Mathématiques sans calculatrice…

Savez-vous calculer la racine carrée
ou la racine cubique d'un nombre positif donné ?

Vous savez que $5^2 = 25$: le carré de 5 est 25, et la racine carrée de 25 est 5.
La racine carrée d'un nombre positif A est le nombre positif dont le carré est égal à A.
On note la racine carrée de A par le symbole $\sqrt{A}$.
Ainsi $\sqrt{25} = 5$ et $\sqrt{25} \times \sqrt{25} = 25$.
Sur la calculatrice une touche spéciale permet d'obtenir le résultat du calcul d'une racine carrée.

De même $5^3 = 125$: le cube de 5 est 125 et la racine cubique de 125 est 5.
La racine cubique d'un nombre A est le nombre dont le cube est égal à A.
La notation habituelle de la racine cubique utilise un chiffre 3 écrit en haut à gauche du symbole radical. Ainsi $\sqrt[3]{125} = 5$, et $\sqrt[3]{125} \times \sqrt[3]{125} \times \sqrt[3]{125} = 125$.
Sur certaines calculatrices cette touche « racine cubique » existe et donne instantanément la réponse. Sur d'autres calculatrices cette touche ne figure pas, il faut alors utiliser la touche « puissance », avec un exposant à taper qui est (1/3). Ainsi $125^{1/3} = 5$.

Comment faisait-on, avant l'apparition des calculatrices dans les établissements scolaires, pour calculer une racine carrée ou une racine cubique ?
Pour la racine cubique il y a un procédé de calcul qui est une curiosité, et qu'on trouve très rarement dans les livres modernes, mais parfois dans des ouvrages centenaires.
Pour la racine carrée, le procédé d'extraction était encore au programme du collège il y a 30 ans. Les collégiens devaient savoir la calculer à la main ! Incroyable, non ?

Voilà vraisemblablement comment votre grand père ou votre père ont appris à **poser l'extraction de la racine carrée** « à la main » de 9783758,41.

9 78 37 58 , 41	$\boxed{3127{,}9}$
– 9	$3^2 = 9$
= 0 78	
– 61	61 × 1 = 61
= 17 37	
– 12 44	622 × 2 = 1244
= 4 93 58	
– 4 37 29	6247 × 7 = 43729
= 56 29 , 41	
– 56 29 , 41	62549 × 9 = 562941
= 0	

On présente selon une disposition qui ressemble à celle d'une division, avec le nombre A, dont on veut trouver la racine carrée, écrit en haut à gauche ; mais la réponse (la racine carrée) sera écrite dans la case encadrée en haut à droite.

On commence par partager les chiffres de A en paquets de deux chiffres à partir de la virgule, dans les deux sens à partir de celle-ci. Il peut arriver comme dans notre exemple que le bloc le plus à gauche ne contienne qu'un seul chiffre (comme ici : 9).
On cherche quel est le plus grand carré d'un entier qui est inférieur ou égal au nombre du bloc de gauche. Ici c'est 9, qui est le carré de 3. On écrit 3 dans la case encadrée en haut et à droite, qui sera la case réponse du calcul de cette racine carrée. On effectue la soustraction $9 - 9 = 0$, et on abaisse à côté non pas le chiffre suivant mais le bloc de deux chiffres suivant (ici 78).
Il faut maintenant doubler la valeur actuelle de la case réponse, ici $2 \times 3 = 6$, et imaginer un chiffre « c » écrit à sa droite, ce qui donne un nombre valant environ une soixantaine, qu'on multiplie par le même chiffre « c ». Avec $c = 1$ on obtient 61, qui « entre bien » dans 78. On ne peut pas prendre plus, par exemple si on envisage $c = 2$, on aurait $62 \times 2 = 124$ qui serait trop grand pour entrer dans 78. On reporte la valeur 1 dans la case réponse, qui contient alors 31, début de l'écriture de la racine cherchée. On soustrait $78 - 61 = 17$, et on abaisse le bloc de deux chiffres 37. On obtient le nombre 1737.
On double la valeur de la case réponse : $31 \times 2 = 62$. On imagine un chiffre « c » écrit à droite, ce qui donne un nombre supérieur à 620. On envisage sa multiplication par « c », et il faut que le résultat soit le plus grand possible à entrer dans 1734.
On trouve $c = 2$, et $622 \times 2 = 1244$. On soustrait 1244 de 1737, il reste 493, on abaisse à sa droite le bloc 58 pour obtenir le nombre 49358. On reporte dans la case réponse le 2 trouvé. La case réponse contient alors 312.
On double 312 pour obtenir 624, on imagine un chiffre à sa droite, d'où un nombre supérieur à 6240, qu'on multiplie par le même chiffre de façon à entrer dans 49 358. On peut essayer 8 mais le résultat sera trop grand. On se replie sur 7, qu'on reporte dans la case réponse qui contient alors la racine carrée entière cherchée : 3127. Si on veut poursuivre après la virgule, on utilise la même tactique : d'un côté abaisser un bloc de deux chiffres, de l'autre doubler le résultat provisoire de la racine, lui essayer un chiffre supplémentaire, etc.
Ici le résultat tombe juste : la racine carrée de 9783758,41 est 3127,9 et l'on peut vérifier que $3\,127{,}9^2 = 9\,783\,758{,}41$.

