LES PLANTES FONT-ELLES DES MATHÉMATIQUES ?

Anne-Marie AEBISCHER - Françoise de LABACHELERIE
IREM de FRANCHE-COMTÉ

L'observation attentive de certaines plantes, comme un cactus, une pomme de pin, un ananas, un cœur de tournesol, un chou romanesco, un cœur d'artichaut, permet de déceler une organisation des écailles, des graines, ... en spirales. Étonnament, le nombre de ces spirales est toujours un terme de la suite de Fibonacci : $\ldots, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, \ldots$ Ce thème concernant la phyllotaxie des plantes peut donner lieu à des ateliers mathématiques à différents niveaux.

On peut se contenter de la simple observation du phénomène avec présentation du modèle de croissance de la plante et de la suite de Fibonacci. Mais on peut aussi, à partir de la modélisation, envisager des expérimentations ou simulations qui conduisent à affiner peu à peu le modèle, pour au final aboutir à une bonne adéquation entre le modèle proposé et la réalité observée. Ce deuxième « scénario » amènent les élèves à effectuer des calculs sur les fractions d'entiers, et peut s'envisager dès la classe de quatrième.

Table des matières

I - La croissance des plantes

A - Observation de spirales sur des plantes

En observant une pomme de pin, on remarque que les écailles semblent organisées selon des spirales. Certaines spirales sont orientées vers la droite, d'autres vers la gauche. Sur une première pomme de pin, on peut compter 8 spirales orientées vers la droite, et 13 spirales orientées vers la gauche. Sur une deuxième pomme de pin, d'une espèce différente, on peut également observer des spirales, au nombre de 8 vers la droite, et de 5 vers la gauche.

Observons ensuite un ananas : encore une fois des spirales apparaissent : 8 spirales orientées d'un côté, 13 spirales orientées de l'autre côté.

Regardons maintenant des photos de tournesols : les fleurons semblent aussi s'organiser selon des spirales. En comptant le nombre de spirales, celles orientées dans un sens, puis celles orientées dans l'autre sens, on en trouve, selon les tournesols, 21 et 34, ou bien 34 et 55, ou encore 55 et 89.

Regardons de plus près les nombres trouvés en comptant les spirales, aussi bien des pommes de pin que des ananas et des tournesols, en les rangeant par ordre croissant : **5 ; 8 ; 13 ; 21 ; 34 ; 55 ; 89**
Ces nombres forment une suite telle que chaque terme est la somme des deux précédents.

Cette suite est célèbre ! Elle est connue sous le nom de « **suite de Fibonacci** ». Fibonacci, ou encore Léonard de Pise, c'est le nom d'un mathématicien italien du XII^{e}-XIII^{e} siècle. Fibonacci en est venu à s'intéresser à cette suite de nombres quand il s'est intéressé à la façon dont évoluait une population de lapins. Son problème était le suivant : *Un homme installe un couple de lapins naissants dans un endroit clos. Combien de couples de lapins obtient-on à la fin d'une année si chaque couple peut se reproduire au second mois de son existence et produit alors un nouveau couple chaque mois ?*
La population de lapins au fil des mois était donnée par cette même suite où **chaque terme est la somme des deux précédents**.

B - De l'observation aux questions

  +  = ?

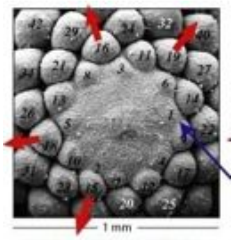
Il est assez étonnant que la suite de Fibonacci apparaisse aussi chez les plantes, et nous allons maintenant essayer de répondre aux deux questions suivantes :

> **Pourquoi des spirales apparaissent-elles lors de la croissance de certaines plantes ?**
> **Pourquoi le nombre de spirales est-il toujours un élément de la suite de Fibonacci ?**

C - Modélisation de la croissance spiralée des plantes

Pour répondre aux questions précédentes, nous allons d'abord nous intéresser à la façon dont se développent les plantes. Plus précisément nous allons nous intéresser à la croissance des plantes qui se développent en formant des spirales. Cette famille de plantes, en croissance dite « spiralée », a été décrite dès l'antiquité, mais les descriptions ne deviennent plus précises qu'à partir du début du XIX^{e} siècle.

