Atelier D 29 des Journées nationales de l'APMEP à Laon (18 octobre 2015) :

"Histoire de ma compréhension de 5 tours de magie grâce aux mathématiques"

Par Dominique Souder, professeur retraité.

Niveau : lycée.

Matériel : un jeu de cartes, quelques feuilles de carton (ou papier dessin) et des ciseaux

Contenu :

On étudiera 5 tours fabuleux :

- le 1er mêlant le système de numération en base trois et la géométrie dans l'espace (coordonnées, intersections de 3 plans)

- le 2e basé sur les congruences modulo 17 (opérations mod 17, cycles et invariants)

- le 3e lié à la théorie des graphes (cycles eulérien, hamiltonien, théorème de De Bruinj)

- le 4e reliant les notions de carrés gréco-latins, sudoku, pour déboucher sur la construction de carrés magiques 4×4 et 5×5 avec une algorithmique.

- et un 5e et dernier en hommage à Raphaël Robbe, gagnant du Trophées des extraordinaires de TF1 le 6 mars 2015, avec la réalisation d'un carré semi-magique 8x8, en aveugle, et selon un parcours de cavalier d'échecs.

Pour échanger avec moi : dominique.souder@gmail.com

Tour 1 : les 3 tas

(mêlant le système de numération en base trois et la géométrie dans l'espace [coordonnées, intersections de 3 plans]

- **Tour d'enfance** : une carte est choisie parmi 21 cartes ou 27 cartes. Elles sont distribuées alternativement en 3 tas. Le spectateur dit dans quel tas sa carte se trouve. Le magicien ramasse les 3 tas en mettant au milieu la pile où se trouve la carte choisie. Ceci est fait 3 fois successivement. La carte choisie est alors au milieu du paquet (donc 11^{e} sur 21 ou 14^{e} sur 27).
- **Variante finale** : après la 3^{e} distribution en 3 piles, celle qui contient la carte est saisie, puis ses cartes sont placées faces visibles dans un paquet de toutes les autres cartes dos en haut, en alternant une carte dos en haut, et une carte face visible en haut dépassant de 3cm en hauteur. On tasse le jeu, on le serre bien et on le tapote sur la table par ses cartes qui dépassent, ce qui fait glisser les cartes : il en émerge de l'autre côté une de moins. On retourne pour tasser les cartes qui dépassent, et on recommence le processus. Avec un paquet de 7 cartes, en 6 opérations de tassements il n'y a plus qu'une seule carte qui dépasse : c'est la carte choisie. Les frottements conduisent à

faire ressortir toute carte encadrée par 2 autres, et finalement, c'est la carte du milieu parmi les cartes placées en dépassement qui reste.

- De plus en plus fort

Il s'agit d'un tour proche du précédent sauf que non seulement le magicien doit trouver la carte parmi 27 cartes, mais qu'en plus il va se débrouiller pour qu'à la fin des opérations elle soit à une place dans le paquet fixée par le spectateur dès le début (depuis 1 pour la carte du haut jusqu'à 27 pour celle du dessous du jeu). Pour cela il va falloir que le magicien utilise un changement de la base dix vers la base trois, de la position demandée à laquelle on a enlevé 1.

Exemple :

Le spectateur veut sa carte à la 18^e place à la fin ; le magicien calcule 18-1 = 17.

On peut procéder ainsi, pour convertir le nombre qui s'écrit en base décimale 17 vers la base trois :

- comme 17 = 3x5 + 2 on retient le reste 2 ;
- on utilise ensuite le quotient 5 ; 5 = 3x1 +2, on retient le reste 2 ;
- comme le dernier quotient est plus petit que 3, on stoppe les divisions par 3, on retient ce dernier quotient ci-dessus qui est 1 ;
- l'écriture de 17 en base trois est 122 (dans l'ordre de découverte de droite à gauche des restes et du dernier quotient). On peut décomposer 17 = 9x1 + 3x2 + 1x2, les coefficients des puissances de trois 9, 3 et 1 étant respectivement 1, 2, 2.

Vous pouvez (vous amuser à) convertir en base trois tous les nombres de 1 à 27.

Nombre en base décimale	1	…	7	…	17	…	23	…	27
Nombre en base trois	001		021		122		212		1000

Remarquons un exemple particulier de conversion qui nous servira : le nombre qui s'écrit en base décimale 13 s'écrit 111 en base trois. Ceci correspond à une carte qui sera 13+1= 14^e sur 27 donc au milieu du paquet.

Revenons à notre tour… Autre exemple : le spectateur veut que sa carte soit trouvée en 16ème position à partir du dessus. Le magicien doit calculer tout ce qui suit mentalement très vite. En 16ème position, la carte a donc 15 cartes au-dessus d'elle. En base trois, 15 s'écrit 120.

Il faut considérer les chiffres dans l'ordre de droite à gauche, c'est à dire commencer par le chiffre des « unités » ici 0, pour finir par celui des « neuvaines », ici le 1. Le 0 doit être interprété ainsi : il faut mettre le 1er paquet de 9 contenant la carte sur le dessus des autres paquets (dos des cartes apparents). Le 2 doit être interprété : il faut mettre au 2ème ramassage des piles le paquet contenant la carte en dessous des autres. Le 1 doit conduire à mettre le paquet intéressant au milieu des autres lors de la 3ème opération de ramassage des piles.

Vous pouvez retenir : le 0 en haut, le 1 au milieu, le 2 en bas. Vous essaierez de comprendre pourquoi il y a analogie entre la position d'un paquet de 9 et la position d'un chiffre dans l'écriture en base trois. Vous pouvez vérifier maintenant dans le cas simple du tour précédent. En effet, la 14ème position correspond à 13 cartes au-dessus d'elle, et 13 s'écrit 111 en base trois, ce qui invite à mettre le tas de 9 intéressant au milieu à chaque fois.

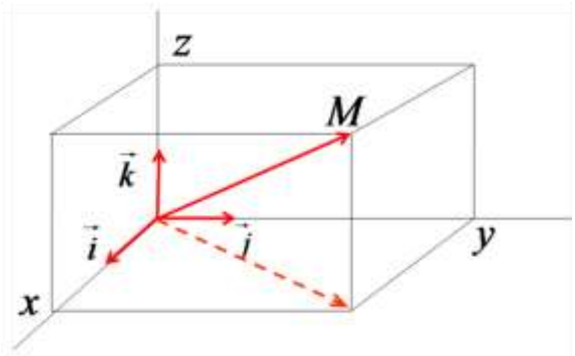
Ce tour permet donc la double réussite de retrouver la carte choisie parmi 27 et de la placer dans le paquet à la position (entre 1 et 27) demandée par le spectateur au début du tour.

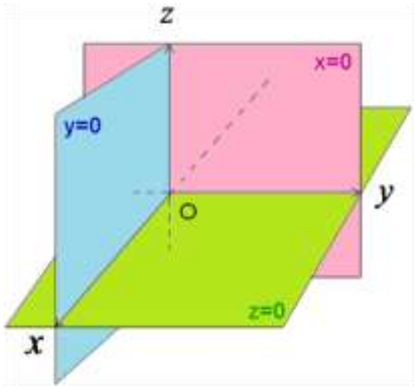
Coordonnées dans l'espace et tours de cartes

On peut repérer la position d'un point M de l'espace de dimension trois par la connaissance d'un triplet de coordonnées (x ; y ; z) dépendant du repère choisi $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ déterminé par le point origine O et les trois vecteurs unitaires sur les axes.

Les axes (x'x) des abscisses et (y'y) des ordonnées déterminent le plan (xOy) caractérisé par le fait que ses points ont tous une coordonnée z nulle. L'équation du plan (xOy) est z = 0. Des plans parallèles à celui-ci ont une équation du genre z = constante.

De même l'axe (x'x) des abscisses et l'axe (z'z) des cotes déterminent le plan (xOz) qui a pour équation y = 0 ; et les plans parallèles à celui-ci ont une équation du genre y = constante. Les axes (y'y) et (z'z) déterminent le plan d'équation x = 0 ; les plans parallèles à celui-ci ont une équation du style x = constante.





Sur la figure ci-dessous considérons les 27 points suivants, dont on donne les coordonnées, mais qu'on numérote aussi de 0 à 26…

Point	O	A	B	C	D	E	F	G	H
Coordonnées	(0,0,0)	(1,0,0)	(2,0,0)	(0,1,0)	(1,1,0)	(2,1,0)	(0,2,0)	(1,2,0)	(2,2,0)
Numéro du point	0	1	2	3	4	5	6	7	8

