La structure opératoire d’une expression et ses utilisations possibles

Journée APMEP - INSPE ANGERS samedi 26/04/2025

Lorsque l'on demande à des élèves le calcul 15 + 3 × 2, leur taux de réussite est plus élevé que lorsqu'on leur propose le calcul 15 + 5 × 2 .

Création d'une capsule vidéo par des élèves de 2nde :

Résoudre l'équation

$$(x + 1)^2 + (x + 1) (2x + 1)=0$$

question b) $(x+1)^2 + (x+1)(2x+1) = 0$

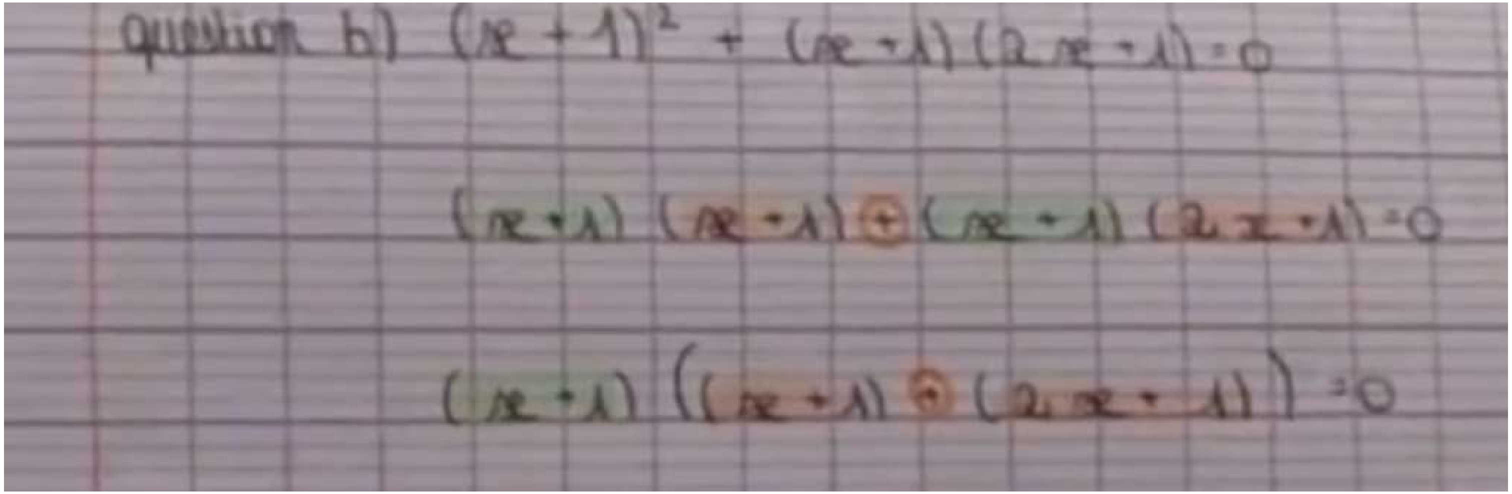
Bonjour, aujourd'hui nous allons résoudre l'équation x + 1 au carré + x + 1 entre parenthèses 2x + 1 entre parenthèses est égale à 0.

Nous retrouvons une identité remarquable, un facteur commun de x + 1, une double distributivité où on ne l'utilise pas.