Voilà ce que l'on sait de la croissance spiralée des plantes comme les tournesols vers 1830 :

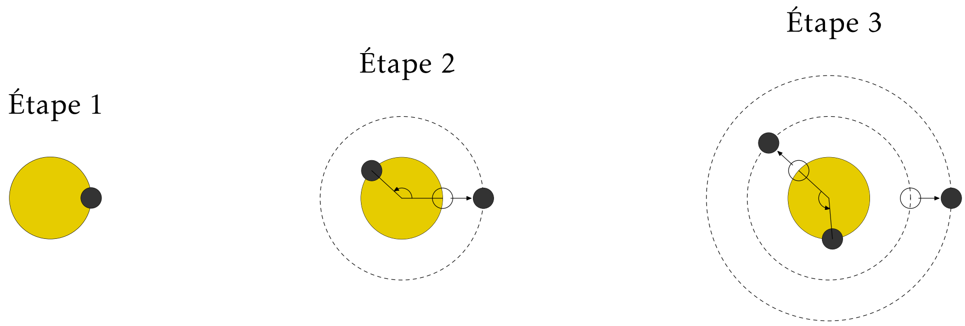


Au sommet de la plante se trouve une partie circulaire, appelée « zone apicale », ou « apex », et à la périphérie de celle-ci, des protubérances. Ces protubérances, appelées des « primordia » sont d'abord indifférenciées, et donneront plus tard soit des feuilles, soit des écailles pour les pommes de pin, soit ce que l'on appelle les fleurons pour les tournesols, etc . . . .

On sait également que les primordia se développent en suivant les règles suivantes :

- Les primordia naissent au bord de l'apex, à intervalles de temps réguliers.
- Ils s'éloignent ensuite du centre en se déplaçant radialement.
- Deux primordia successifs forment entre eux un angle qui est constant tout au long du développement de la plante : c'est le même entre le 1er et le 2^{e} primordium, entre le 2^{e} et le 3^{e}, entre le 35^{e} et le 36^{e}. Cet angle est appelé **angle de divergence**.

Voici, en trois étapes, un schéma représentant la naisance des trois premières graines, d'un tournesol par exemple. Le disque jaune représente l'apex, et les graines sont représentées en noir :



La vitesse d'éloignement des primordia peut varier d'une plante à l'autre, en revanche, l'angle de divergence, noté a sur les figures ci-dessus est le même pour toutes les plantes en croissance spiralée. Dans le modèle proposé, la croissance s'effectue dans un plan, ce qui est à peu près le cas pour les fleurs de tournesols et les pommes de pin.

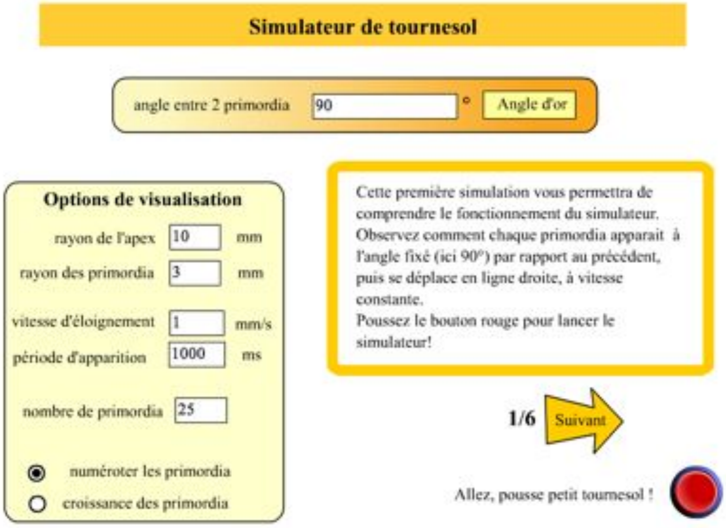
II - Des spirales : Pourquoi ? Quand ? Combien ?

A - Expériences avec un simulateur

Un modèle de croissance ayant été défini, c'est-à-dire que nous avons des hypothèses, des règles sur la façon dont croit une plante, nous allons pouvoir simuler cette croissance, et observer les résultats obtenus. Nous allons pour cela utiliser un excellent outil de simulation de croissance des tournesols, réalisé par des élèves d'un lycée d'Ivry sur Seine, en 2001-2002, à l'occasion d'un TPE. Il est en accès libre à l'adresse `http://tpe.tournesol.free.fr/tournesol.htm`

Le simulateur est conçu de façon à ce que les tournesols poussent selon les trois hypothèses précédentes : naissance des primordia au bord de l'apex - éloignement radial - angle de divergence constant.