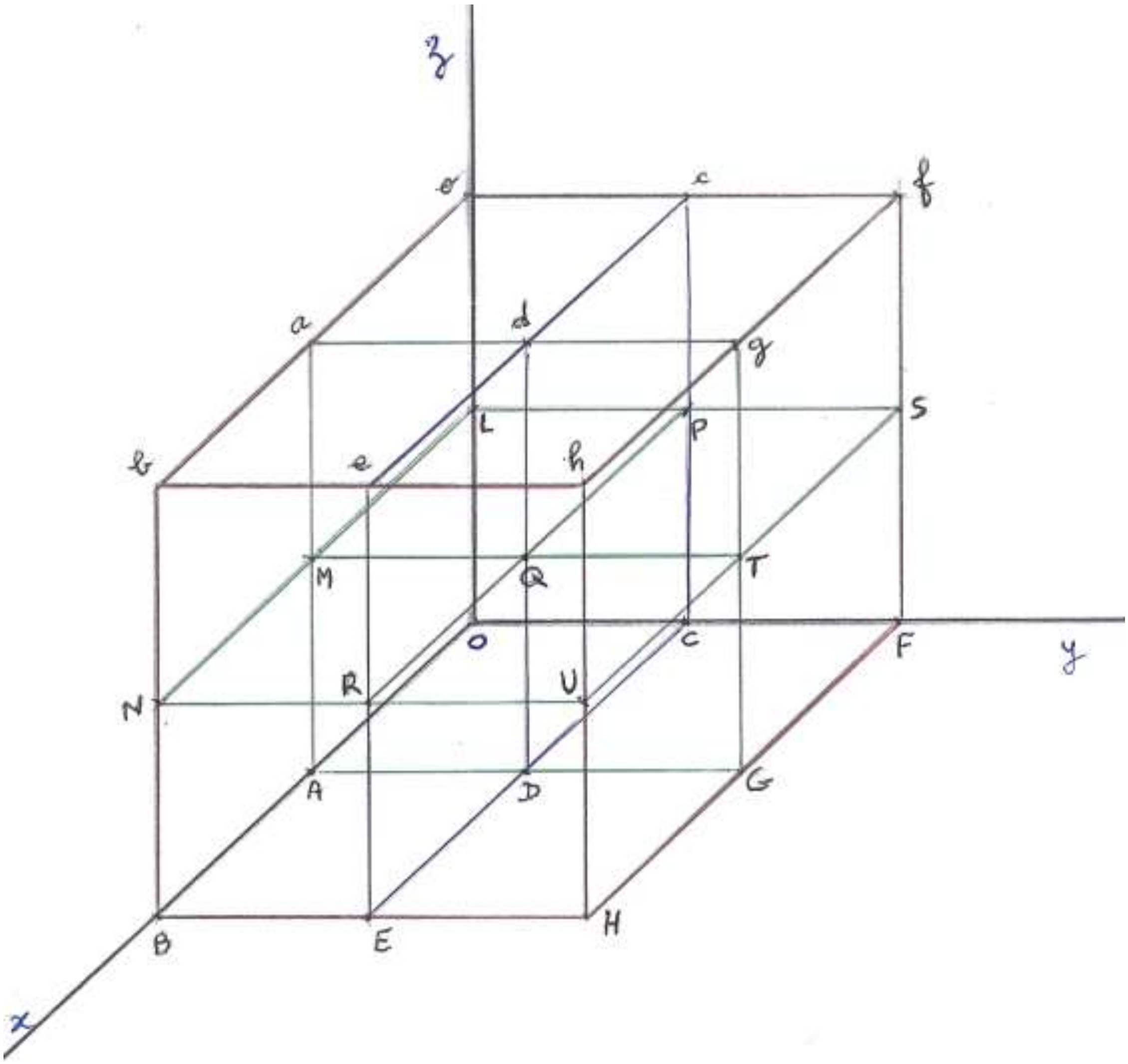
Point	L	M	N	P	Q	R	S	T	U
Coordonnées	(0,0,1)	(1,0,1)	(2,0,1)	(0,1,1)	(1,1,1)	(2,1,1)	(0,2,1)	(1,2,1)	(2,2,1)
Numéro du point	9	10	11	12	13	14	15	16	17

Point	o	a	b	c	d	e	f	g	h
Coordonnées	(0,0,2)	(1,0,2)	(2,0,2)	(0,1,2)	(1,1,2)	(2,1,2)	(0,2,2)	(1,2,2)	(2,2,2)
Numéro du point	18	19	20	21	22	23	24	25	26

Le plan formé des points OCFLPSocf est le plan d'équation x = 0.
Le plan formé des points ADGMQTadg est le plan d'équation x = 1.
Le plan formé des points BEHNRUBbeh est le plan d'équation x = 2.

Le plan formé des points OLoAMaBNb est le plan d'équation y = 0.
Le plan formé des points CPcDQdERe est le plan d'équation y = 1.
Le plan formé des points FSfGTgHUh est le plan d'équation y = 2.

Le plan formé des points OABCDEFGH est le plan d'équation z = 0.
Le plan formé des points LMNPQRSTU est le plan d'équation z = 1.
Le plan formé des points oabcdefgh est le plan d'équation z = 2.



Expérimentons maintenant avec des cartes…

Un paquet de 27 cartes, tenu faces cachées, qu'on pourrait imaginer numérotées de 0 à 26 de haut en bas, est distribué, à partir de son haut, en tournant les cartes face visible, carte après carte, en trois piles alternativement. Les compositions des piles données ci-après se lisent de gauche à droite ce qui correspond à aller de la carte du dessous de la pile (la première posée) vers celle du dessus (la dernière posée).

Première donne :

Pile n° 1	0	3	6	9	12	15	18	21	24
Pile n° 2	1	4	7	10	13	16	19	22	25
Pile n° 3	2	5	8	11	14	17	20	23	26

Si nous associons chaque numéro de carte à un point de l'espace dans la figure ci-dessus :
- la première pile correspond aux points OCFLPSocf et donc au plan d'équation x = 0
- la deuxième pile correspond aux points ADGMQTadg et donc au plan d'équation x = 1
- la troisième pile correspond aux points BEHNRUBbeh et donc au plan d'équation x = 2.

Ramassons les piles ainsi : la pile n°1, puis, par-dessus, la pile n°2, et enfin la pile n°3. Retournons le paquet pour avoir les faces cachées dessus. Démarrons une nouvelle distribution alternative en 3 piles, depuis la carte de dessus du paquet, en jetant les cartes face visible. Voici ce qu'on obtient :

Deuxième donne :

Pile n° 1	0	9	18	1	10	19	2	11	20
Pile n° 2	3	12	21	4	13	22	5	14	23
Pile n° 3	6	15	24	7	16	25	8	17	26

Si nous associons chaque numéro de carte à un point de l'espace dans la figure ci-dessus :
- la première pile correspond aux points OLoAMaBNb et donc au plan d'équation y = 0
- la deuxième pile correspond aux points CPcDQdERe et donc au plan d'équation y = 1
- la troisième pile correspond aux points FSfGTgHUh et donc au plan d'équation y = 2.

Ramassons les piles ainsi : la pile n°1, puis, par-dessus, la pile n°2, et enfin la pile n°3. Retournons le paquet pour avoir les faces cachées dessus. Démarrons une troisième et dernière distribution alternative en 3 piles, depuis la carte de dessus du paquet, en jetant les cartes face visible. Voici ce qu'on obtient :
Troisième donne :

Pile n° 1	0	1	2	3	4	5	6	7	8
Pile n° 2	9	10	11	12	13	14	15	16	17
Pile n° 3	18	19	20	21	22	23	24	25	26

Si nous associons chaque numéro de carte à un point de l'espace dans la figure ci-dessus :
- la première pile correspond aux points OABCDEFGH et donc au plan d'équation z = 0
- la deuxième pile correspond aux points LMNPQRSTU et donc au plan d'équation z = 1
- la troisième pile correspond aux points oabcdefgh et donc au plan d'équation z = 2.

Ramassons les piles ainsi : la pile n°1, puis, par-dessus, la pile n°2, et enfin la pile n°3. Retournons le paquet pour avoir les faces cachées dessus. Le paquet est maintenant revenu à son état d'origine du début d'expérience, avant toute donne, soit les numéros classés de 0 à 26 du haut vers le bas. L'ordre des cartes est invariant au bout des 3 distributions décrites ci-dessus.

Imaginons maintenant **un premier tour de cartes**…
Déroulement

Le magicien propose à un spectateur de choisir des yeux une carte parmi les 27 d'un paquet. Le magicien, malgré un bandeau noir qu'on lui place sur les yeux, va retrouver la carte choisie. De plus il ne touchera pas les cartes, c'est le spectateur qui manipulera, selon les consignes du magicien.

Le magicien demande au spectateur de distribuer alternativement en 3 piles les cartes, faces visibles. Quand c'est fait le spectateur doit dire dans quelle pile, celle de gauche (pile de la première carte posée), celle du milieu, celle de droite (pile de la dernière carte posée) se trouve sa carte. Les piles sont ramassées par le spectateur ainsi : la pile de gauche, puis, par-dessus, la pile du milieu et enfin la pile de droite. Le paquet est retourné pour être tenu faces cachées au-dessus.

Une deuxième distribution est réalisée de la même façon, en rendant les faces visibles, à l'issue de laquelle le spectateur dit dans quelle pile se trouve sa carte. Les piles sont encore ramassées par le spectateur ainsi : la pile de gauche, puis, par-dessus, la pile du milieu et enfin la pile de droite. Le paquet est retourné pour être tenu faces cachées au-dessus.

Une troisième distribution est enfin réalisée de la même façon, à l'issue de laquelle le spectateur dit dans quelle pile se trouve sa carte. Les piles sont encore une fois ramassées par le spectateur ainsi : la pile de gauche, puis, par-dessus, la pile du milieu et enfin la pile de droite. Le paquet est retourné pour être tenu faces cachées au-dessus.

Le magicien demande alors au spectateur de compter un certain nombre de cartes à partir du haut de son paquet. Ceci conduit à une carte qui, une fois retournée, se révèle être la carte que le spectateur avait choisie. Le bandeau du magicien peut être enlevé : malgré l'obscurité il a trouvé le chemin de la lumière conduisant à la connaissance du choix du spectateur.