question b) $(x+1)^2 + (x+1)(2x+1) = 0$

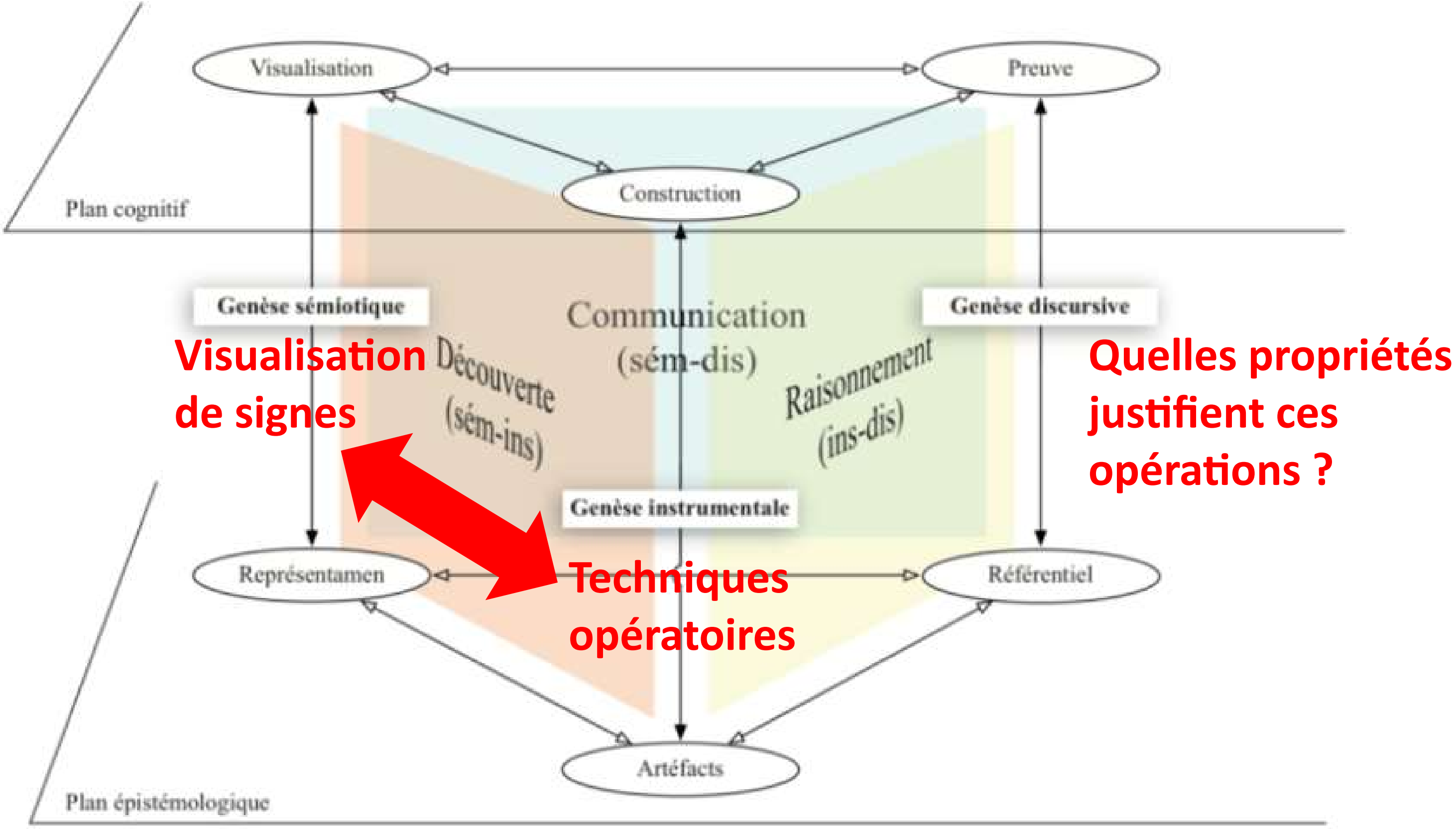
$(x+1)(x+1) + (x+1)(2x+1) = 0$

A la deuxième ligne, nous allons développer l'identité remarquable, rajouter le plus et remettre la double distributivité.



A la troisième ligne, nous allons garder qu'un seul facteur commun entre ces deux là, mettre des grandes parenthèses où nous allons rajouter x + 1, donc le facteur commun, et des x + 1. Entre les grandes parenthèses, on rajoute le plus et ensuite on referme, est égal à 0.

Les espaces de travail mathématiques



Plans verticaux dans un espace de travail (Kuzniak et Richard, 2014).

Quels outils pour travailler les opérations pour gagner en expertise sur les calculs et sur les transformations ?

Un exemple :
faire émerger la structure opératoire d’une expression

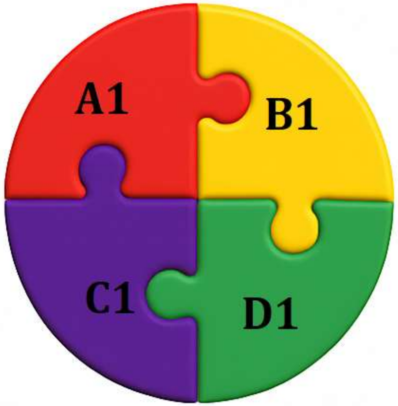
Classe puzzle pour explorer la structure opératoire

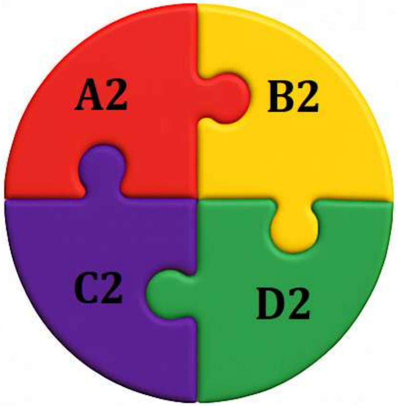
Pré-requis : - Connaître les priorités opératoires