Comment justifier ce procédé ?
Prenons le nombre 13. Le plus grand carré d'entier qui est inférieur à 13 est 9, dont la racine carrée est 3. (Le carré de 4, soit 16, serait trop grand pour 13.)
On peut dire que 3 est la racine carrée entière du nombre 13, et de plus $13 = 3^2 + 4$.
Soit A un nombre dont on cherche la racine carrée. Soit x^2 le plus grand carré d'entier inférieur ou égal à A.
On a $A = x^2 + R$ avec R entier positif éventuellement nul et $x^2 \leq A < (x + 1)^2$.
Faisons la division entière de x par 10, on obtient $x = 10d + u$ où u est le chiffre des unités de x et d le nombre de dizaines contenues dans x. On obtient $A = (10d + u)^2 + R$.
Calculons $A - (10d)^2 = (10d + u)^2 + R - 100d^2 = 100d^2 + 20du + u^2 + R - 100d^2$
$= 20du + u^2 + R = (20d + u)(u) + R$.
Ce résultat va nous servir à justifier le procédé d'extraction de la racine carrée « à la main ».
On va calculer les chiffres de la racine carrée de A un à un, dans leur écriture de la gauche vers la droite.
Dans un premier temps, après avoir découpé A en blocs de deux chiffres, depuis la place de la virgule, on va imaginer la partie A'du nombre A qui s'écrit avec les deux blocs de gauche seulement. On cherche quel est le plus grand carré (d^2) qui entre dans celui des deux blocs de deux chiffres le plus à gauche, et on va le soustraire (ce qui correspond à faire l'opération $A' - (10d)^2$), et on obtient un reste partiel auquel on colle le deuxième bloc de gauche : on obtient un nombre A''. Le nombre « d » est le premier chiffre à gauche de l'écriture de la racine carrée de A' et aussi de celle de A.

Dans un deuxième temps, connaissant d, on cherchera par tâtonnements la valeur de u rendant (20d + u) (u) le plus proche possible de A’’, tout en lui restant inférieur ou égal, avec un reste positif le plus proche possible de zéro. Le nombre u sera le deuxième chiffre à partir de la gauche de l’écriture de la racine carrée. Par la suite, le nombre « d » précédent est remplacé par le nombre qui s’écrit « du ». Etc. : on recommencera cette dernière tactique jusqu’à obtenir tous les chiffres voulus pour la racine carrée.

Exemple pour la racine carrée de 149769…

14 97 69	387		
– 9	3² = 9	d = 3	d = 38
= 5 97	20d	60	760
– 5 44	+ u	+ 8	+ 7
= 53 69	= (20d + u)	= 68	= 767
– 53 69	× u	× 8	× 7
= 0	= (20d+u)(u)	= 544	= 5369

Le plus grand carré inférieur à 14 est 9 et d = 3.
On a collé à droite du reste partiel 5 le bloc 97 pour obtenir 597.
Maintenant, on applique la tactique du deuxième temps :
si on essaie u = 9 on arrive à (60 + 9) × 9 = 621 qui est trop grand pour 597.
On se replie donc sur u = 8.
Un nouveau reste partiel est 53 auquel on colle à droite le bloc 69 pour obtenir le nombre 5369. On a alors provisoirement dans la case réponse d = 38.
On suit le modèle et on essaie le chiffre suivant 7 pour la nouvelle valeur de u, ce qui permet de conclure car on tombe sur une racine carrée entière exacte.
Finalement la racine carrée de 149 769 est 387. On peut vérifier que 387² = 149 769.