Explication

A la fin de la première donne la carte choisie est dans une pile, ce qui correspond à dire que le point de l'espace qui représente la carte figure dans un plan d'équation $x = 0$ ou 1 ou 2. (En effet désigner une pile où se trouve la carte revient, pour cette première donne, à désigner un plan d'équation x = constante.)
Ce même point figure à la fin de la deuxième donne dans un plan d'équation $y = 0$ ou 1 ou 2, qui est associé à la pile où se trouve la carte choisie.
Ce même point figure à la fin de la troisième donne dans un plan d'équation $z = 0$ ou 1 ou 2, qui est associé à la pile où se trouve la carte choisie.
Le point associé à la carte choisie appartient donc à 3 plans orthogonaux.
L'intersection de 2 plans orthogonaux est une droite. L'intersection de celle-ci avec le troisième plan est un point représentant la carte solution du tour.
<u>Exemple</u>
Numérotons les piles ainsi :
0 pour la pile où se trouve la première carte posée, 1 pour la pile du milieu, 2 pour la pile où se trouve la dernière carte posée.
- Si les piles où se trouve la carte selon les donnes sont 0 puis 2 puis 1, il s'agit de trouver le point d'intersection des plans $x = 0$, $y = 2$ et $z = 1$. Les coordonnées (0, 2,1) correspondent au point S, qui est le point numéro 15. Comme la numérotation commence au numéro 0, c'est la seizième carte du paquet de départ qui a été choisie. Mais *comme à la fin des trois distributions le paquet retrouve son ordre initial,* c'est aussi la seizième carte du paquet obtenu à la fin du tour qui est la carte choisie. Si le magicien trouve gênant de faire compter à partir de 0 les cartes par le spectateur, il peut lui demander de compter à partir de 1, et après le nombre de cartes distribué (15 dans l'exemple), faire retourner la carte suivante (la 16^{e}).

Comment le magicien, à l'aveugle, mais grâce aux trois réponses (0, 2, 1), peut-il trouver quel est le point de l'espace représentant la carte, et quel est son numéro ?

On peut attribuer à chaque coordonnée un coefficient : 1 pour x, 3 pour y et 9 pour z, et faire une addition. Ainsi la réponse (0, 2,1) conduit au calcul :

$$0\times1 + 2\times3 + 1\times9 = 0+6+9 = 15.$$

Le magicien peut donc, yeux fermés, utiliser les coordonnées comme si c'était une représentation des nombres en base trois, et faire un calcul de conversion en base dix. Simplement il faut faire attention à l'ordre des coordonnées : il faudrait écrire en base trois les chiffres en ordre inverse soit 120 et non 021. La valeur de x correspond aux unités (0 ou 1 ou 2), celle de y correspond au nombre de « troisaines » et celle de z au nombre de « neuvaines ».
<u>Deuxième exemple, servant de résumé</u> :

Le magicien entend que les piles intéressantes sont successivement : celles du milieu, celle de gauche, celle de droite. Il traduit en 1, 0, 2. Il inverse en 2, 0, 1. Il convertit en base dix par : $2\times9 + 0\times3 +1 = 19$. Il demande au spectateur de distribuer 19 cartes, puis de retourner la suivante qui se trouve être la carte choisie.

Une variante pour un tour encore plus exceptionnel…

Le magicien a appris par cœur la succession des 27 cartes (mais il ne faut pas faire battre le jeu, évidemment, avant de commencer le tour). A la fin des manipulations, une fois trouvé le numéro du point, et après avoir ajouté 1, le magicien se récite la succession des cartes, et trouve la valeur de la carte choisie. Ceci est facile pour un magicien habitué à utiliser des jeux en chapelet (jeux où il y a un truc pour passer d'une position de carte à sa valeur). Le magicien révèle le nom de la carte, puis ensuite dit au spectateur de compter tel nombre de cartes du paquet pour arriver à la carte choisie : non seulement il a trouvé la carte mais en plus il sait où elle est, bien qu'ayant les yeux bandés !

Une autre présentation qui m'est agréable est, au lieu d'utiliser des cartes, de faire 27 cartons de prénoms et de les ranger dans un ordre précis dont je me rappelle. Ce n'est pas aussi difficile que vous le pensez peut-être. Par exemple un élève peut retenir les prénoms des élèves de sa classe, et leur disposition dans la salle de ce professeur sévère qui impose la place de chacun. Autre exemple : un adulte peut penser aux prénoms des membres de la famille classés par génération, augmentés éventuellement de ceux de la famille alliée par le dernier mariage de son fils…

Imaginons maintenant **un deuxième tour de cartes, encore plus ambitieux**…

Cette fois-ci le magicien n'aura pas les yeux bandés, mais il retrouvera la carte choisie en la faisant apparaître, de plus, dans le paquet, en une position souhaitée à l'avance par le spectateur.

Déroulement

Le spectateur constitue un jeu de 27 cartes, qu'il bat, puis il choisit de l'œil une carte et dit au magicien qu'elle devra être retrouvée à telle position « n » (sur 27) à partir du haut du paquet (par exemple : à la 18^{e} place).

Le magicien distribue les 27 cartes, faces visibles, une à une, alternativement en 3 piles. Le spectateur dit dans quelle pile se trouve sa carte. Le magicien rassemble les trois piles dans un ordre réfléchi, puis retourne le paquet, faces cachées au-dessus.

Une deuxième distribution/reconstitution du paquet, puis une troisième, sont effectuées selon le même principe. Le magicien donne ensuite le paquet au spectateur qui compte, à partir du haut, les cartes jusqu'au nombre qu'il a choisi : cette dernière carte est retournée (dans l'exemple la 18^{e}) et c'est la carte qui avait été choisie.

Explication

Au lieu de ramasser les piles systématiquement de gauche à droite après chaque donne, le magicien va placer la pile contenant la carte choisie en l'une des positions dessous, milieu, dessus, parmi l'ensemble des trois piles, ceci selon les coordonnées que détermine le nombre « n » (que le magicien associe à un point d'intersection de 3 plans).

Le spectateur compte naturellement à partir de 1 quand il choisit un nombre, donc comme la numérotation du magicien part de 0, le magicien doit commencer par enlever 1 du nombre « n » donné par le spectateur. (Dans l'exemple il calcule : $18-1 = 17$.) Le magicien convertit en base trois. (Dans l'exemple $17 = 1\times9 + 2\times3 + 2$ donc 17 s'écrit 122 en base trois.) Le magicien inverse l'ordre des trois chiffres pour obtenir les coordonnées dans l'ordre x, y, z. (Dans l'exemple 122 devient 221.) Le magicien sait alors dans quel ordre les trois piles doivent être ramassées, pour telle ou telle donne. (Dans l'exemple à la première donne $x = 2$ donc la pile contenant la carte doit être mise au-dessus des deux autres ; à la deuxième donne $y = 2$ donc la pile contenant la carte doit être mise au-dessus des deux autres ; à la troisième donne $z = 1$ donc la pile contenant la carte doit être mise au milieu des deux autres.)

Tour 2 : « L'élu de son cœur »

basé sur les congruences modulo 17 (opérations + et x mod 17, cycles et invariants)

C'est le printemps, et ça gazouille dans la classe de troisième : qui sera le chéri de telle superbe demoiselle ? Le jeune magicien se vante de connaître un peu les cœurs, même quand ceux-ci tardent à se déclarer. En fait, lui aussi est un peu timide, mais à l'occasion d'un tour de magie, il y a peut-être un message à faire passer… Profitant d'un rassemblement de copains il propose à celle pour laquelle il soupire de lui révéler, même si elle-même ne le sait pas encore, vers lequel des dix-sept garçons de la classe elle a un penchant…

Le magicien a préparé 17 cartons ou papiers de la taille des cartes à jouer, numérotés de 1 à 17. Il propose d'écrire sur chaque carton le nom d'un des garçons de la classe, et montre l'exemple en écrivant le sien sur le carton numéro 1. Ensuite il passe le crayon aux autres.

Les cartons sont rassemblés dans l'ordre croissant, faces cachées, le 1 en haut du paquet, le 17 en dessous.

Le magicien demande à sa Dulcinée de distribuer de gauche à droite les cartes, une à une, alternativement, en deux piles. Celle-ci pose au choix l'une des piles sur l'autre, et coupe. Le magicien distribue alors les 17 cartons en cercle dans le sens inverse des aiguilles d'une montre, faces cachées. Il place au milieu du cercle un papier blanc sur lequel rien n'est écrit des deux côtés, comme tout le monde peut le vérifier.

Il demande à son amie de choisir une carte, de la retourner en la laissant à sa place.

On regarde le numéro. On compte ce nombre de cartes, en comptant 1 sur la carte retournée à l'instant, mais maintenant dans le sens des aiguilles d'une montre, et on retourne la carte sur laquelle on arrive. On regarde son numéro, on compte ce nombre de cartes en comptant 1 sur elle au départ, et on continue ainsi de carte en carte, jusqu'à ce que toutes les cartes soient retournées sauf une. (On compte sur toutes les cartes, même retournées)

Le magicien fera remarquer que ce n'est que la dernière carte qui donne le secret de ce que l'on a dans son cœur. Il pourra aussi faire remarquer qu'il est assez extraordinaire tout au long du tour de ne pas retomber sur une carte déjà retournée…

Le dernier carton est retourné : c'est le numéro 1, celui où est écrit le nom du magicien. Ce n'est pas fini ! Le magicien demande un briquet, prend le papier blanc, le tient au dessus de la flamme (attention de ne pas tout faire brûler) : des mots apparaissent sur le papier : « le 1 est unique, l'amour est magique ».

Si après cela la demoiselle n'est pas convaincue de votre excellence, et du choix qu'elle a à faire, c'est à désespérer…

Réglons tout de suite une question : sur le papier blanc, vous avez écrit au préalable le texte magique avec un stylo effaceur, ça marche très bien, ça ne se voit pas, et ça remplace le jus de citron, l'encre sympathique du passé.