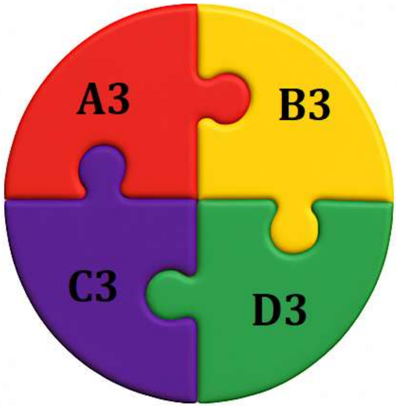
- Avoir pratiqué la transformation d'expressions numériques

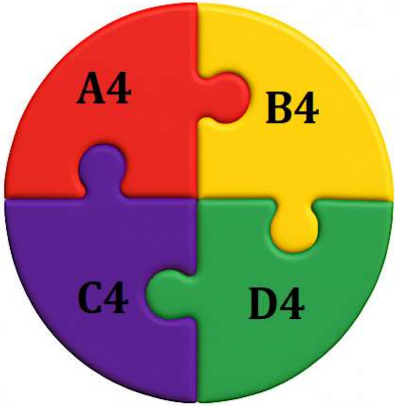
- Avoir déjà rédigé quelques calculs avec étapes (même si maladroitement)

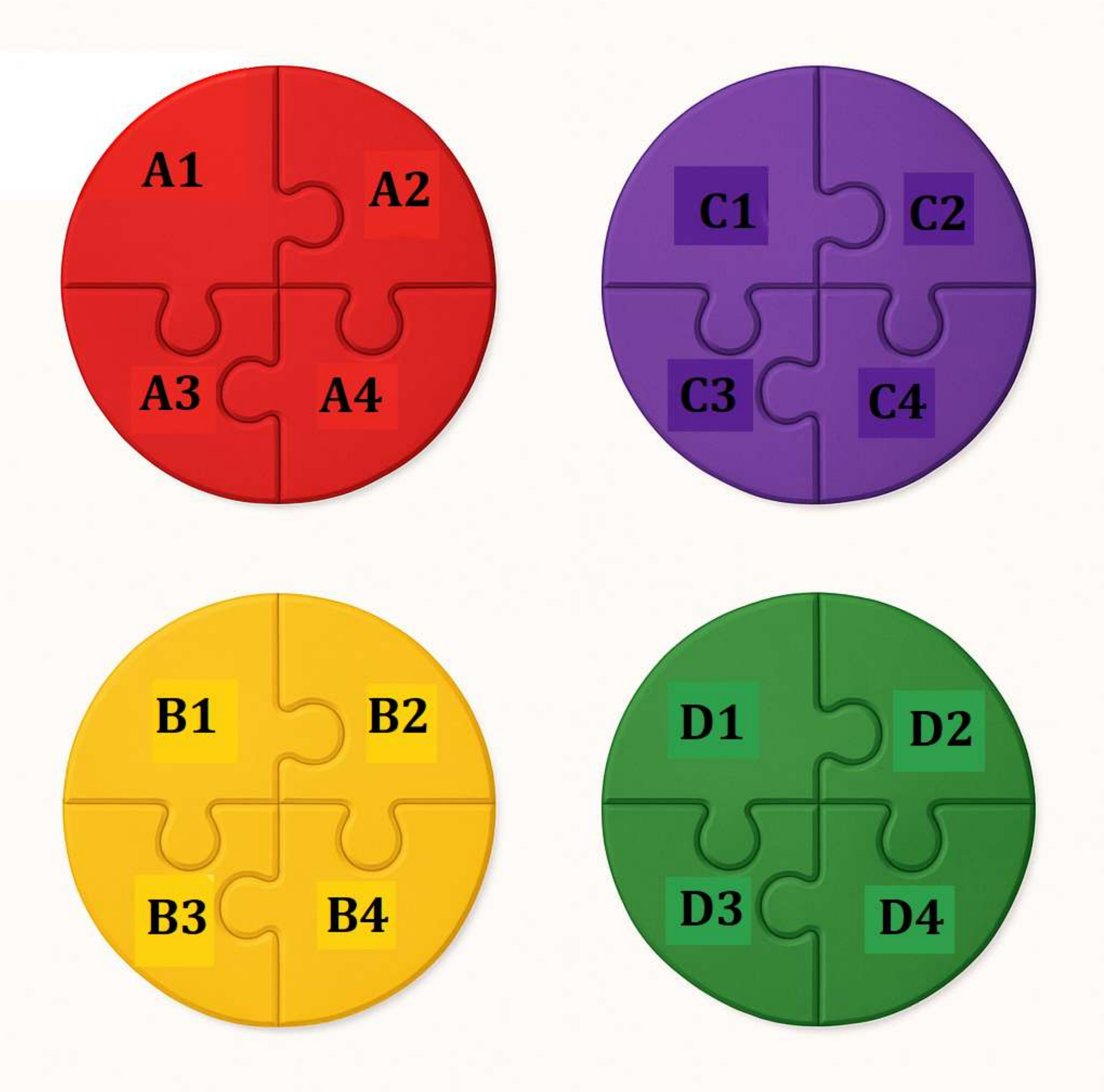
Difficultés fréquentes :
- rédaction,
- usage du signe =