L’extraction de la racine cubique d’un nombre « à la main », peut se justifier avec beaucoup de ressemblances avec celle de la racine carrée.
Soit A un nombre dont on cherche la racine cubique. Soit x^3 le plus grand carré d’entier inférieur ou égal à A.
On a A = $x^3 + R$ avec R entier positif éventuellement nul et $x^3 \leq A < (x + 1)^3$.
Faisons la division entière de x par 10, on obtient x = 10d + u où u est le chiffre des unités de x et d le nombre de dizaines contenues dans x. On obtient $A = (10d + u)^3 + R$.
Calculons $A - (10d)^3 = (10d + u)^3 + R - 1000d^3$

$$= 1000d^3 + 300d^2u + 30du^2 + u^3 + R - 1000d^3$$
$$= 300d^2u + 30du^2 + u^3 + R = (300d^2 + 30du + u^2)(u) + R.$$

Ce résultat va nous servir à justifier le procédé d’extraction de la racine cubique « à la main ».
Dans un premier temps, après avoir découpé A en blocs de trois chiffres, depuis la place de la virgule, on va imaginer la partie A’du nombre A qui s’écrit avec les deux blocs de gauche seulement. On cherche quel est le plus grand cube (d^3) qui entre dans celui des deux blocs de deux chiffres le plus à gauche, et on va le soustraire (ce qui correspond à faire l’opération A’ – $(10d)^3$), et on obtient un reste partiel auquel on colle le deuxième bloc de gauche : on obtient un nombre A’’. Le nombre « d » est le premier chiffre à gauche de l’écriture de la racine cubique de A’ et aussi de celle de A.

Connaissant « d », on cherchera par tâtonnements la valeur de u rendant $(300d^2 + 30du + u^2)(u)$ le plus proche possible de A’’ tout en lui restant inférieur ou égal, avec un nouveau reste positif le plus proche possible de zéro. Le nombre u sera le deuxième chiffre à partir de la gauche de l'écriture de la racine cubique. Par la suite, le nombre « d » précédent est remplacé par le nombre qui s'écrit « du ». Etc. : on recommencera cette dernière tactique jusqu'à obtenir tous les chiffres voulus pour la racine cubique.

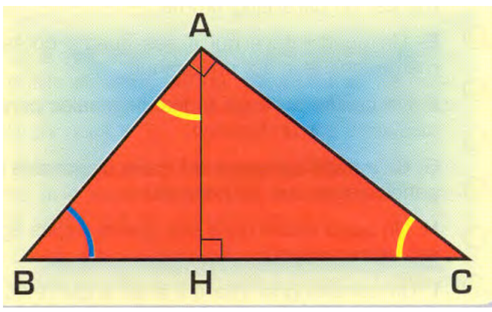
Exemple pour la racine cubique de 195 112.
Attention les chiffres sont à regrouper par bloc de trois chiffres à partir de la position d'une virgule, et non par bloc de deux comme pour la racine carrée. Le bloc de gauche peut être constitué de un, ou deux, ou trois chiffres. S'il y a à poursuivre l'extraction après la virgule, ce sont des blocs de trois zéros qui seront à rajouter vers la droite.

195 112	**58**			
− 125	$5^3 = 125$	d = 5	Essai u = 9	u = **8**
= 70 112	$300d^2$	7500	7 500	7 500
− 70 112	$+ 30du$	+ 150u	+ 1 350	+ 1 200
= 0	$+ u^2$	$+ u^2$	+ 81	+ 64
	$= (300d^2 + 30du + u^2)$	$= (7500 + 150u + u^2)$	= 8 931	= 8 764
	$\times u$	$\times u$	× 9	× **8**
	$= (300d^2 + 30du + u^2)(u)$	$= (7500 + 150u + u^2)(u)$	= 80379 trop grand	= 70112

Après avoir trouvé que 125 est le plus grand cube inférieur à 195, puis avoir écrit la valeur d = 5, on a cherché u selon le modèle. L'essai u = 9 est infructueux, mais u = 8 convient. La racine cubique de 195 112 est 58. On peut vérifier que $58^3 = 195\,112$.