Ce tour fonctionne pour 17 mais aussi 5, 7, 19, 29, 31… cartons (certains nombres premiers). Le principe de base est que, quel que soit le point de départ sur le cercle, sauf le 1, le circuit des cartes laissera le 1 à l'écart : toutes les cartes seront retournées avant lui. Si votre amie choisit de retourner au départ un carton qui se révèle être le vôtre, le numéro 1, arrêtez tout de suite le tour en enchaînant avec le message secret sur le papier.

Le mélange des cartons au départ amène les numéros à se succéder sur le cercle, dans le sens des aiguilles d'une montre, selon un ordre croissant des nombres impairs de 2 en 2, puis des nombres pairs de 2 en 2. Attention à bien prendre dans des sens différents la distribution des 17 cartes au début et le comptage vers les cartes retournées ensuite.

<u>Questions :</u>

- quand on passe d'une position sur le cercle vers une autre, à quelle opération entre les nombres concernés cela correspond-il ? (en ramenant tout à des nombres entre 1 et 17, ce qui se dit travailler modulo 17)

- qu'arrive-t-il aux dix-sept nombres de 1 à 17 par cette opération ?

- qu'arrive-t-il à un nombre quand on le transforme successivement seize fois ?

Solutions : **L'élu de son cœur.**

Quelles que soient les coupes, les 17 nombres se succèdent sur le cercle dans l'ordre suivant, dans le sens des aiguilles d'une montre :

1-3-5-7-9-11-13-15-17-2-4-6-8-10-12-14-16

Bien sûr on ne sait pas où est le 1 face cachée dans le cycle, mais c'est toujours ce cycle. Les valeurs se succèdent de 2 en 2 modulo 17 (y compris au moment 17+2 = 19 qui se ramène à 2 ; et au moment 16+2 = 18 donc 1 modulo 17)

Le comptage du nombre de cartons démarre sur le carton retourné de valeur « n », donc le nombre d'intervalles de 2 pour arriver à la nouvelle position est seulement (n-1).

La nouvelle valeur retournée est donc n + 2(n – 1) = 3n – 2 (bien sûr modulo 17). Voyons les transformations des 17 nombres possibles :

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
3n – 2	1	4	7	10	13	16	2	5	8	11	14	17	3	6	9	12	15

Dans la deuxième ligne on trouve chaque nombre de 1 à 17 une seule fois, et le 1 provient du 1 de la première ligne seulement.

Observons comment s'enchaînent des transformations de nombres…

Partons d'un nombre, par exemple 2, on obtient :

2-4-10-11-14-6-16-12-17-15-9-8-5-13-3-7- de nouveau 2.

On obtient un cycle des seize valeurs différentes allant de 2 à 17, sans jamais passer par la valeur 1.

Si nous partons d'un autre nombre, on obtient le même cycle décalé des seize valeurs différentes de 1. Le carton qui reste le dernier est toujours le 1.

Tour 3 : le collier de perles

lié à la théorie des graphes (cycles eulérien, hamiltonien, théorème de De Bruinj)

Le collier de 16 prénoms

Matériel

Le magicien a préparé 16 petits cartons portant chacun un prénom, soit masculin (8 de la sorte, écrits en bleu) soit féminin (8 de la sorte, écrits en rouge). Il les classe comme un jeu de cartes, du haut vers le bas dans l'ordre suivant : Dominique (homme donc en bleu), Pascalyves, Marc-Olivier, Ethan, Maëlyne, Paul, Bernard, Véronique, Valérie, Virginie, Violaine, Georges, Raymonde, Michel, Paulette, Monique.

Pour faire le tour il lui faudra au moins 5 spectateurs.

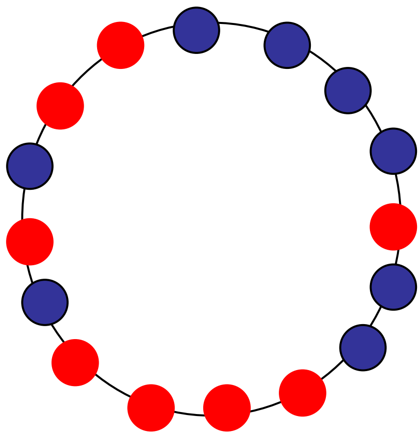
Déroulement

Le magicien éventaille rapidement son paquet de cartons en indiquant que les prénoms écrits en bleu ou rouge peuvent être masculin ou féminin, et qu'ils ne suivent aucun ordre spécial de nature alphabétique, ou de longueur de mot ou d'alternance régulière de couleur… D'ailleurs on peut couper ! Et un spectateur est invité à le faire ; ensuite il doit prendre le carton en haut du paquet (sans le montrer au magicien), puis distribuer à ses voisins les quatre cartons qui suivent au sommet du paquet. Le magicien ne voit pas les cartons distribués.

A la demande du magicien, ces quatre dernières personnes énoncent, à haute voix, la couleur de leur carton (simplement s'il s'agit d'un carton **rouge** ou **bleu**). Le magicien ne dispose d'aucune autre information que la couleur des quatre cartons. Pourtant, il va dévoiler un à un les prénoms écrits sur les quatre cartons que les quatre derniers spectateurs cachent en main, et même le prénom sur le carton du premier spectateur, dont le magicien ne connaissait *a priori* rien, même pas la couleur. Les cinq spectateurs sont fort étonnés : ils peuvent vérifier entre eux et avec le public supplémentaire l'exactitude de ce qu'a deviné le magicien.

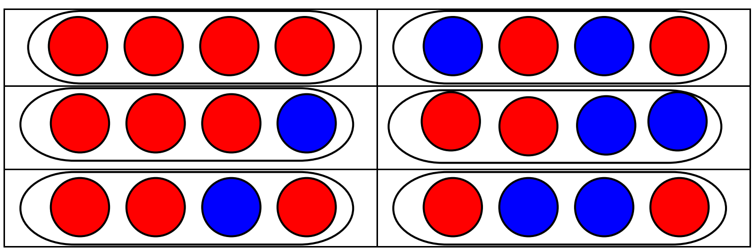
Explication

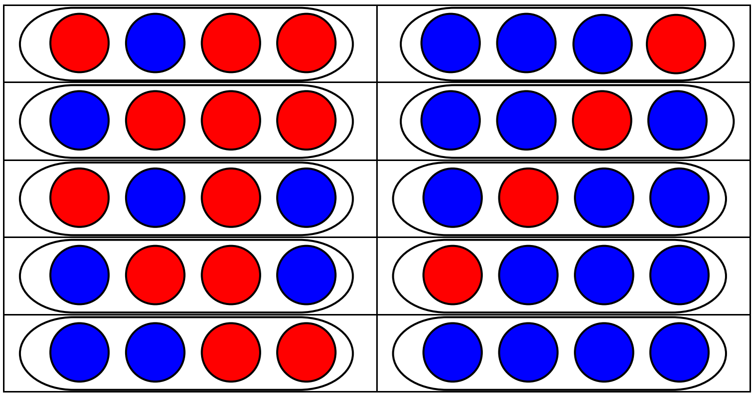
Le magicien connaît par cœur la succession (voir ci-dessus) des prénoms du paquet qu'il propose au départ. Quand on coupe, on décale le prénom de départ mais on crée une sorte de cycle et la succession de prénoms (dans le sens horaire) est la même. Envisageons-la comme un collier de perles de couleurs rouge ou bleue.



La position en haut (première bleue d'une succession de quatre dans le sens horaire) correspond au prénom "Dominique".

Ce collier possède une propriété remarquable et primordiale pour notre tour de magie : si l'on envisage de démarrer depuis deux perles en des positions différentes et que l'on regarde, dans l'ordre, les couleurs de 4 perles consécutives en avançant dans le sens des aiguilles d'une montre, alors on ne verra jamais deux fois la même suite colorée de 4 perles. Si on y regarde même d'un peu plus près, on verra que chaque suite possible de 4 perles de couleur apparaît une et une seule fois. Il y a 16 configurations possibles (les voir ci-dessous) car pour la première perle il y a deux choix de couleur, pour la deuxième deux aussi, pour la troisième deux, et pour la quatrième deux, d'où pour une succession de 4 perles un nombre de possibilités égal à $2\times2\times2\times2 = 16$. On note qu'avec 16 prénoms pouvant servir de perle de départ, on n'aura jamais plus de 16 configurations possibles.





Fournir une suite de 4 couleurs de perles permet de se positionner de façon unique au sein du collier, à condition de se rappeler la succession des prénoms féminins et masculins et de pouvoir trouver quel est le premier prénom de la série de quatre. La succession des prénoms peut correspondre pour le magicien a telle ou telle ruse mnémotechnique : regroupement de prénoms par branche de sa famille, chronologie des naissances, ou autre association d'idées lui facilitant de retrouver l'ordre magique de succession des couleurs.

Imaginons maintenant que le spectateur désigné ait coupé le jeu de telle façon que le carton du dessus soit celui du prénom Paul. Après la coupe, la carte qui se trouvait en bas du paquet (Monique) est maintenant suivie par celle qui occupait le sommet du tas avant la coupe (Dominique). Si le spectateur désigné a en main "Paul", les voisins reçoivent respectivement "Bernard", "Véronique", "Valérie", "Virginie". Ces 4 spectateurs affirment avoir, dans l'ordre, la suite de couleurs **bleu-rouge-rouge-rouge**.

Ainsi, le magicien qui sait comment les cartes étaient rangées initialement, dispose de toute l'information nécessaire et retrouve les 4 cartes cachées.