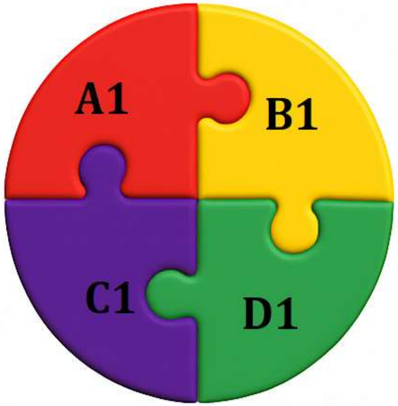

A1
B1
C1
D1

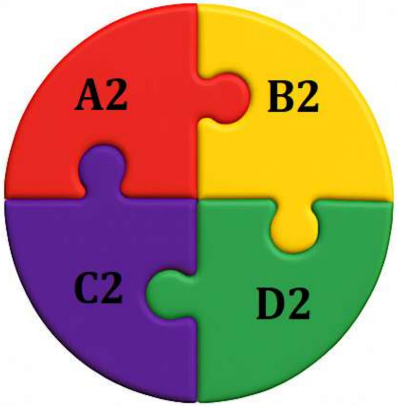

A2
B2
C2
D2

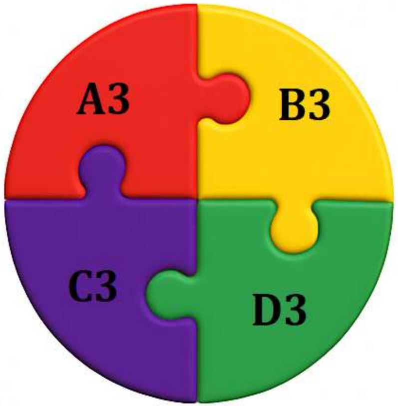

A3
B3
C3
D3

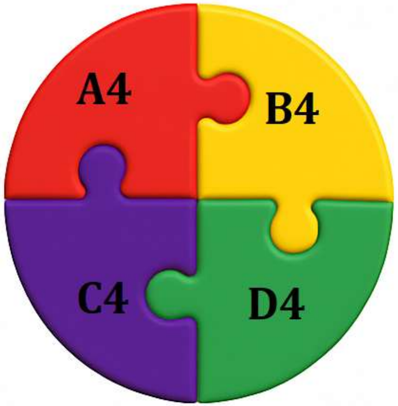

A4
B4
C4
D4


A1
A2
A3
A4
C1
C2
C3
C4
B1
B2
B3
B4
D1
D2
D3
D4


A1
B1
C1
D1


A2
B2
C2
D2


A3
B3
C3
D3


A4
B4
C4
D4

<u>Dispositif mis en place :</u> - Travail par groupes d’experts

- Utilisation du calque pour mettre en évidence les invariants

- Formalisation d’un squelette de résolution

<u>Bénéfices visés de la séance</u> :

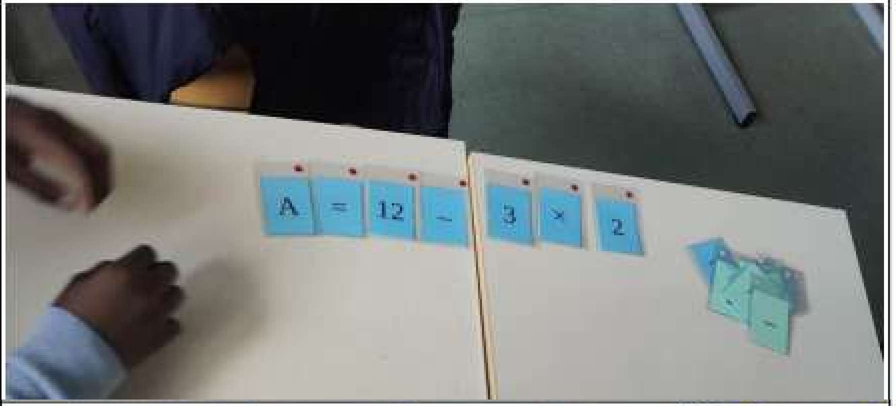
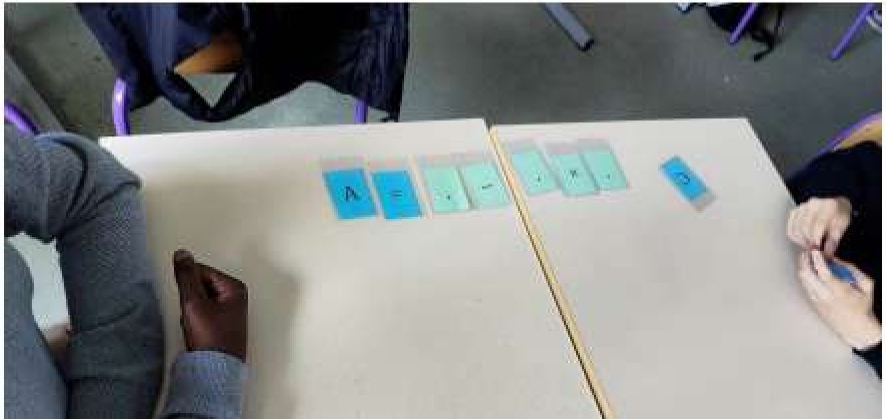
-Prise de conscience de la structure opératoire
-Amélioration des rédactions
-Meilleure anticipation des étapes de calcul