<u>**Exercice**</u> : soit le nombre 9783758,41 dont nous avons calculé tout à l'heure la racine carrée, calculez maintenant sa racine cubique avec une précision d'un chiffre après la virgule.

<u>Le point de vue du géomètre pour la racine carrée…</u>



Soit ABC un triangle rectangle en A, et (AH) la hauteur issue de l'angle droit.

Dans le triangle rectangle ABH : $\tan \hat{B} = \dfrac{AH}{BH}$

Dans le triangle rectangle ACH : $\tan \widehat{CAH} = \dfrac{CH}{AH}$

Dans BAH on a : $\hat{B} + \widehat{BAH} = 90°$.

Dans ABC, l'angle droit A est partagé en deux angles : $\widehat{CAH} + \widehat{BAH} = 90°$.

Des deux égalités précédentes on déduit que $\hat{B} = \widehat{CAH}$..

Comme les angles $\hat{B}$ et $\widehat{CAH}$ sont égaux leurs tangentes sont égales.

On peut donc écrire : $\tan \hat{B} = \tan \widehat{CAH}$ et $\frac{AH}{BH} = \frac{CH}{AH}$ d'où : $AH^2 = BH \times HC$

Ce résultat peut se retenir ainsi :

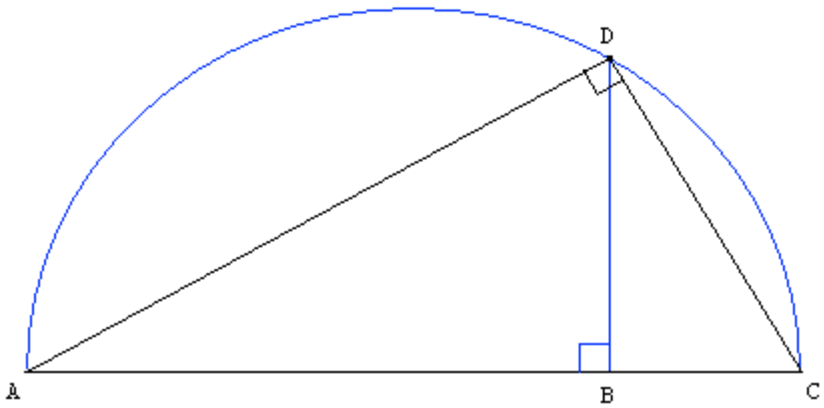
Dans un triangle rectangle, la mesure de la hauteur relative à l'hypoténuse est moyenne proportionnelle entre les mesures des deux segments qu'elle détermine sur celle-ci.

AH est moyenne proportionnelle entre BH et HC.

Application à la construction d'un segment dont la longueur est la racine carrée de la longueur d'un segment donné :

Vous disposez d'une longueur représentée par un segment [AB]. Vous construisez sur la droite (AB), à l'extérieur du segment, du côté opposé à A par rapport à B, le point C tel que la longueur BC soit égale à 1 cm.

Vous dessinez un demi-cercle de diamètre [AC]. Vous tracez la perpendiculaire en B à (AC), elle coupe le demi-cercle en D. Le triangle ADC est inscrit dans un demi-cercle de diamètre AC donc il est rectangle en D. On peut appliquer la propriété précédente : $BD^2 = AB \times BC = AB \times 1 = AB$. Donc la longueur BD sera la racine carrée de la longueur AB.



Le point de vue du mathémagicien pour la racine carrée…

Effet du tour :

Vous demandez à un spectateur de choisir un nombre de **deux** chiffres et de le garder secret, puis de calculer son carré, dont il vous donne le résultat. Vous retrouvez alors le nombre choisi, c'est à dire la racine carrée du nombre annoncé !

Quel est le truc du tour ?