Dans cet exemple il y a 3 fois **rouge** qui est présent, avec un bleu préalable, ce qui rend facilement repérable le début de la suite à "Bernard". Le carton précédent, conservé par le spectateur désigné qui a distribué les 4 cartes est bien sûr "Paul".

Quand il y a 3 ou 4 couleurs successives identiques sur les 4, le repérage est quasi immédiat.

Quand il y a 2 couleurs successives identiques il faut envisager plusieurs cas ; par exemple pour 2 rouges successifs on peut avoir besoin de "Paulette-Monique" ou de "Virginie-Violaine", ou de "Véronique-Valérie" : ce sont les autres couleurs avant et/ou après qui feront la différence.

Quand il y a alternance de bleu et de rouge, il faut chercher dans la région "Violaine-Georges-Raymonde-Michel-Paulette" et trouver le départ à "Violaine" ou "Georges".

Remarquons qu'il faut jouer avec 4 spectateurs et non 3 seulement : en effet connaître la couleur de 3 perles consécutives ne suffirait pas à se positionner sur le collier. Par exemple, la même suite **bleu-rouge-rouge** apparaît deux fois dans le collier : ce peut être "Bernard-Véronique-Valérie" ou bien ""Michel-Paulette-Monique".

Ce tour est une adaptation de celui relaté par le Professeur Michel Rigo de l'Université de Liège : "La magie des colliers de perles de Nicolaas Govert de Bruijn" .http://images.math.cnrs.fr/La-magie-des-colliers-de-perles-de.html

Vous y trouverez une belle présentation avec des cartes à jouer ordinaires : 8, et même 32 cartes. Cet article imaginé pour 16 cartons a vu le jour grâce à cette lecture.

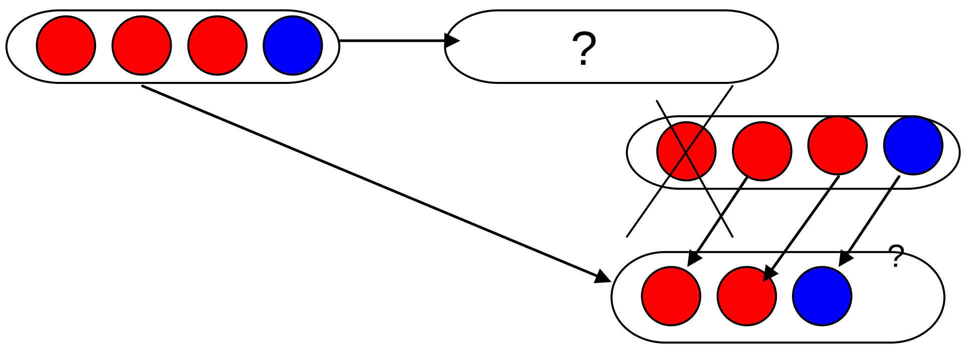
Ce tour de magie s'appuie sur des notions mathématiques de théorie des graphes. La construction des graphes présentés ici est souvent attribuée à N. G. de Bruijn. Cependant, ce dernier a reconnu que la paternité revenait à C. Flye Sainte-Marie en 1894. On notera que de Bruijn fut l'un des pionniers des systèmes formels de traitement de preuves dans les années 1960.

La construction du collier…

On veut réaliser un collier de 16 positions, dans lequel il y aura en particulier une succession de 4 perles **rouges** et une autre de 4 perles **bleues.** Si on les place « au hasard », on risque fort de ne pas voir apparaître chaque suite de 4 perles de couleurs une et une seule fois. Une même suite apparaîtra dès lors plus d'une fois et le magicien ne sera pas en mesure de retrouver systématiquement la position initiale. Avec 8 perles **rouges** et 8 perles **bleues** comment réussir à construire à coup sûr un collier ayant la propriété recherchée, c'est à dire que chaque suite de 4 perles de couleur y apparaisse une et une seule fois ? Il y a de fortes chances en tâtonnant par « essai-erreur » d'y passer un temps très long, voire même, si on s'y prend mal, de ne jamais y arriver. Pourtant, on sait qu'un tel collier peut être construit, nous l'avons déjà représenté plus haut.

Voici le moment de vous donner un moyen de construction systématique pour trouver de tels colliers. Il faut construire ce que l'on appelle un *graphe de « de Bruijn »*. Un graphe est un « dessin » constitué de sommets et de « flèches » reliant ces sommets. Les « sommets » du graphe sont ici les 16 configurations possibles de 4 couleurs.

Maintenant, il faut expliquer comment tracer des « flèches » entre ces sommets/configurations de 4 couleurs. Il y a deux types de flèches, des **rouges** et des **bleu**es et une flèche de chaque type part de chaque sommet. La règle permettant de déterminer le sommet atteint est assez simple : partant d'une configuration donnée de quatre perles, pour déterminer la configuration à atteindre, il faut supprimer la première perle (à gauche) et ajouter à droite des trois perles restantes une perle ayant la même couleur que la flèche.



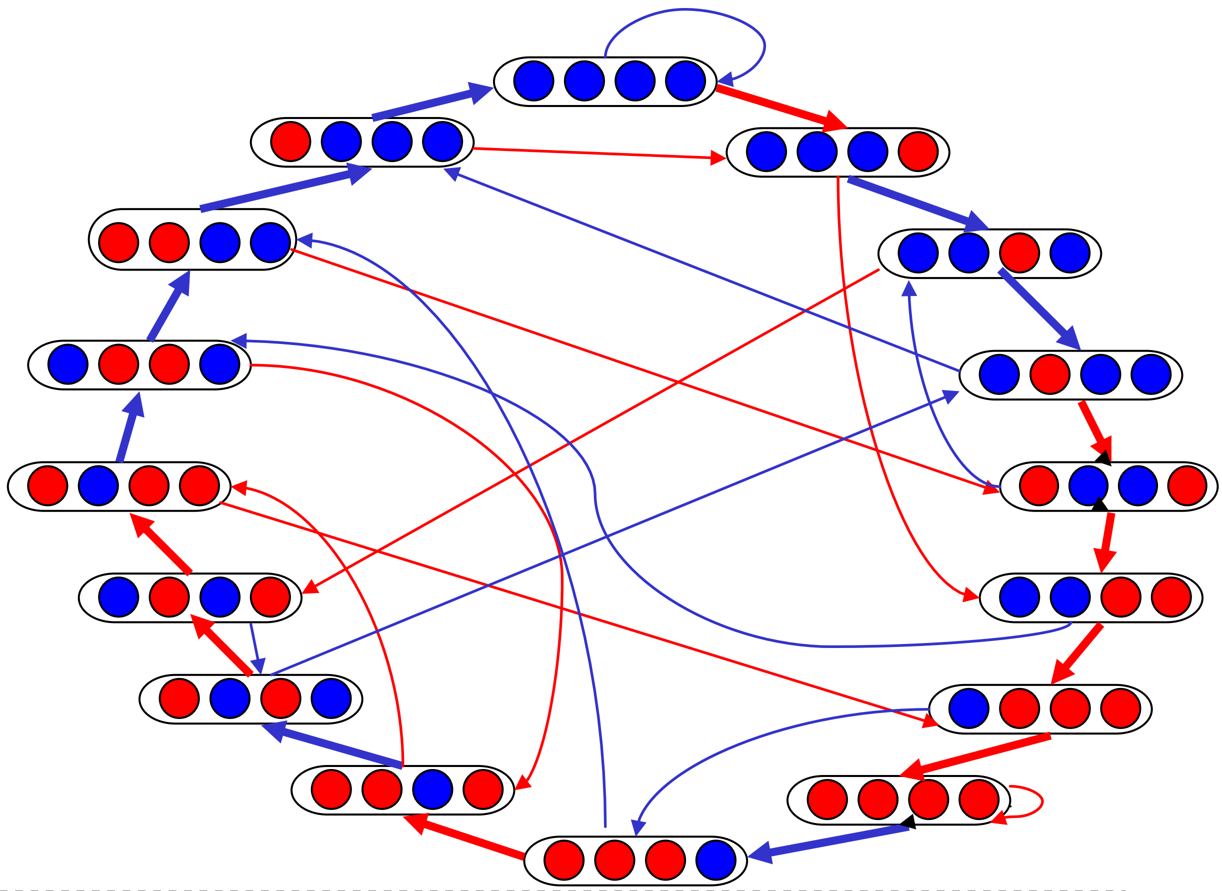
Voici les deux façons de transformer : par flèche rouge ou par flèche bleue…

Dans le graphe ci-dessous, de chacune des 16 positions part deux flèches (une bleue, une rouge), et sur chaque position il arrive deux flèches. Dans un tel graphe, un circuit qui passe au plus une fois par chaque sommet et revient à son point de départ permet de faire un collier ayant les propriétés désirées. On peut avoir à l'intérieur du graphe des circuits plus ou moins longs, mais **pour avoir un collier de seize perles, il faut trouver un chemin qui passe une et une seule fois par chacun des seize sommets du graphe**. **Le graphe ci-dessous montre en flèches grasses un circuit comportant 16 flèches : 8 bleues et 8 rouges.**

Construire un collier revient à trouver un chemin correct dans un graphe. Les spécialistes de la théorie des graphes vous diront qu'il existe une procédure automatique et rapide (un algorithme) pour trouver un circuit convenable.

En théorie des graphes, on dit que le graphe construit est *eulérien* : il existe toujours un circuit passant par chaque sommet une et une seule fois. On peut montrer que les graphes de « de Bruijn » sont aussi *hamiltoniens* : il existe toujours un circuit passant par chaque « flèche » une et une seule fois.