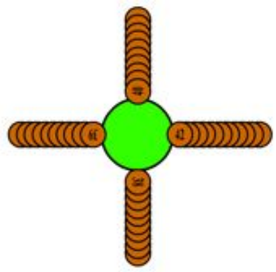
Le simulateur permet également de choisir l'angle de divergence, et le nombre de graines que l'on veut faire pousser. Il est même possible de numéroter les graines qui vont apparaître, ce qui permet de bien comprendre le mode de dévloppement.



Nous allons donc faire pousser des tournesols, en faisant varier l'angle de divergence ainsi que le nombre de graines qui naissent.

1. **Quelques essais pour se familiariser avec le modèle**
   - **Angle entre 2 primordias** = 90°

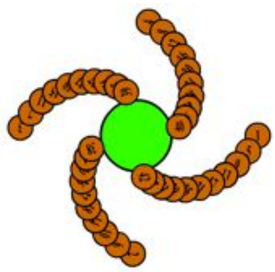
     Regardons comment pousse un premier tournesol avec un angle de divergence égal à 90°, en gardant les paramètres préréglés (10,3,1,1000,25) et en numérotant les primordia.
     – On peut vérifier que l'angle entre le « 1 » et le « 2 » est bien égal à 90°.
     – On voit les primordia s'organiser selon 4 demi-droites, ou « rayons », ce qui s'explique : comme $90° \times 4 = 360°$, la naissance du 5^{e} primordium se fait sur l'apex au même endroit que le 1er. En effet, après 4 « naissances », on a fait 1 tour complet.

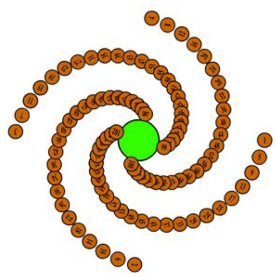
     

     On peut aussi dire que tourner de 90° revient à tourner de $\frac{1}{4}$ de tour, parce que $\frac{90}{360} = \frac{1}{4}$.

   - **Angle entre 2 primordias** = 92°

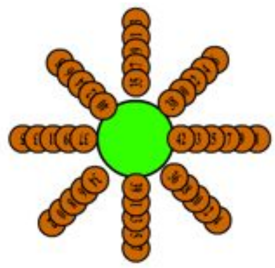
     On fait maintenant pousser un deuxième tournesol en prenant un angle de divergence égal à 92°, et en gardant les mêmes paramètres. Les demi-droites, ou rayons, apparaissent un peu courbées. C'est parce qu'au bout de 4 naissances, on a fait un peu plus d'un tour, et donc le 5^{e} primordium naît un peu plus bas que le 1er, le 9^{e} encore un peu plus bas, etc . . .

     Pour mieux voir « ces rayons courbés », on peut refaire une autre simulation, avec davantage de primordia (100), et avec une période d'apparition plus courte (250). On voit nettement apparaître des spirales.

- **Angle entre 2 primordias** = 135°
  Prenons maintenant un angle de 135°.
  On voit les primordia s'organiser selon 8 demi-droites, ou « rayons », la 9e naissance s'effectuant sur l'apex au même endroit que la première.
  Ce qui peut s'expliquer en remarquant que $135° \times 8 = 1080°$, soit $3 \times 360°$, c'est à dire qu'après 8 naissances on a fait 3 tours complets.
  Autrement dit à chaque naissance, on a tourné de $\frac{3}{8}$ de tours, et en effet, tourner de 135° revient à tourner de $\frac{3}{8}$ de tour, parce que $\frac{135}{360} = \frac{3}{8}$.



Faisons un bilan des trois premières observations :

Angle	Observation	Explication
90°	4 demi-droites	$\frac{90}{360} = \frac{1}{4}$
92°	4 spirales	$\frac{90}{360} \approx \frac{1}{4}$
135°	8 demi-droites	$\frac{135}{360} = \frac{3}{8}$

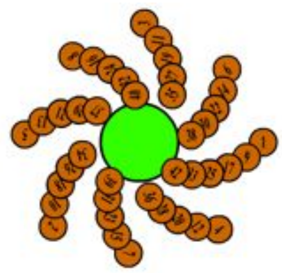
2. **D'autres expérimentations en essayant d'anticiper les observations**

   Nous allons continuer à utiliser le simulateur du TPE, mais en essayant de prévoir à l'avance ce que nous allons observer. Le simulateur nous permettra ensuite de confirmer ou d'infirmer nos conjectures.

