
- La somme des quatre coins : 19+14+20+26 = 79
- La somme sur chaque grande diagonale 19+12+22+26 = 79 et 20+28+17+14 = 79
- La somme des deux cases du milieu de chaque côté avec celles du côté opposé (27+13)+(23+16) = 79 ; (21+25)+(18+15) = 79.
- La somme de chaque quart de carré : en haut à gauche 19+21+12+27 = 79 ; en haut à droite 25+14+17+23 = 79 ; en bas à gauche 13+28+20+18 = 79 ; en bas à droite 22+16+15+28 = 79.
- La somme de deux fois deux demi-diagonales opposées (27+21)+(15+16)= 79 ; et (13+18)+(25+23) = 79.

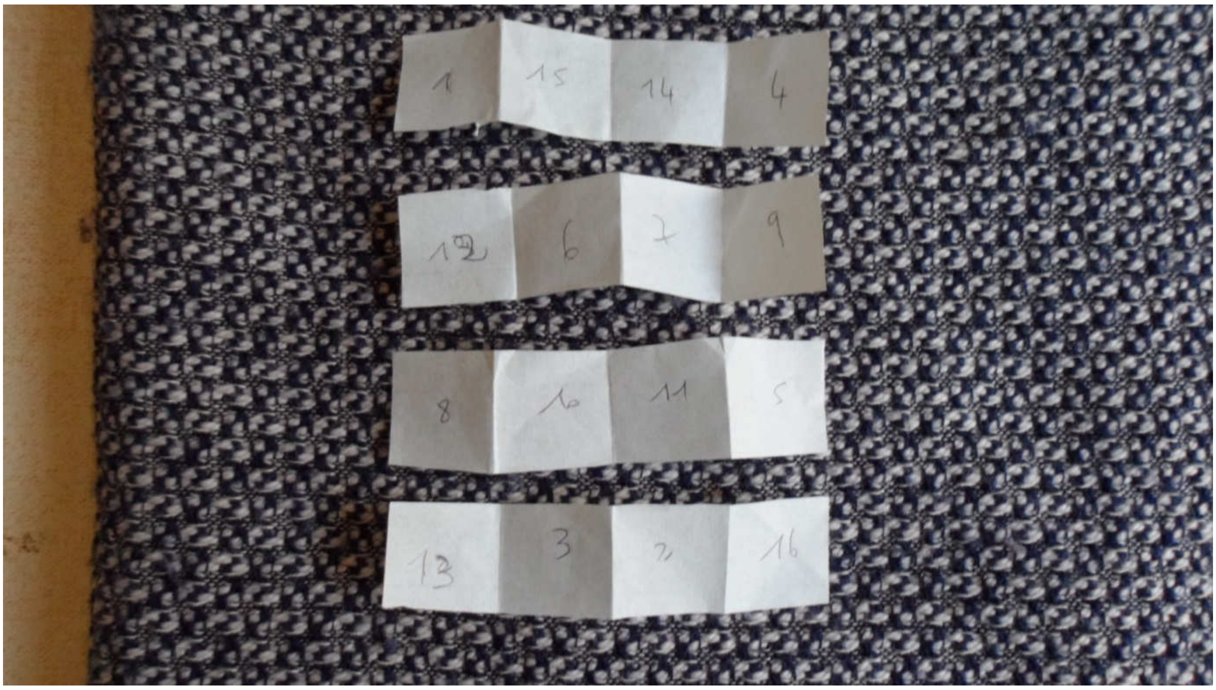
Une fin de carré magique qui déchire !