Le carré d'un nombre de deux chiffres vaut entre $10^2 = 100$ (une fois cent) et $100^2 = 10\,000$ (soit cent fois cent) et le nombre de ses centaines permet de connaître le chiffre des dizaines cherché. Il faut observer le nombre de centaines du carré annoncé (il peut être d'un ou deux chiffres). Voilà comment trouver immédiatement le chiffre des dizaines de sa racine carrée…

Exemples :

Si 784 est le carré du nombre, le carré inférieur à 7 le plus proche est 4, dont la racine est 2, donc le chiffre des dizaines de la racine cherchée est 2.
Si 5184 est le carré du nombre, le carré inférieur à 51 le plus proche est 49 donc le chiffre des dizaines est 7.
Si 289 est le carré du nombre, le nombre de centaines est 2. Le chiffre des dizaines de la racine de 289 est celui dont le carré est inférieur à 2 et le plus proche de 2, donc c'est 1.
Vous savez donc dans quelle dizaine se trouve le nombre cherché et il ne vous reste plus qu' à trouver l'unité.
Observez ce simple tableau donnant en deuxième ligne le chiffre des unités des carrés des nombres de 0 à 9 :

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	4	9	6	5	6	9	4	1

Et vous voici devant un dilemme : vous avez deux choix pour trouver le chiffre des unités, sauf si ce chiffre est 5 ou 0. Eh bien, il vous suffit de savoir si votre carré est plus grand ou plus petit que le carré du nombre qui s'écrit d5 (où d désigne le chiffre des dizaines).

Nous vous rappelons donc comment calculer les carrés de nombres se terminant par 5 : vous prenez le nombre de dizaines, vous le multipliez par le nombre obtenu en lui ajoutant 1 et vous « collez » 25 à droite. Exemples :
Pour 35^2 vous calculez $3 \times (3 + 1) = 12$ puis vous écrivez 25 à droite et $35^2 = 1225$.
Pour 75^2 vous calculez $7 \times (7 + 1) = 56$ et $75^2 = 5625$.

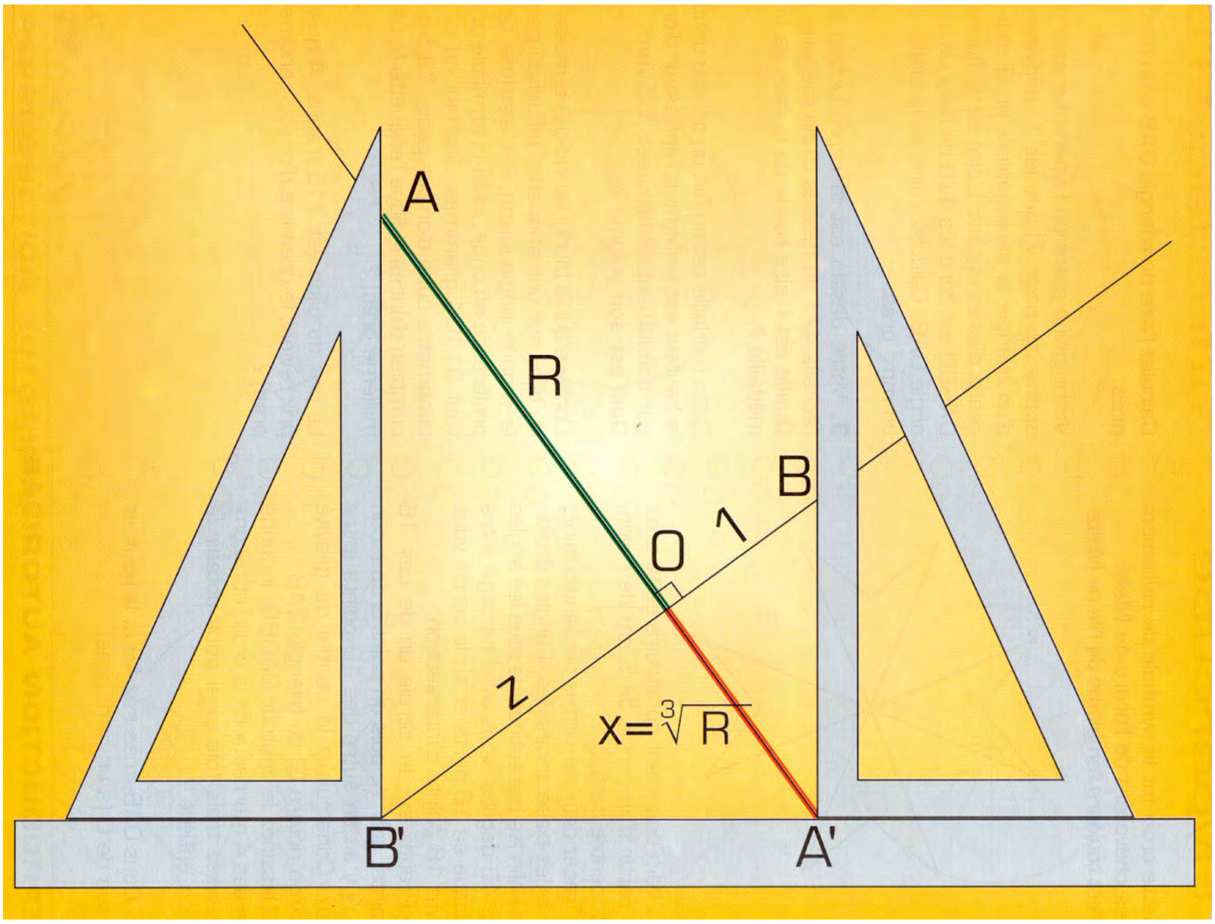
Revenons à nos exemples…
- Pour 289, vous savez que le chiffre des dizaines de la racine est 1, vous calculez $15^2 = 225$. Comme 289 est plus grand que 225, la racine carrée de 289 sera plus grande que 15. La fin du carré en 9 laissait le choix entre 13 et 17 pour la racine de 289, vous savez maintenant que c'est 17.
- Pour 784, le chiffre des dizaines de la racine est 2 ; à cause du 4 en fin de nombre vous hésitez entre 22 et 28. Mais $25^2 = 625$, et 784 est plus grand donc la réponse est 28.
- Pour 5184, le chiffre des dizaines de la racine est 7, vous hésitez entre 72 et 78. Le carré de 75 est 5625, et 5184 est plus petit donc la bonne réponse est 72.