- **Angle entre 2 primordias** = 136°

  Prenons maintenant un angle de 136°.
  Comme $\frac{136}{360}$ est proche de $\frac{3}{8}$, nous devrions observer 8 spirales, et effectivement, la simulation confirme notre conjecture.

  Ces spirales n'existent pas réellement, c'est notre cerveau qui relie entre eux les plus proches voisins. Le mot savant pour nommer ces spirales des plus proches voisins est le mot « parastiche ».



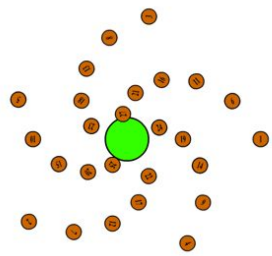
- **Angle entre 2 primordias** = 140°
  Recommençons la simulation avec un angle de divergence égal à 140°.

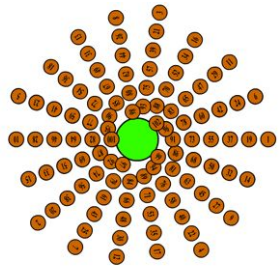
  À quoi peut-on s'attendre ?

  ? ? À un ensemble de 8 spirales davantage courbées que les précédentes ? ?

  ? ? À 18 demi-droites parce que $\frac{140}{360} = \frac{7}{18}$? ?

  Avec une première simulation en reprenant les paramètres initiaux (25 primordia et une période d'apparition de 1000), on voit apparaître 5 spirales !





Faisons une deuxième simulation, avec 100 primordia, et une période d'apparition de 250. Au début, on voit apparaître ces 5 spirales, mais ensuite, en s'éloignant, les primordia semblent plutôt s'organiser selon des demi-droites. Il y a 18 demi-droites (sans les compter, on peut savoir qu'il y en a 18, car le voisin du « 1 », c'est le « 19 ».)

Nous nous attendions aux 18 demi-droites, mais pas aux 5 spirales. **Comment expliquer que l'on voit 5 spirales ?** Sans doute parce que 140°, c'est assez proche de cinquièmes de tours ? **Comment aurait-on pu le prévoir ?**

Bilan de la simulation

- Si l'angle de divergence est une portion de tour égale à une fraction « simple » comme $\frac{3}{8}$, les fleurons s'organisent selon des demi-droites issues du centre de l'apex.
- Si l'angle de divergence est proche d'une fraction « simple », on voit apparaître des spirales, en nombre égal au dénominateur de la fraction « simple ». Ces spirales, ou parastiches, n'existent pas dans la réalité, c'est notre cerveau qui relie mentalement les plus proches voisins.
- Si l'angle de divergence correspond à une portion de tour égale à une fraction de dénominateur plus élevé, comme $\frac{7}{18}$, l'organisation en demi-droites met davantage de temps à apparaître.. mais elle finit quand même par apparaître ! De manière inattendue, on a aussi vu apparaître une autre organisation en 5 spirales, qui vient du fait que $\frac{7}{18}$ est proche d'une fraction de dénominateur 5.

Pour pouvoir anticiper sur les observations, il est utile de déterminer des fractions qui sont proches d'une fraction $\frac{a}{360}$ donnée $\left(\frac{140}{360}\text{ dans le cas ci-dessus}\right)$, tout en ayant un dénominateur plus petit que 360. C'est l'objet du paragraphe suivant.

B - Développements en fraction continue

Nous allons nous intéresser par exemple aux fractions proches de $\frac{7}{18}$.