Le circuit ci-dessous, commençant en haut avec les 4 ronds bleus, qui correspondent à la position « Dominique », et allant dans le sens horaire, est celui sur lequel il faut passer successivement par les 16 prénoms dans l'ordre proposé en début de tour. Si les spectateurs énoncent 3 bleus puis un rouge le magicien doit se rappeler que c'est Pascalyves le prénom de départ, les 3 spectateurs suivants étant Marc-Olivier, Ethan, Maëlyne et le spectateur qui a distribué sans dire sa couleur personnelle est Dominique. Et ainsi de suite…



<u>**Tour 4 :**</u> les carrés magiques anniversaires

(reliant les notions de carrés gréco-latins, de sudoku, pour déboucher sur la construction de carrés magiques 4×4 et 5×5 avec une algorithmique)

A propos de carré gréco-latin…

Un carré latin d'ordre n est un tableau carré à n lignes et n colonnes composé avec n éléments (lettres, nombres, figures géométriques) disposés de façon à ce qu'ils n'apparaissent qu'une fois et une seule sur chaque ligne et dans chaque colonne. Les éléments permutent entre les lignes et entre les colonnes ; chaque élément est écrit n fois dans le tableau.

Les grilles de Sudoku sont des carrés latins.
Exemple : le carré latin d'ordre 4 obtenu avec les quatre chiffres arabes de 1 à 4

1	2	3	4
4	3	2	1
2	1	4	3
3	4	1	2

Changeons les chiffres en lettres latines 1 = A, 2 = B, 3 = C, 4 = D.
On obtient un carré latin d'ordre 4 :

A	B	C	D
D	C	B	A
B	A	D	C
C	D	A	B

Changeons les chiffres en lettres grecques 1 = α, 2 = β, 3 = γ, 4 = δ.
On obtient un carré latin de lettres grecques :

α	β	γ	δ
δ	γ	β	α
β	α	δ	γ
γ	δ	α	β

Mais on peut en imaginer d'autres, par exemple :

α	β	γ	δ
γ	δ	α	β
δ	γ	β	α
β	α	δ	γ

Deux carrés latins à n lignes et n colonnes, chacun constitué avec n symboles, *s*ont qualifiés d'**orthogonaux** si leur superposition compose un nouveau carré constitué avec 2n symboles comportant les n×n couples différents possibles. Ce nouveau carré est alors appelé **"gréco-latin".**

Si on superpose le carré latin de lettres latines ci-dessus et le premier carré latin de lettres grecques ci-dessus on obtient :

Aα	Bβ	Cγ	Dδ
Dδ	Cγ	Bβ	Aα
Bβ	Aα	Dδ	Cγ
Cγ	Dδ	Aα	Bβ

Ce n’est pas un carré gréco-latin. On y retrouve quatre couples différents Aα, Bβ, Cγ, Dδ (chacun écrit quatre fois) et non 16 couples différents. C’est un carré latin mais non gréco-latin.

Mais si on superpose le carré latin de lettres latines ci-dessus et le deuxième carré latin de lettres grecques ci-dessus on obtient :

Aα	Bβ	Cγ	Dδ
Dγ	Cδ	Bα	Aβ
Bδ	Aγ	Dβ	Cα
Cβ	Dα	Aδ	Bγ

Et là c’est un carré gréco-latin car les 16 couples sont différents.

Carré latin diagonal

Sur les grandes diagonales du carré ci-dessous les quatre éléments ne sont pas différents, contrairement à ce qui se passe sur chaque ligne et chaque colonne…

1	2	3	4
2	1	4	3
3	4	2	1
4	3	1	2

Il s’agit d’un carré latin, mais non diagonal

Cependant sur les quatre premiers carrés latins du début de ce chapitre (le Sudoku, les carrés de lettres latines ou grecques) on trouvait sur les grandes diagonales tous les éléments différents. C’étaient des carrés latins diagonaux.

Différences avec la notion de carré magique

Avec n² nombres on peut fabriquer un carré magique d’ordre n.
Un carré de n×n nombres est magique quand la somme des nombres de chaque ligne, de chaque colonne, et de chaque diagonale donne le même total.
On a vu qu’un Sudoku était un carré latin.
Le Sudoku écrit en début d’article est un carré latin diagonal, c’est aussi un carré magique, de somme 10.
Mais le carré de chiffres juste ci-dessus, qui est latin mais non diagonal, n’est pas un carré magique à cause de ses diagonales. Remarquons que ce n’est pas non plus un Sudoku : on ne peut pas faire de régionnement par quarts de carré des quatre valeurs.
Toutefois on peut avoir un Sudoku qui ne soit pas un carré magique, voici un exemple, sous forme d’un Sudoku carré latin non diagonal :

1	2	3	4
3	4	1	2
4	1	2	3
2	3	4	1

Comment construire des carrés magiques 4×4 ou 5×5 à partir d'une structure de carré gréco-latin diagonal de même dimension ?

Voici, constitué à partir de 4 lettres grecques (α, β, γ, δ) et de 4 lettres latines (A, B, C, D) un carré gréco-latin de 4×4= 16 cases comportant les couples formés avec en première position à gauche une lettre latine, et en seconde position une lettre grecque…

Aα	Bβ	Cγ	Dδ
Dγ	Cδ	Bα	Aβ
Bδ	Aγ	Dβ	Cα
Cβ	Dα	Aδ	Bγ

Observez :
- les 16 couples sont différents
- chaque symbole grec figure une seule fois dans chaque ligne, chaque colonne, chaque grande diagonale du carré
- chaque symbole latin figure une seule fois dans chaque ligne, chaque colonne, chaque grande diagonale du carré

Cette structure peut être conservée en prenant des cartes à jouer, par exemple :

- en remplaçant le caractère latin par "la valeur" d'une carte parmi l'ensemble {valet (V), dame (D), roi (R), as (1)},

- et en remplaçant le caractère grec par "la famille" d'une carte parmi l'ensemble {trèfle (T), carreau (K), cœur (C), pique (P)}. On obtient ainsi :

VT	DK	RC	1P
1C	RP	DT	VK
DP	VC	1K	RT
RK	1T	VP	DC

Dans ce tableau, chaque valeur figure une et une seule fois dans chaque ligne, chaque colonne, chaque grande diagonale; et chaque famille figure une et une seule fois dans chaque ligne, chaque colonne, chaque grande diagonale.

On peut jouer avec les 16 cartes utiles à fabriquer un tel tableau, respectant les contraintes ci-dessus, en prenant comme départ soit une ligne, soit une colonne, soit une grande diagonale. C'est une sorte de jeu de double Sudoku, et bien des gens du "grand public" sont capables de réussir ce challenge. Par contre si on leur demande de réussir un carré magique ayant une somme donnée, peu de personnes s'en diront capables…

Pourtant, une fois le tableau obtenu, on peut jouer à fabriquer un carré magique constitué de 16 entiers positifs, dont la somme des 4 nombres de chaque ligne, chaque colonne, chaque grande diagonale, sera toujours le même nombre. Avec les nombres de 1 à 16, la somme magique sur chaque ligne, colonne ou diagonale sera le quart du total des 16 nombres de 1 à 16, c'est-à-dire (1/4) (16 × 17/4) = 34.

8	**10**	**13**	**3**
15	**1**	**6**	**12**
2	**16**	**11**	**5**
9	**7**	**4**	**14**

On peut fabriquer des carrés magiques de 16 entiers positifs dont la somme est supérieure ou égale à 34 ainsi :
- Si S désigne la somme voulue, on calcule S−34, qu'on va essayer de répartir équitablement dans chacune des 4 cases de chaque ligne, colonne ou diagonale ce qui va augmenter les nombres utilisés, qui seront donc plus grands que les entiers de 1 à 16.
- Mais (S−34)/4 n'est pas toujours un entier, il va y avoir souvent un reste r non nul ; désignons par q le quotient de la division entière de (S−34) par 4, et suivons la démarche suivante…

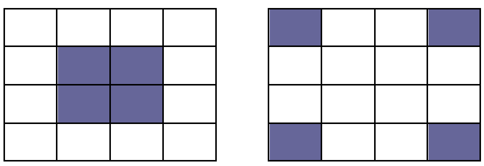
- On va écrire dans les cases, sous les cartes, des nombres, en respectant la succession des valeurs dans l'ordre V, D, R, 1, ceci pour les familles dans l'ordre T, K, C, P.
  - On attribue pour les trèfles les valeurs (1+q) au valet, (2+q) à la dame, (3+q) au roi et (4+q) à l'as ;
  - On attribue pour les carreaux les valeurs (5+q) au valet, (6+q) à la dame, (7+q) au roi, (8+q) à l'as ;
  - On attribue pour les coeurs les valeurs (9+q) au valet, (10+q) à la dame, (11+q) au roi, (12+q) à l'as ;
  - On attribue pour les piques les valeurs (13+q+r) au valet, (14+q+r) à la dame, (15+q+r) au roi, (16+q+r) à l'as.
  - Vous remarquerez qu'en plus de l'ajout fait aux nombres de 1 à 16 de la correction de q pour chaque case, une petite correction supplémentaire valant r a été attribuée aux piques qui figurent une seule fois dans chaque ligne, colonne ou diagonale
  - **Voici un exemple : pour fêter l'anniversaire de Papy qui a 79 ans, on lui construit un carré magique de somme 79.**

On calcule 79−34 = 45, puis 45 = 4×11+1 donc q=11 et r=1.
La valeur inférieure du carré est 1+q=1+11 = 12, c'est la case « valet de trèfle"».
Les trèfles vaudront de 12 à 15. Les carreaux vaudront de 16 à 19, les cœurs de 20 à 23.
Les piques ne commenceront pas à 24 mais, avec r = 1, à 25, et vaudront donc de 25 à 28. Voici le résultat, carré de somme magique 79 :