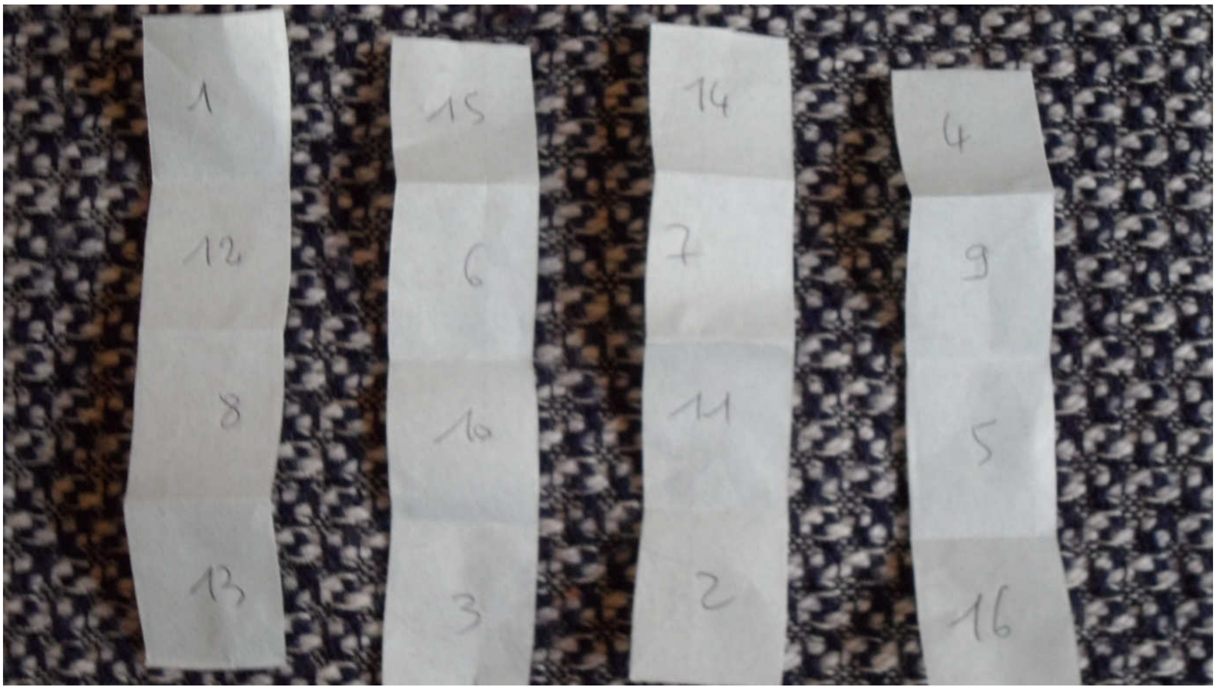
On peut faire une expérience avec un carré de 4x4 = 16 cases. On le plie en plusieurs étapes, selon les séparations horizontales et verticales des cases, pliées dans l'ordre qu'on veut, jusqu'à obtenir une pile des 16 cases superposées, dont la base a la taille d'une case. On rogne grâce à des ciseaux deux bords opposés (mais pas les deux autres bords): on obtient quatre bandes de papier qui peuvent être soit les colonnes du carré soit les lignes, et dont les pliures peuvent être, de façons variées, en vallée ou en montagne selon les cas.

Exemple, à partir du célèbre carré magique de somme 34 suivant :

1	15	14	4
12	6	7	9
8	10	11	5
13	3	2	16

Vous pouvez obtenir selon vos pliages, après rognage de deux bords opposés de la pile, les quatre lignes ou quatre colonnes des figures suivantes… Comme chaque ligne ou chaque colonne du carré magique a la même somme, chacune des quatre bandes présentera quatre nombres dont l'addition donnera la somme magique (dans cet exemple : 34).





Si on revient au carré magique précédent, celui fêtant un anniversaire, le magicien peut prolonger le tour, après avoir écrit et expliqué au spectateur le carré magique obtenu.

Il fait plier son carré magique par le spectateur, puis rogner deux bords opposés de la pile de seize cases, et celui-ci trouve quatre bandes de papier portant chacune quatre nombres dont l’addition donnera son âge : bon anniversaire !

8. Quand un magicien réussit la quadrature du cercle…

Pour Monsieur Tout-le-Monde réussir la quadrature du cercle c'est impossible.
Mais de quoi s'agit-il pour un matheux ?
La quadrature du cercle consiste à construire à la règle et au compas en un nombre fini d'étapes, un carré de même surface qu'un cercle donné. En posant que le rayon du cercle est 1 ceci revient à construire un segment de longueur la racine carrée de pi.

Pour les anciens grecs, dans le monde des idées de Pythagore, le cercle était associé au « un », la divinité, et la droite à la rectitude morale, d'où l'exigence pour des constructions de grandeurs d'utiliser exclusivement la règle et le compas. Or il existe des nombres non constructibles à la règle et au compas, comme le nombre pi qui est le rapport de l'aire d'un cercle au carré construit sur l'un de ses rayons. Les nombres constructibles sont tous algébriques c'est-à-dire solutions d'équations à coefficients entiers. Les premiers nombres non algébriques c'est-à-dire transcendants ont été découverts en 1844 par Liouville, puis Hermite en 1873 a montré la transcendance du nombre d'Euler, et en 1882 Ferdinand von Lindemann a démontré que pi est transcendant donc non constructible, ce qui implique que la quadrature du cercle est impossible.

Notons qu'il est possible de réaliser soit de manière approchée soit en utilisant d'autres moyens que la règle et le compas, la quadrature du cercle. C'est le cas, mécaniquement, de la construction qu'a réussie Dinostrate à l'aide de sa quadratrice (voir Tangente Hors série n° 49 pages 16 à 19).

Voici une récréation de magicien voulant prouver ses pouvoirs supranormaux par la réussite de la quadrature du cercle… Trouverez-vous la supercherie ?