Une expression numérique est un moyen d'exprimer une série de calculs.
Elle est constituée de nombres liés entre eux par une structure opératoire.

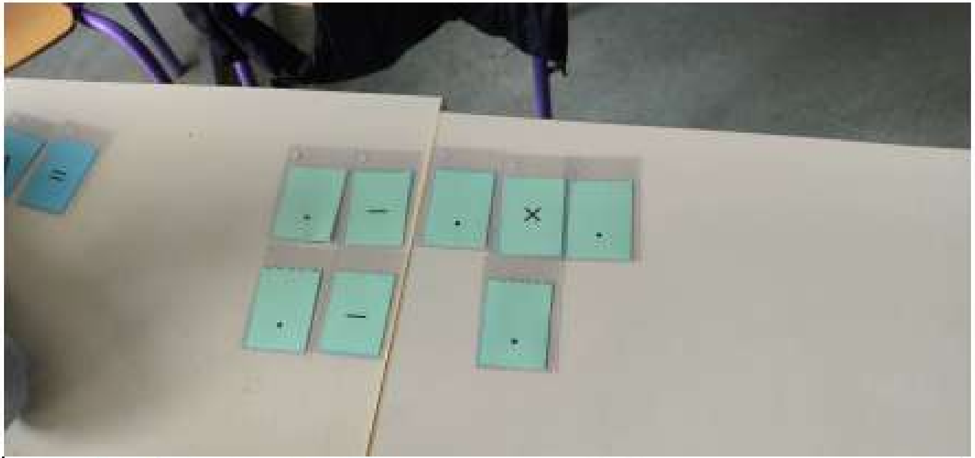
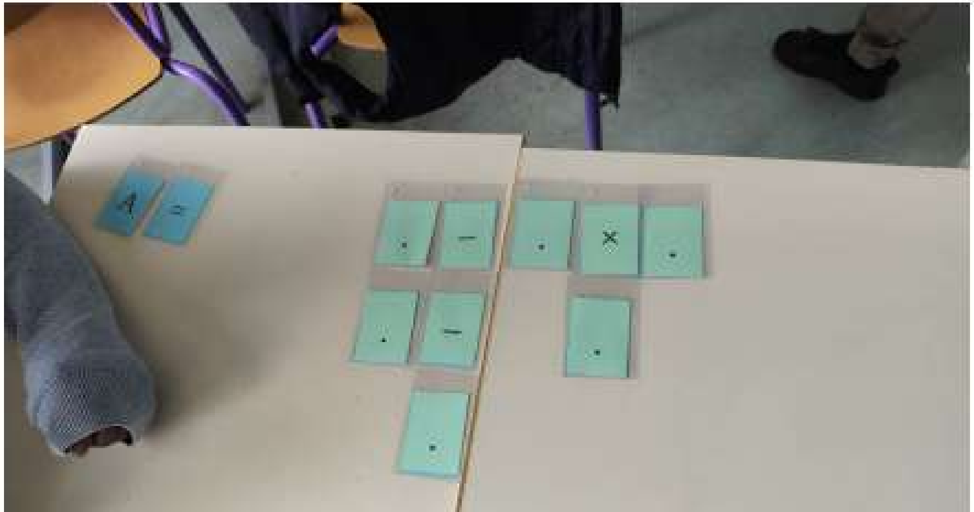
Marchand de structures