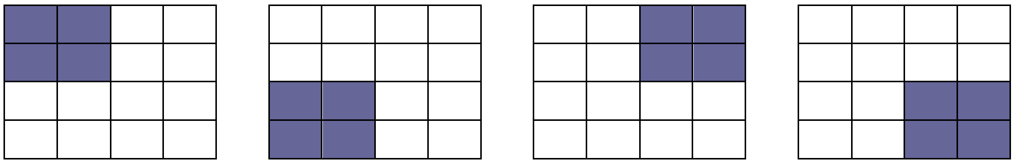
12	17	22	28
23	27	13	16
26	20	19	14
18	15	25	21

On peut remarquer que le carré magique a aussi quelques propriétés supplémentaires : on obtient la même somme magique en ajoutant…

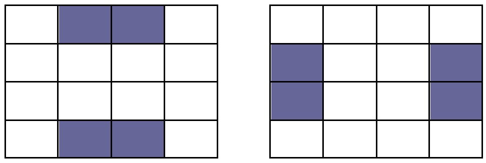
- dans les quatre cases centrales ou aux quatre coins



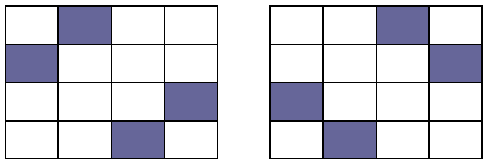
- dans chaque quart de tableau



- sur les milieux des côtés opposés



- ou encore positionnés ainsi…



Passons à la dimension supérieure, c'est-à-dire au carré 5×5 de 25 cases.

On peut construire un carré gréco-latin avec, dans le rôle des 5 lettres latines les valeurs 1 à 5 de cartes, et dans le rôle des 5 lettres grecques les familles T, K, C, P et enfin en cinquième A comme "atouts", toutes ces 25 cartes étant disponibles dans un jeu de tarots.

Comment réaliser le carré gréco-latin ?

On peut s'aider d'un papier et d'un crayon, et commencer par répartir les valeurs, par exemple de ligne en ligne en faisant simplement un petit décalage, comme une coupe d'un paquet de cartes : on fait passer le bloc des deux valeurs de droite vers la gauche quand on change de ligne. Par exemple de la ligne 1 vers la ligne 2, le bloc de droite 45 passe à gauche et le bloc 123 est décalé à droite. On poursuit ainsi de ligne en ligne. On obtient ceci…

1	2	3	4	5
4	5	1	2	3
2	3	4	5	1
5	1	2	3	4
3	4	5	1	2

Il faut superposer maintenant ainsi les familles, à partir de TKCPA en première ligne et TCAKP en première colonne à gauche…

1T	2K	3C	4P	5A
4C	5	1	2	3
2A	3	4	5	1
5K	1	2	3	4
3P	4	5	1	2

En respectant maintenant sur chaque colonne, de haut en bas, la succession en cycle des valeurs (KPTCA), le tableau se construit vite :

1T	2K	3C	4P	5A
4C	5P	1A	2T	3K
2A	3T	4K	5C	1P
5K	1C	2P	3A	4T
3P	4A	5T	1K	2C

On vérifie que c'est bien un carré gréco-latin diagonal de 25 valeurs différentes.

Voyons maintenant comment fabriquer grâce à ce tableau un carré magique… Remarquons d'abord qu'avec les nombres de 1 à 25, chacune des 5 lignes, des 5 colonnes, des grandes diagonales doit avoir pour somme invariante le cinquième du total des nombres de 1 à 25 soit $(1/5)\ (25\times26/2) = 65$. Avec des entiers positifs on peut donc fabriquer des carrés magiques de somme supérieure ou égale à 65.

Soit S la somme magique souhaitée, puis dans la division de $(S-65)$ par 5 le quotient q et le reste r, on va attribuer les valeurs suivantes dans les cases occupées par les cartes :
- pour les trèfles de 1 à 5, les valeurs 1+q, 2+q, 3+q, 4+q, 5+q
- pour les carreaux de 1 à 5, les valeurs 6+q, 7+q, 8+q, 9+q, 10+q
- pour les cœurs de 1 à 5, les valeurs 11+q, 12+q, 13+q, 14+q, 15+q
- pour les piques de 1 à 5 , les valeurs 16+q, 17+q, 18+q, 19+q, 20+q
- pour les atouts de 1 à 5, les valeurs 21+q+r, 22+q+r, 23+q+r, 24+q+r, 25+q+r.

Exemple: vous souhaitez un carré magique 5×5 de somme magique 72…
$72-65 = 7$; dans la division de 7 par 5 le quotient vaut q = 1 et le reste r = 2. On obtient le tableau :

2	8	14	20	28
15	21	24	3	9
25	4	10	16	17
11	12	18	26	5
19	27	6	7	13

C'est bien un carré de somme magique 72 sur chaque ligne, chaque colonne, chaque grande diagonale.

<u>Tour 5 : </u>en hommage à Raphael Robbe…

Le vendredi 6 mars 2015, TF1 a innové en proposant une émission mettant à l'honneur des personnes dotées de facultés cérébrales exceptionnelles.
Le trophée des Extra-ordinaires a consacré un prof de maths, Raphaël Robbe, pour un exploit peu banal… Vous pouvez voir la vidéo sur WAT

http://www.wat.tv/video/raphael-maths-dans-peau-79mrr_79g2z_.html

Trois invités ont choisi chacun un nombre entre 1 et 9, ce qui a permis au présentateur de constituer le nombre 547. Ensuite sur un échiquier que Raphaël ne voit pas, on repère les cases à partir du coin en bas à gauche, de A à H sur l'horizontale, de 1 à 8 sur la verticale.
La première case choisie par un invité était C4, Raphaël a demandé d'y écrire le nombre 44. Raphaël a annoncé ensuite chaque case par sa référence puis le nombre qu'il souhaitait mettre

dedans, avec la particularité suivante : les cases à remplir se succèdent selon le parcours d'un cavalier. On rappelle qu'il s'agit de sauter 2 cases dans une direction horizontale ou verticale, et en même temps 1 case dans l'autre direction (verticale ou horizontale).

		x		x		
	x				x	
			D			
	x				x	
		x		x		

(D est la case de départ du cavalier ; les croix x indiquent les positions possibles d'arrivée)

Ainsi en deuxième case, Raphaël a annoncé la A3, avec à écrire dedans le nombre 59, et a continué, toujours à l'aveugle, jusqu'à la 64^{e} case, la D6, où il voulait qu'on écrive 66. Sans aucune erreur, le tableau obtenu ci-dessous possède la propriété d'avoir pour somme 547 sur chaque ligne et chaque colonne. Ce n'est pas un carré magique car la somme des diagonales n'est pas le même nombre, mais c'est un carré semi-magique.

72	62	130	47	38	34	75	89
68	64	55	45	42	139	81	53
57	43	70	66	51	79	141	40
49	133	61	73	76	88	35	33
65	67	44	56	140	41	54	80
59	71	50	131	31	37	90	78
46	58	63	69	82	52	39	138
132	49	74	60	87	77	32	36

Voici l'ordre du parcours de son cavalier :
C4.A3.B1.D2.F3.E1.G2.H4.G6.H8.F7.E5.D3.B4.A2.C1.E2.G1.H3.F4.H5.G7.E8.F6.E4.F2.
H1.G3.F1.H2.G4.E3.F5.H6.G8.E7.C3.D8.B7.A5.B3.A1.C2.D4.E6.G5.H7.F8.D7.B8.A6.C5.
A4.B2.D1.C3.D5.C7.A8.B6.C8.A7.B5.D6.

Voici la succession des nombres dans l'ordre de leur écriture :
44,59,49,69,37,87,39,80,141,89,139,76,131,67,46,74,82,32,78,41,33,81,38,79,140,52,36,90,
77,138,54,31,88,40,75,42,70,47,64,48,71,132,63,56,51,35,53,34,45,62,57,61,65,58,60,50,73,
55,72,43,130,68,133,66.

Nous vous proposons de réfléchir ensemble et de trouver quelques lumières sur les méthodes de réalisation d'un tel défi…

A propos de la somme magique…

Il y a 64 cases, et on souhaite que les nombres utilisés soient tous différents. Prenons les nombres de 1 à 64. La somme de toutes les cases du carré vaut : 1+2+3 ...+ 64 = 64×65/2= 32×65 ce qui égal aussi à 8×260. Il faut donc que la somme de chacune des huit lignes et de chacune des huit colonnes soit égale à 260.

Pour obtenir une somme inférieure à 260, il faudrait utiliser des nombres négatifs, ce qui n'est pas très « grand public ». Le présentateur télé va favoriser une autre situation. On peut penser que si le premier invité choisissait un 1, le présentateur l'utiliserait comme chiffre des unités et non des centaines, et on peut prédire sans trop de risque d'erreur que les invités vont choisir des chiffres différents et en particulier que le troisième invité ne reprendrait pas un 1.