Il existe en mathématiques un outil pour trouver des fractions approchant une autre fraction. Cet outil est ce que l'on appelle le « **développement en fractions continues** ».
Développons par exemple le nombre $\frac{140}{360}$ ou $\frac{7}{18}$ en fractions continues :

- On commence par appliquer l'algorithme d'Euclide avec $a = 18$ et $b = 7$:

a	b	q	r
18	7	2	4
7	4	1	3
4	3	1	1
3	1	3	0

- On en déduit le développement en fractions continues de $\frac{7}{18}$: $\boxed{\frac{7}{18} = \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{3}}}}}$

Une fois ce développement en fractions de $\frac{7}{18}$ obtenu, on peut en déduire des approximations en fractions de $\frac{140}{360}$ « plus simples » : de la même façon que pour obtenir des approximations décimales d'un nombre réel, on tronque le développement décimal, ici, pour obtenir des approximations fractionnaires, on tronque le développement en fractions :

$$\frac{7}{18}=\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{3}}}}\approx\frac{1}{2}\qquad\frac{7}{18}=\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{3}}}}\approx\frac{1}{3}\qquad\frac{7}{18}=\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{3}}}}\approx\frac{2}{5}$$

Les approximations $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$ et $\frac{2}{5}$ obtenues par troncature sont appelées les *réduites* de $\frac{7}{18}$, et c'est parce que $\frac{140}{360}\approx\frac{2}{5}$, que l'on aurait pu prévoir l'apparition des 5 spirales.

C - Allers - retours entre conjectures et expérimentations

- **Et si l'angle était égal à 131°, que verrions-nous ?**

On détermine le développement en fraction continue de $\frac{131}{360}$:

$$\frac{131}{360}=\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{32}}}}}\qquad\frac{131}{360}=[0,2,1,2,1,32]$$

On en déduit les réduites qui approchent la fraction $\frac{131}{360}$:

$[0,2,1,2,1,32]$

$$\frac{131}{360}=\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{32}}}}}\approx\boxed{\frac{1}{3}}$$

$[0,2,1,2,1,32]$

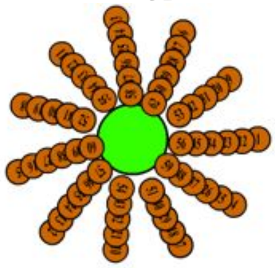
$$\frac{131}{360}=\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{32}}}}}\approx\boxed{\frac{3}{8}}$$

$[0,2,1,2,1,32]$

$$\frac{131}{360}=\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{32}}}}}\approx\boxed{\frac{4}{11}}$$

Conjecture : Nous pouvons donc penser voir des structures avec 8 spirales orientées dans un sens et 11 spirales orientées dans l'autre sens.

Expérimentation : En simulant, c'est l'ensemble des 11 spirales qui apparaît le plus nettement, et ces spirales ne sont pas très courbées, ce sont presque des demi-droites.



- **Et si l'angle était égal à 163°, que verrions-nous ?**

$$\frac{163}{360}=[0,2,4,1,3,1,6]$$

$[0,2,4,1,3,1,6]$ $\quad\frac{163}{360}\approx\frac{1}{2}$

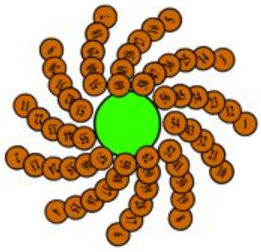
$[0,2,4,1,3,1,6]$ $\quad\frac{163}{360}\approx\frac{4}{9}$

$[0,2,4,1,3,1,6]$ $\quad\frac{163}{360}\approx\frac{5}{11}$

$[0,2,4,1,3,1,6]$ $\quad\frac{163}{360}\approx\frac{19}{42}$

Conjecture : Nous pouvons donc penser voir des structures avec 11 spirales orientées dans un sens et 42 spirales orientées dans l'autre sens.

Expérimentation : En simulant, c'est l'ensemble des 11 spirales qui apparaît, et ces spirales sont assez courbées, elles occupent assez bien l'espace. Il n'y a pas assez de graines dans la simulation pour voir apparaître la structure des 42 spirales.



Il n'est pas toujours facile de prédire les ensembles de spirales qui vont apparaître le mieux, certaines spirales sont plus visibles (plus proches de demi-droites), d'autres remplissent mieux l'espace.

Qu'en est-il pour les écailles de pommes de pin et les les fleurons de tournesols non virtuels ?