Un jeu de cartes pour les cycles 2 et 3

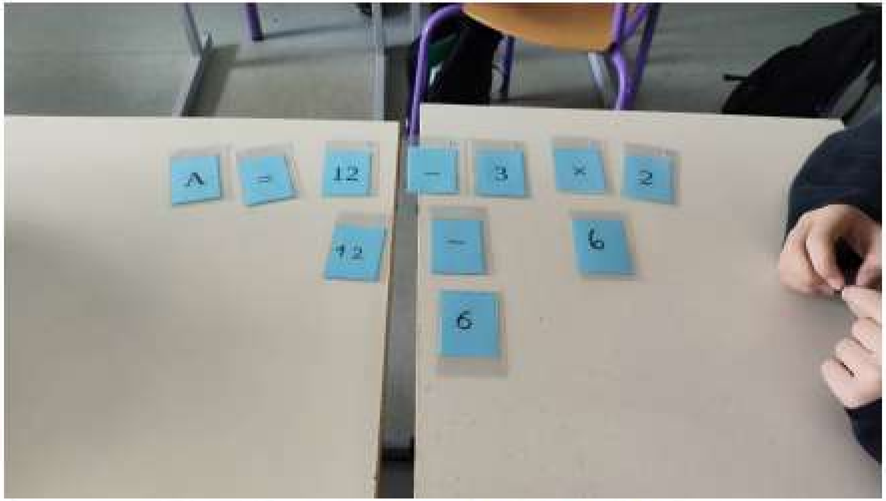
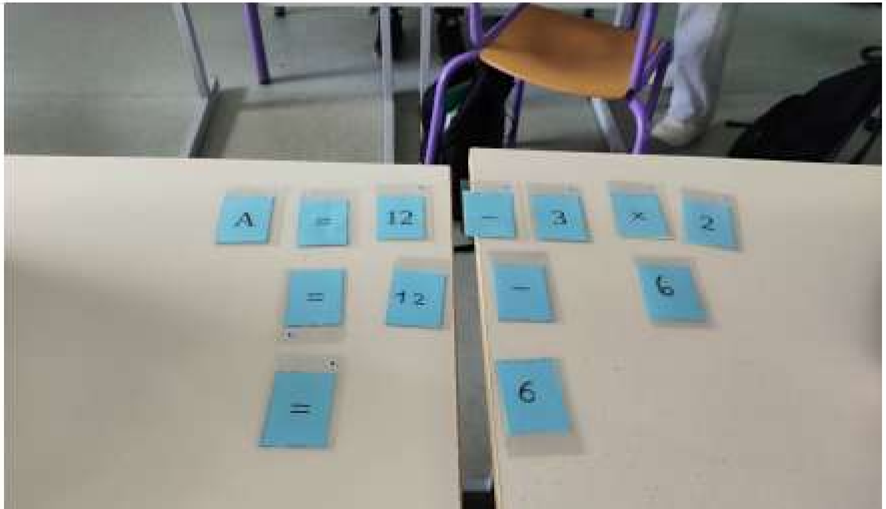
Etape 1

l'enseignant·e affiche le calcul à effectuer au tableau	$A = 12 - 3 \times 2$
les élèves reconstituent le calcul à l'aide des cartes « élèves » face bleue	
Les élèves retournent les cartes pour faire apparaître la structure en vert Les nombres sont remplacés par des cartes « . » « A = » est mis de côté.	

Etape 2 :
Les
commandes

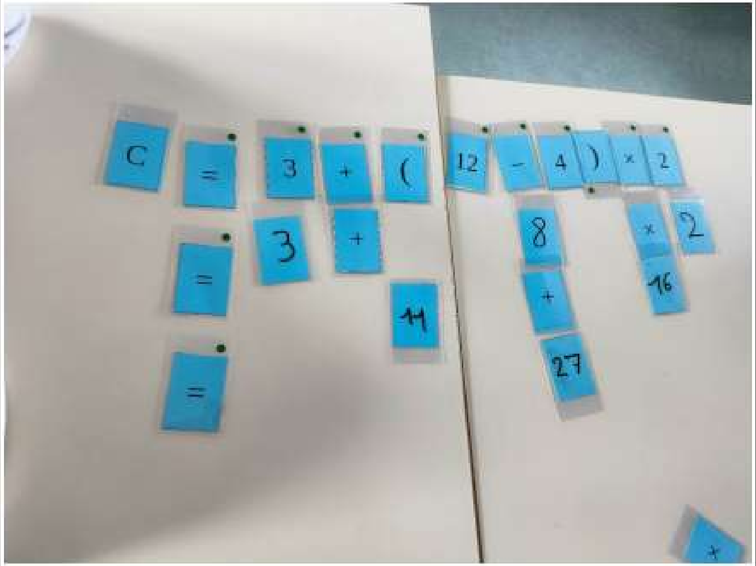
Les élèves repèrent l'opération prioritaire et vont chercher sur le bureau les cartes pour faire apparaître la structure opératoire de la deuxième ligne	
Ils font de même pour les lignes suivantes	