Parmi les sommes supérieures à 260, il y en a qui sont faciles à obtenir si l'on connait le carré semi-magique de somme 260. Ainsi, imaginons qu'on ajoute 1 à chaque case de ce dernier (donc fabriqué avec les nombres de 2 à 65), on aura un carré de somme 268 pour les 8 cases de chaque ligne, de chaque colonne. De même on obtiendra la somme 276 = 260 +2×8 en ajoutant 2 à chaque case du carré de somme 260, et toutes les sommes de forme 260 +8k seront faciles à obtenir. Pour les sommes distantes de 260 d'un nombre qui n'est pas multiple de 8, c'est-à-dire les sommes de forme (260+8k + r) avec k et r entiers et $0<r<8$, on peut augmenter toutes les cases de k mais en plus il faut essayer d'augmenter de r une case seulement de chaque ligne et chaque colonne. Ceci n'est pas simple si l'on veut que les 64 nombres soient différents, aussi aimerait-on que les 8 dernières cases (les plus élevées) soient réparties une par colonne, une par ligne : pourtant ce n'est pas le cas dans le carré fabriqué par Raphaël, qui a donc trouvé une autre tactique. (On peut vérifier qu'il n'a pas utilisé 56 premières valeurs consécutives suivies d'un trou, puis de 8 valeurs consécutives supérieures).

A propos du parcours du cavalier sur un échiquier

Il s'agit de parcourir successivement les 64 cases de l'échiquier, uniquement avec des sauts de cavalier, et sans jamais repasser deux fois sur la même case. On peut faire des recherches complètes par ordinateur. Ceci est possible à partir de n'importe quelle case de départ sur les 64, mais les solutions seront recherchées à partir seulement de 10 origines sur l'échiquier qui permettent par rotation et par symétrie d'obtenir toutes les possibilités. Ces 10 cases sont appelées "zone de départ". Si les cases de l'échiquier sont numérotées de 1 à 64, de gauche vers la droite et ligne par ligne. La zone de départ comprend les cases 1, 2, 3, 4, 10, 11, 12, 19, 20, 28.

			28				
		19	20				
	10	11	12				
1	2	3	4				

Le mathématicien Euler a trouvé 280 solutions qui ne sont pas indépendantes. Par une série de rotations et de symétries axiales, chaque solution trouvée génère 7 autres solutions.

De plus, chaque solution S, obtenue a partir d'une origine donnée, possède une solution **duale** S', dont l'origine est la case d'arrivée de S, et dont le chemin est exactement le chemin inverse de S. Par une série de rotations et de symétries, la case d'arrivée d'une solution peut être placée dans la zone de départ. En partant de cette case, on peut donc obtenir une solution qui a déjà été trouvée : chaque solution est donc trouvée 2 fois. (Il n'y a pas de solution auto-duale). Parmi les 280 solutions trouvées, 126 sont formées de chemins fermés. Un chemin fermé est un chemin dont la dernière case, la 64^{e} est à un saut de cavalier de la case de départ la 1ère. Dans un chemin fermé, on peut ainsi décaler chacune des cases, la case de départ 1 devenant 2, la 2 devenant 3 ... la case 63 devenant 64 et la case 64 devenant la case de départ 1. Il est possible de faire cette opération 63 fois pour obtenir 63 autres solutions.

Le site d'adresse http://ydenef.free.fr/280solutions_10tab.htm fournit un travail remarquable que je vous invite à consulter pour une réflexion plus complète.

En tenant compte de ces relations particulières entre chemins fermés, il n'y a que 108 solutions indépendantes, c'est à dire 108 solutions qui n'ont pas de relations de symétrie ou de décalage. Ces 108 solutions sont constituées de 77 solutions ouvertes (l'arrivée n'est pas à un bond de cavalier du départ) et de 31 solutions fermées (l'arrivée est à un bond de cavalier du départ).

Dans le défi de Raphaël Robbe, c’est un invité qui donne la case de départ. Raphaël a donc intérêt à connaître par cœur un certain parcours fermé particulier du cavalier et à pouvoir le suivre à partir de la case quelconque choisie.

Un petit miracle

Le parcours du cavalier peut avoir des propriétés remarquables. Sur chaque case de l'échiquier on écrit maintenant son numéro dans le parcours de déplacement : la case de départ vaut 1, la dernière case atteinte vaut 64.

Toutes les solutions de carrés magiques 8×8, obtenues à partir d'un déplacement de cavalier, ont été cherchées par ordinateur.

Aucune d'entre elles ne vérifie la contrainte magique sur la diagonale, mais on a trouvé des carrés semi-magiques**, c'est à dire des carrés ou la somme des lignes et la somme des colonnes est identique, et égal à 260 (avec ces nombres de 1 à 64),** en voici un ci-dessous (une diagonale fait 292 et l’autre 236 ; le bond de 64 vers 1 pourrait se faire en imaginant le déplacement de la colonne d’extrême gauche vers la droite de celle qui contient 64).

54	27	44	5	56	25	42	7	260
45	4	55	26	43	6	57	24	260
28	53	34	15	22	59	8	41	260
3	46	21	60	33	16	23	58	260
52	29	14	35	20	61	40	9	260
47	2	49	32	13	36	17	64	260
30	51	12	37	62	19	10	39	260
1	48	31	50	11	38	63	18	260
								292
260	260	260	260	260	260	260	260	
								236

On s’écarte là un peu de ce qu’a imaginé Raphaël qui ne donnait pas des nombres se succédant régulièrement de bond en bond, mais ceci peut nous aider à réaliser un carré semi-magique de somme donnée, par exemple 547, bien sûr avec nos yeux grands ouverts, et non à l’aveugle comme Raphaël, mais ce serait déjà bien, n’est-ce pas ?

Avec la méthode basée sur la somme 260 pour les nombres de 1 à 64, on veut répartir la différence sur huit cases : 547 – 260 = 287; 287 = 8×35 +7.

On commencerait la succession de nombres avec 1+35 = 36 au lieu de 1. On irait jusqu’à 56+35 = 91. Pour les huit dernières cases on démarrerait non de 92 mais de 92+7 = 99 jusqu’à 107 (ce qui revient à un décalage de 35+7 = 42 pour ces huit dernières cases). Mais il faudrait que les 8 dernières cases soient 1 par ligne 1 par colonne, ce qui n’est pas le cas avec les cases 57 à 64 de notre carré ci-dessus…

Peut-on trouver un parcours de cavalier donnant un carré semi-magique avec les nombres de 1 à 64, et avec 8 cases successives respectant la règle « 1 par ligne, 1 par colonne », et si possible les 8 dernières ? En voici un :

18	31	56	37	16	33	58	11	260
55	38	17	32	57	12	15	34	260
30	19	40	53	36	59	10	13	260
39	54	29	20	9	14	35	60	260
28	3	46	41	52	61	22	7	260
45	42	27	4	21	8	51	62	260
2	47	44	25	64	49	6	23	260
43	26	1	48	5	24	63	50	260
								252
260	260	260	260	260	260	260	260	232

Les nombres de 48 à 56 sont bien « 1 par ligne, 1 par colonne » (mais pas les nombres 57 à 64). Si nous renumérotons pour avoir : les 8 dernières cases respectant 1 par ligne, 1 par colonne, en décalant tous les nombres de 8 (56 devient 64 par exemple) on obtient ceci…

26	39	64	45	24	41	2	19
63	46	25	40	1	20	23	42
38	27	48	61	44	3	18	21
47	62	37	28	17	22	43	4
36	11	54	49	60	5	30	15
53	50	35	12	29	16	59	6
10	55	52	33	8	57	14	31
51	34	9	56	13	32	7	58

Et malheur, vérifiez-le : renuméroter change les sommes des lignes et colonnes !

Heureusement en cherchant encore parmi les parcours fermés, on trouve une solution, le **carré K** semi-magique ci-dessous :

58	31	16	37	56	33	18	11	260
15	38	57	32	17	12	55	34	260
30	59	40	13	36	53	10	19	260
39	14	29	60	9	20	35	54	260
28	3	46	41	52	61	22	7	260
45	42	27	4	21	8	51	62	260
2	47	44	25	64	49	6	23	260
43	26	1	48	5	24	63	50	260
								286
260	260	260	260	260	260	260	260	312

Cette fois-ci les 8 derniers nombres (de 57 à 64) sont bien 1 par ligne, 1 par colonne… D'où la solution pour 547 : (on augmente, par rapport au carré K, de 35 les cases qui valaient de 1 à 56, et de 42 les cases qui valaient de 57 à 64).

90	66	51	72	91	68	53	46
50	73	99	67	52	47	90	69
65	101	75	48	71	88	45	54
74	49	64	102	44	55	70	89
63	38	81	76	87	103	57	42
80	77	62	39	56	43	86	104
37	82	79	60	106	84	41	58
78	61	36	83	40	59	105	85

Conclusion : en vous basant sur K, l'avant dernier carré ci-dessus, vous pouvez réaliser tout carré semi-magique demandé de somme supérieure ou égale à 260.

<u>Revenons à l'exploit de Raphaël…</u>

Observons son tableau : il utilise les nombres de 31 à 82 (soit 52 nombres) puis de 87 à 90, de 130 à 133, de 138 à 141. Le début à 31 = 1 +30 c'est comme s'il voulait une somme de 500 soit 260 (somme magique pour nombres de 1 à 64) augmenté de 240 (= 30×8).

On peut imaginer que pour s'épargner un gros travail de mémoire Raphaël utilise toujours les mêmes 52 premiers nombres et qu'il a trouvé une tactique pour ajuster les 12 suivants selon la somme demandée. Il reste qu'il est capable de se souvenir du cycle des 64 sauts de cavalier, à partir de toute case, et des nombres de 1 à 64 qui iraient dedans (avant correction), qu'il est capable de maîtriser ses émotions pour faire sans erreur 64 calculs adaptés à la somme voulue, et tout ceci les yeux fermés, sans vérification visuelle possible pendant tout le remplissage du tableau ! Chapeau l'artiste !