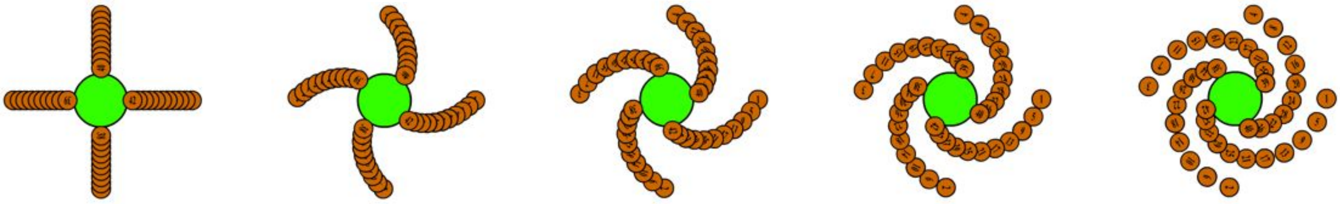
III - Les mathématiques chez les plantes

A - Une hypothèse supplémentaire : Hofmeister, 1868

Nous allons revenir à la botanique et utiliser une hypothèse supplémentaire concernant la croissance des plantes. Cette hypothèse a été proposée en 1868 par le botaniste **Hofmeister : le développement des primordia se fait de façon à maximiser l'occupation de l'espace.** Ce fut une avancée très importante dans la compréhension du développement des plantes, et c'est, à peu de choses près, ce modèle de Hofmeister qui est encore de nos jours le modèle utilisé par les chercheurs contemporains.

Comment choisisr l'angle de divergence pour occuper au mieux l'espace ?

Regardons ce qui se passe avec les angles 90°, 91°, 92°, 93° et 94°.



90° 91° 92° 93° 94°

$\frac{1}{4}$ est une bonne approximation de $\frac{91}{360}$: les spirales sont très marquées.

$\frac{1}{4}$ est une mauvaise approximation de $\frac{94}{360}$: les spirales occupent mieux l'espace.

Les demi-droites ou les spirales sont plus marquées lorsque l'approximation trouvée est une « bonne » approximation , et elles occupent mieux l'espace lorsque l'approximation trouvée est une « mauvaise » approximation.

Nous allons donc chercher un **angle de divergence** a qui est tel que la fraction $\frac{a}{360}$ n'a que de **mauvaises approximations.**

B - De Hofmeister à Fibonacci

Lorsque l'on prend une approximation décimale par troncature d'un nombre, l'approximation est « meilleure » si l'on tronque avant un petit chiffre : $3,14$ est une bonne approximation à 2 décimales de π, tandis que $3,1415$ n'est pas une bonne approximation à 4 décimales (la décimale suivante est un 9).
À l'inverse, lorsque l'on approche un nombre par troncature de son développement en fraction continue, l'approximation est « meilleure » si l'on tronque avant un grand chiffre. On peut l'expliquer de la façon suivante :

Reprenons l'écriture en fraction continue de $\dfrac{163}{360} = \cfrac{1}{2+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{6}}}}}} = [0,2,4,1,3,1,6]$.

Si l'on tronque ce développement en fraction continue :

– avant un 1 : $[0,2,4] = \cfrac{1}{2+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{6}}}}}}$, ce que l'on néglige est compris entre $\dfrac{1}{2}$ et 1.

– avant un 3 : $[0,2,4,1] = \cfrac{1}{2+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{6}}}}}}$, ce que l'on néglige est compris entre $\dfrac{1}{4}$ et $\dfrac{1}{3}$.

Les approximations seront d'autant plus mauvaises (ce que l'on cherche !) que les entiers apparaissant dans le développement en fraction continue sont petits. L'idéal est donc que ces entiers soient tous égaux à 1.

Par exemple, déterminons l'angle a tel que : $\dfrac{a}{360} = \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1}}}}}}} = [0,1,1,1,1,1,1,1]$

Calculons les différentes réduites :

$[0,1] = \dfrac{1}{1} = 1$ $\quad$ $[0,1,1] = \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1}} = \dfrac{1}{2}$

$$[0,1,1,1] = \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1}}} = \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2}} = \cfrac{1}{\cfrac{2+1}{2}} = \dfrac{2}{2+1} = \dfrac{2}{3}$$

$$[0,1,1,1,1] = \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1}}}} = \cfrac{1}{1+\cfrac{2}{3}} = \cfrac{1}{\cfrac{3+2}{3}} = \dfrac{3}{3+2} = \dfrac{3}{5}$$