Etape 3 :
Le retour au calcul

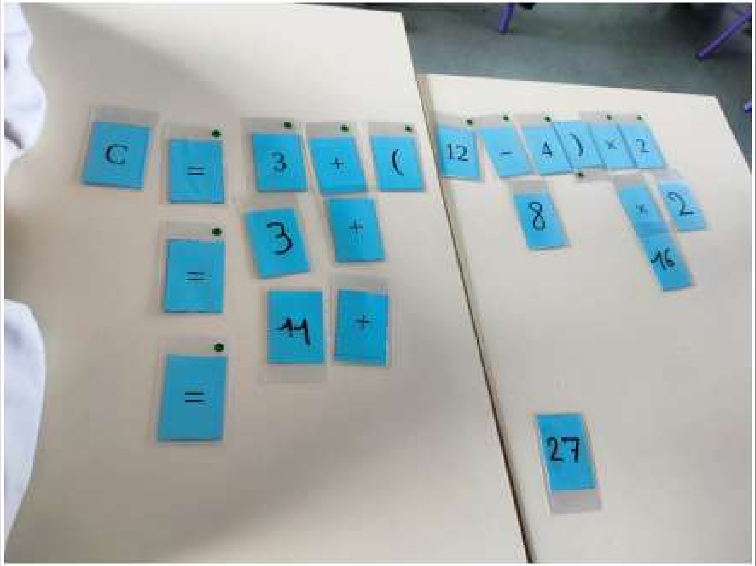
A l'aide d'un feutre, les élèves notent les résultats de chacun des calculs.	
Ils peuvent désormais placer un signe « = » au début de chaque ligne.	

Etape 4 :
Les éléments de contrôle

Ici, le groupe a bien identifié la structure opératoire mais en retournant les cartes et en écrivant les nombres, ils commettent une erreur : ils effectuent l'addition 3+8 et la multiplication 8x2.



De replacer le signe « + » de la troisième ligne dessous le signe « + » de la deuxième ligne, a permis de débloquer la situation et de faire les modifications nécessaires.
Les élèves effacent le « 11 » pour écrire « 3 » puis trouvent le bon résultat.



Les calculs effectués :

- $A = 12 - 3 \times 2$
- $B = 12 \times 5 - 2$
- $C = 3 + (12 - 4) \times 2$
- $D = 12 - 2 + 3$
- $E = 12 - (4 + 2)$
- $F = (12 - 5) \times 3 + 4 \div 2$
- $G = 12 \div [5 - (4 + 3)]$
- $I = [5 + 3 \times (12 - 4)] \div 2$

Le « point » : quel *représentant* ?
Pourquoi pas « … » ?

« Point moins point, il reste rien ! »

Quelle formalisation des propriétés ?

L'intérêt des cartes :
position, retournement, effaçables, commande en un seul voyage, retrouver un élément …

Pour retrouver le jeu et le fabriquer :
https://nuage03.apps.education.fr/index.php/s/etKsCg6DsPSPJrX

Des exemples d’utilisations

Déterminer la nature d'une expression

Myriade Maths 5[e] – Manuel 2016

57 Les expressions suivantes sont-elles des sommes ou des produits ? Justifier la réponse.

a. $5 + 42 \times 36$

b. $(4 + 12) \times (13 - 5)$

c. $15 \times 7 \times (23 + 1)$

d. $84 - (5 \times 7 - 11)$

Ex 57 p 49

a) $5 + 42 \times 36$

$. + . \times .$ par priorité

$. + .$

c'est une somme

b) $(4+12) \times (13-5)$

$(. + .) \times (. - .)$ par () puis →

$. \times (. - .)$ par ()

$. \times .$

c'est un produit

c) $15 \times 7 \times (23+1)$

$. \times . \times (. + .)$ par ()

$. \times . \times .$ par →

$. \times .$

c'est un produit

d) $84 - (5 \times 7 - 11)$

$. - (. \times . - .)$ par () puis priorité

$. - (. - .)$ par ()

$. - .$ ~~par~~

c'est une différence

$50 - 2 \times (5 + 2 \times 4) + 4$

structure opératoire

$. - . \times (. + . \times .) + .$

evolution de la structure par conventions operatoires

$. - . \times (. + . \times .) + .$

$. - . \times (. + .) + .$ par () par priorité

$. - . \times . + .$ par ()

$. - . + .$ par priorité

$. + .$ par →

La rédaction des étapes d’un calcul

valeur de l'expression	évolution de la structure opératoire
on a : $8-4=4$ par ( )	$\cdot - \cdot \times (\cdot - \cdot)$
$2\times 4=8$ par priorité	$\cdot - \cdot \times \cdot$
$17-8=9$	$\cdot - \cdot$

donc $17-2\times(8-4)=\underline{9}$

$A = 17 - 2\times(\underline{8-4})$ par ( )