L'extracteur de racine cubique du géomètre.

Vous disposez d'une longueur R dont vous voulez représenter la racine cubique…
Prenez une feuille de papier, et pliez-la de façon à obtenir quatre angles droits de sommet le point O. Reportez le long d'un des plis la longueur R selon OA. Sur le pli perpendiculaire marquez le point B à 1 cm du point O.
Posez sur la feuille une règle et deux équerres coulissant dessus et déplacez l'ensemble. Il faudra tâtonner jusqu'à obtenir la figure ci-dessous…
Les angles droits des équerres en A' et B' devront être sur la règle, mais aussi sur les deux plis, A' en prolongement de (AO) et B' en prolongement de (BO).
La longueur OA' sera la racine cubique de la longueur R.(voir figure)

Quelle est l'explication ?
Revenons un instant à la propriété disant que la hauteur d'un triangle rectangle est moyenne proportionnelle entre les deux segments qu'elle découpe sur l'hypoténuse…
Nous allons l'appliquer deux fois…
Dans B'AA', on a : $OB'^2 = OA \times OA'$.
Dans A'BB', on a : $OA'^2 = OB \times OB' = 1 \times OB' = OB'$.

En élevant au carré on obtient $OB'^2 = OA'^4$. En comparant OB'^2 dans les égalités précédentes on obtient : $OB'^2 = OA'^4 = OA \times OA'$ d'où $OA'^3 = OA$.
La longueur OA' est donc la racine cubique de la longueur OA.



Le point de vue du mathémagicien sur la racine cubique…

Effet :
Le spectateur est invité à choisir un nombre de deux chiffres et à calculer son cube. Il énonce le résultat et le magicien donne immédiatement sa racine cubique, c'est à dire le nombre choisi au départ.
Quel est le truc du tour ?
Pour réussir ce tour, il faut connaître les cubes des nombres de 1 à 10 :

1→1	2→8	3→ 27	4→64	5 →125	6 →216
7 →343	8→512	9→729	10→1000		

On fait les remarques suivantes :
- un entier finit comme son cube si cet entier finit par 1, 4, 5, 6, 9 ou 0
- mais le 2 donne 8, le 3 donne 7 et vice versa.
- On peut donc trouver facilement le chiffre des unités.
- Le cube d'un nombre de deux chiffres vaut entre $10^3 = 1000$ (une fois mille) et $100^3 =$ 1 000 000 (soit mille fois mille) et le nombre de milliers permet de connaître le chiffre des dizaines cherché : parmi les deux cubes qui encadrent le nombre de milliers on choisit la racine du plus petit.