Déroulement

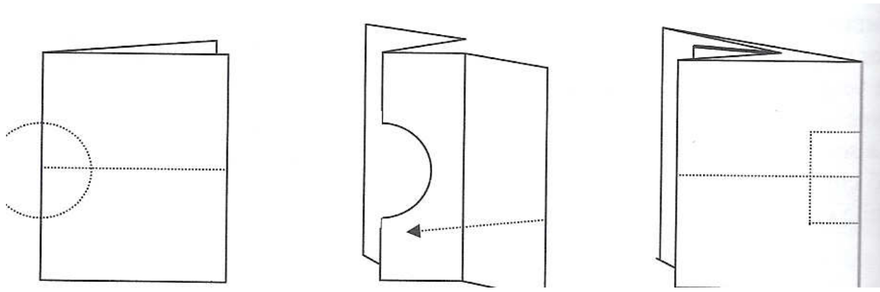
Le magicien prend une feuille de papier journal, et découpe dedans un carré. Il chiffonne ce carré en expliquant le problème de la quadrature du cercle. Le carré chiffonné est déplié : il est devenu un disque de papier. Le magicien s'étonne, reprend le journal où a été découpé le carré, le tient à demi plié par ses deux extrémités, l'amène devant son visage et ouvre brusquement les deux feuilles. On voit apparaître instantanément un trou en forme de cercle à la place de celui qui était carré, et l'on voit le visage du magicien à travers ce trou.

Préparation du journal

Une double page est pliée en deux ; au milieu de la hauteur de la pliure on place la pointe d'un compas écarté à 7,5 cm de rayon et on trace un demi-cercle. On découpe le demi-disque en double épaisseur, on le plie en deux, puis en quatre, puis on le met de côté. Si on déplie ce qui reste de la double page on obtient un trou en forme de disque de 15 cm de diamètre.

Il faut maintenant rabattre les bords externes des deux pages vers la pliure de façon que les bords débordent d'environ 2 cm de la pliure, ce qui dissimule la partie échancrée située à l'intérieur. Cet objet a une allure d'accordéon.

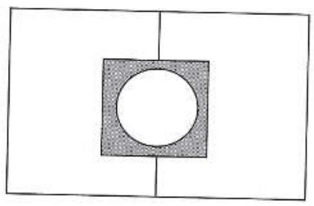
Maintenant prenons une autre feuille double de journal, ouvrons-la à plat. Il faut coller le disque plié et découpé, en encollant seulement une partie du quart de disque près du centre de cette double feuille. Celle-ci doit alors être repliée sans être gênée par le disque ainsi collé. Placez l'accordéon à l'intérieur, et collez ses bords externes en coïncidence avec les bords internes de la seconde feuille de journal. Quand la colle est sèche, repliez les deux feuilles l'une dans l'autre.



Dessinez sur la double feuille extérieure près de la pliure un rectangle centré au milieu de la hauteur, et de 18 cm sur 9 cm. Quand il sera déplié il donnera un carré dont les côtés seront plus grands que le diamètre du disque.

Manipulations pendant le tour

- quand vous découpez ce qui donnera le carré, attention à ne pas endommager le disque collé derrière
- vous montrez le carré face au public. Avec une main vous le chiffonnez tandis que l'autre main, en arrière, déplie le disque ; vous retournez l'objet alors vers le public, qui verra le disque mais pas le carré caché derrière. Vous empochez le tout avant l'arrivée de petits curieux, puis vous prenez le journal découpé truqué.
- Présentez l'ouverture verticalement face au public, en tenant de chaque main un bord extérieur de la double feuille. Montez son centre au niveau du visage et dépliez vivement. La feuille intérieure se déplie et le cercle de diamètre inférieur au côté du carré devient visible pour le public tout en cachant le carré qui se trouve derrière. Vous regardez le public à travers le disque, il vous regarde et voit moins le carré caché autour du trou et derrière la feuille.
-



Contact : dominique.souder@gmail.com

Bibliographie de Dominique SOUDER, restreinte aux ouvrages de magie mathématique :

- « Magie et maths » par Dominique Souder, ACL éditions du Kangourou ; 64 pages ; 9,60 euros (paru en 2001)
- « 32 tours mathématiques pour 32 cartes », par Dominique Souder, ACL éditions du Kangourou ; 64 pages ; 8,50 euros (paru en avril 2008)
- « 80 petites expériences de maths magiques » par D. Souder, éd. Dunod, 232 pages, 16 euros, (paru en mai 2008, nominé Prix Tangente)) ;
  traduction en chinois langage simplifié parue en 2010, en turc parue en 2013.
- « Magic Matthieu compte en moins de 2 », par Dominique et Pascalyves SOUDER, éd. Belin ; 13,50€ (mai 2010) ; traduction en coréen parue en 2011.
- « Magic Matthieu multiplie les nouveaux mystères »
  par Dominique et Pascalyves SOUDER, éd. Belin ; 13,50€ (septembre 2010) ; nominé prix Tangente 2012.
- « 60 tours magiques de mathématiques et de logique », éd. Ellipses ; D. Souder ; 216 pages ; 16,30€ (mai 2012), nominé prix Tangente 2013.