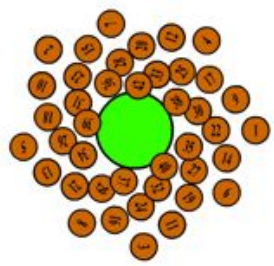
$$[0,1,1,1,1,1] = \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1}}}}} = \cfrac{1}{1+\cfrac{3}{5}} = \cfrac{1}{\cfrac{5+3}{5}} = \frac{5}{5+3} = \frac{5}{8}$$

Chaque réduite a :
- son numérateur égal au dénominateur de la réduite précédente ;
- son dénominateur égal à la somme du numérateur et du dénominateur de la réduite précédente, ou bien ce qui revient au même, à la somme des dénominateurs des deux réduites précédentes.

On aura donc : $[0,1,1,1,1,1,1] = \frac{8}{13}$ et $[0,1,1,1,1,1,1,1] = \frac{13}{21}$.

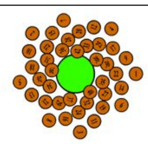
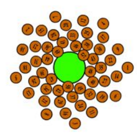
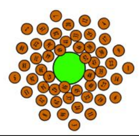
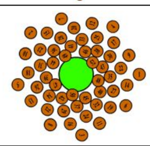
De par sa construction, **la suite des dénominateurs des réduites** est donc **la suite de Fibonacci**.
Les fractions qui approchent le nombre $[0,1,1,1,1,1,1,1]$ ont pour dénominateur les nombres de la suite de Fibonacci, 5 ; 8 ; 13 ; 21.
Si l'on fait pousser un tournesol avec un angle de divergence a tel que $\frac{a}{360} = [0,1,1,1,1,1,1,1]$, on devrait voir apparaître des spirales au nombre de 5, 8 13.

Pour le vérifier à l'aide du simulateur, calculons l'angle a associé à $[0,1,1,1,1,1,1,1]$: $\frac{a}{360} = \frac{13}{21}$, d'où $a = \frac{13 \times 360}{21} \approx 222.857°$.
Avec 40 graines, on voit nettement la structure en 8 spirales.
Avec d'autres paramètres, on peut mettre en évidence les autres structures (ensemble de 5 spirales, ensemble de 13 spirales, ensemble de 21 demi-droites).



C - L'angle d'Or, fidèle compagnon de Fibonacci

Imaginons des développements en fraction continue plus longs, mais ne contenant toujours que des « 1 ».

Nombre de « 1 »	$\frac{a}{360}$	a	Simulations
7	$\frac{13}{21}$	222.857°	
8	$\frac{21}{34}$	222.353°	
9	$\frac{34}{55}$	222.545°	
10	$\frac{55}{89}$	222.472°	
...	...	...	...

Quand on augmente le nombre de « 1 », l'angle de divergence associé semble se rapprocher de 222.5°, et le tournesol virtuel obtenu par simulation ressemble de plus en plus à un « vrai » tournesol.
Franchissons un pas de plus, imaginons un angle qui correspond à une infinité de « 1 » : $\frac{a}{360} = [0, 1, 1, 1, 1, \ldots]$

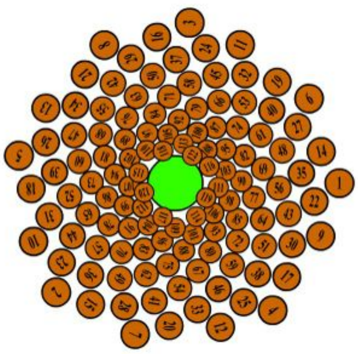
$$\frac{a}{360} = \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \ldots}}}}}$$

Dans un premier temps, on note $x = \frac{a}{360}$, et on calcule x : $x = \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \ldots}}}}}$

La partie écrite en violet est elle-même égale à x, donc x est une solution de l'équation : $x = \frac{1}{1+x}$
En résolvant cette équation du second degré ($x + x^2 = 1$), et en gardant la solution positive de cette équation, on touve : $x = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \approx 0,618$.

À partir de $\frac{a}{360} = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \approx 0,618$, on trouve $a = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \times 360° \approx 222.492\,36°$.

Comparons la simulation obtenue avec cet angle de divergence et la réalité :



Remarque : Le Nombre d'Or est égal à $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1,618$. Le nombre x est lui égal à $(\varphi - 1)$.