Exemple avec 300 763 :
- à cause du 3 final le chiffre des unités cherché est 7

- le nombre de milliers (300) est entre 216 et 343, la racine du plus petit (216) est 6 qui est donc le chiffre des dizaines cherché

La racine cubique de 300 763 est donc 67.

Pour les amateurs de numéros de calculateurs prodiges en music hall, voici comment certains magiciens procèdent de tête pour trouver **la racine cubique exacte d'un nombre ayant jusqu'à neuf chiffres.** Le nombre est donné par un spectateur après qu'il ait choisi un nombre de trois chiffres et l'ai mis au cube grâce à une calculatrice…

Le magicien partage le nombre donné en 3 paquets de 3 chiffres à partir de la droite. Le paquet de gauche donnera le chiffre C des centaines, et le paquet de droite donnera le chiffre U des unités avec les mêmes astuces que celles ci-dessus. Pour le chiffre D des dizaines c'est plus compliqué !

Le magicien fait la somme des chiffres de rang impair, soit I, et la somme des chiffres de rang pair, soit P, tout cela en prenant les chiffres à partir de la droite.

Ensuite le magicien calcule I – P. Il enlève ou ajoute 11 au résultat de façon à obtenir un nombre entre 1 et 10, soit A. Il fait correspondre à ce nombre A un nombre B ainsi :

A	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
B	1	7	9	5	3	8	6	2	4	10

(Le magicien retient la deuxième ligne assez facilement en se rappelant que la somme des cases symétriques par rapport au centre de la ligne est 11).

Enfin le magicien calcule D = C + U – B. Il ramène éventuellement ce nombre à un nombre entre 0 et 9 en enlevant ou ajoutant 11.

Exemple : pour $263^3 = 18\ 191\ 447$.

A gauche, considérons le 18. On a : 8 < 18 < 27 donc C = 2.

A droite, considérons 447, le 7 final donne U = 3.

On calcule : I = 7 + 4 + 9 + 8 = 28 ; P = 4 + 1 + 1 + 1 = 7 ; puis I – P = 28 – 7 = 21.

On le ramène à : 21 – 11 = 10. On a A = 10 ; on lui associe B = 10.

On calcule D = 2 + 3 – 10 = – 5 qu'on ramène à : – 5 + 11 = 6.

Conclusion : le nombre 263 est la racine cubique de 18 191 447.

Quel cirque ! Je vous dispense de la justification…

Dominique SOUDER

<u>Solution de l'exercice :</u>

	9 783 758	,	410
–	8		
=	1 783		
–	1 261		
=	522 758		
–	402 597		
=	120 161	,	410
–	109 295	,	072
=	10 866	,	338

213,8			
$2^3 = 8$	d=2	d=21	d=213
300d²	1200	132300	13610700
+ 30du	+ 60	+ 1890	+ 51120
+ u²	+ 1	+ 9	+ 64
= (300d² + 30du +u²)	=1261	=134199	= 13661884
× u	× 1	× 3	× 8
= (300d² + 30du +u²)(u)	= 1261	= 402597	= 109295072

La racine cubique de 9783758,41 à 0,1 près est 213,8.

On peut vérifier que $213{,}8^3 + 10866{,}338 = 9783758{,}410$.

Racine carrée de 20 avec quatre chiffres après la virgule

	20 ,	00	00	00	00
–	16				
=	4	00			
–	3	36			
=		64	00		
–		62	09		
=		1	91	00	
–		1	78	84	
=			12	16	00
–			08	94	00
=			03	21	59

4,4721
$2^2 = 4$
84 × 4 = 336
887 ×7 = 6209
8942 × 2 = 17884
89441× 1 = 89441

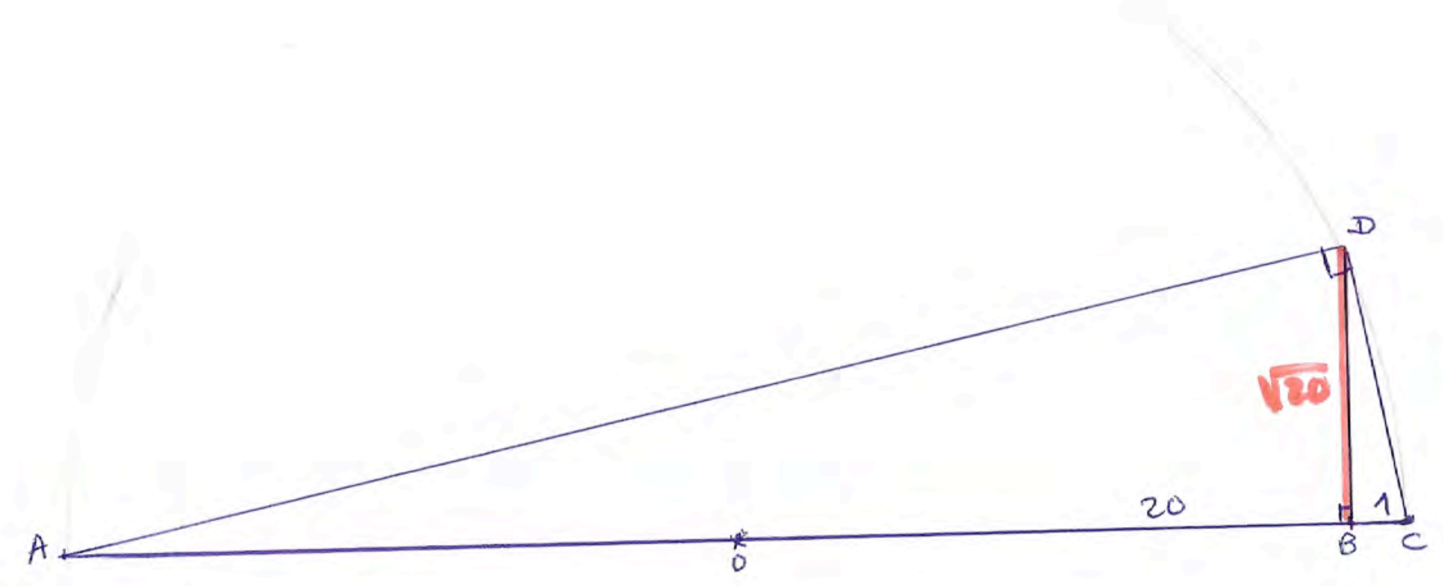
Racine cubique de 20 avec trois chiffres après la virgule

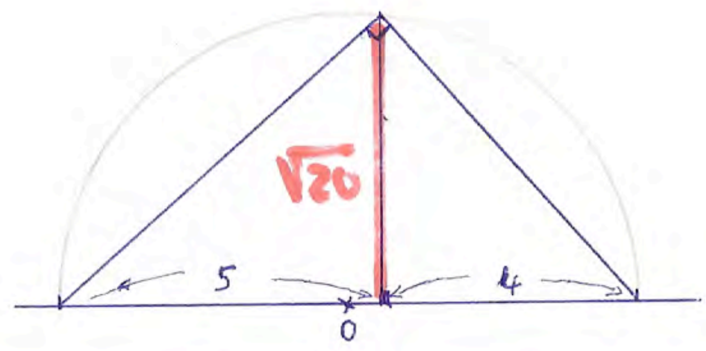
	20,	000	000	000
–	8			
=	12	000		
–	11	683		
=		317	000	
–		219	511	
=		97	489	000
–		88	259	344
=		9	229	656

2,714			
$2^3 = 8$	d=2, u=7	d=27, u=1	d= 271, u = 4
300d²	1200	218700	22032300
+ 30du	+ 420	+ 810	+ 32520
+ u²	+ 49	+ 1	+ 16
= (300d² + 30du +u²)	=1669	=219511	= 22064836
× u	× 7	× 1	× 4
= (300d² + 30du +u²)(u)	=11683	= 219511	= 88259344

Voir cet article dans la Revue Cosinus n°94 en mai 2008.

Constructions de la racine carrée de 20





Construction de la racine cubique de 20