$A = 17 - \underline{2\times 4}$ par priorité

$A = 17 - 8$

$A = 9$

$40 - 3 \times (2 \times 6 - 5) + 9$

$. - . \times (. \times . - .) + .$

$40 - 3 \times (12 - 5) + 9$

$40 - 3 \times 7 + 9$

$40 - 21 + 9$

$19 + 9$

28 ✓

a) $12 - 2 \times \underline{7}^2 + 4$

$= 12 - \underline{2 \times 49} + 4$

$= \underline{12 - 98} + 4$

$= -86 + 4$

$= -82$

$\cdot - \cdot \times \underline{\cdot}^2 + \cdot$

$= \cdot - \underline{\cdot \times \cdot} + \cdot$

$= \underline{\cdot - \cdot} + \cdot$

$= \cdot + \cdot$

$= \cdot$

2)

$A = (-5) \times 2 - 4 \times (-3)$

$\cdot \times \cdot - \cdot \times \cdot$

$\cdot \times \cdot - \cdot$ $\quad (-5) \times 2 - (-12)$

$\cdot - \cdot$ $\quad -10 - (-12)$

$\cdot$ $\quad \underline{2}$ ✓

$B = (-2 - 5) \times 4 - 9$

$(\cdot - \cdot) \times \cdot - \cdot$

$\cdot \times \cdot - \cdot$ $\quad -7 \times 4 - 9$

$\cdot - \cdot$ $\quad -28 - 9$

$\cdot$ $\quad \underline{-37}$ ✓

Une introduction aux expressions littérales

Voici un programme de calcul :

Choisir un nombre
Ajouter 5 ;
Multiplier par 2 ;
Ajouter 8.

1) Effectuer les opérations en prenant 10 comme nombre de départ, puis les écrire en une seule expression.
2) Recommencer les opérations avec les cinq nombres suivants : 4 ; 12 ; 0 ; 3,2 et 4,7 puis les écrire en une seule expression.
3) Quelles remarques peux-tu faire en observant les expressions numériques précédentes ?
Proposer une écriture générale du résultat du programme de calcul.

- Les expressions ont la même structure opératoire
$(. + .) \times . + .$
- A certains "emplacements" on a les mêmes nombr
$(. + 5) \times 2 + 8$

x désigne le nombre choisi ;
$(x + 5) \times 2 + 8$ est une écriture du résultat.

Un lien avec différentes expressions

N5 – Différentes expressions

Instructions avec des mots du programme de calcul	Structure opératoire du programme calcul	Expression numérique du résultat lorsqu'on choisit 9,4	Expression littérale du résultat lorsque x désigne le nombre choisi	Expression TABLEUR lorsque le nombre choisi est dans la cellule A2
Choisir un nombre Ajouter 5 Multiplier par 7 Soustraire 2	(. + .)× . - .	(9,4 + 5)× 7 - 2	$(x + 5) \times 7 - 2$	= (**A2** + 5)* 7 – 2
Choisir un nombre Soustraire 2 Multiplier par 5	(.-.)×.	(9,4-2)×5	$(x-2)\times 5$	=(A2-2)*5
choisir un nombre multiplier par 2 soustraire 8	.×.-.	9,4 × 2 – 8	$x \times 2-8$	= A2×2-8
choisir un nombre ajouter 4 multiplier par 8	(.+.)×.	(9,4+4)×8	$(x+4)\times 8$	= (**A2** + 4)* 8
choisir un nombre multiplier par 3 soustraire 2 ajouter 9	(. ×.-.)+.	(9,4×3-2)+9	$(x \times 3 - 2) + 9$	=(A2*3-2)+9
Choisir un nombre Ajouter 2 Multiplier par 5 Soustraire le double du nombre choisi	[(.+.)×.-].×.	[(9,4+2)×5]-9,4×2	$[(x+2)\times 5]-x\times 2$	=[(A2+2)*5]-A2×2

N5 – Différentes expressions

Instructions avec des mots du programme de calcul	Structure opératoire du programme calcul	Expression numérique du résultat lorsqu'on choisit 9,4	Expression littérale du résultat lorsque x désigne le nombre choisi	Expression TABLEUR lorsque le nombre choisi est dans la cellule A2
Choisir un nombre Ajouter 5 Multiplier par 7 Soustraire 2	(. + .)× . - .	(9,4 + 5)× 7 - 2	$(x + 5) \times 7 - 2$	= (A2 + 5)* 7 – 2

La distributivité

a) En utilisant la calculatrice, écrire la vérification des égalités suivantes :

$6\times(4+2)=6\times4+6\times2$; $5\times2{,}8+5\times7{,}2=5\times(2{,}8+7{,}2)$;

$8\times(3+7)=8\times3+7$; $4\times9+7\times4=4\times(9+7)$.

b) Les égalités vraies de la question a) sont construites sur le même modèle. Sans faire de calcul, écrire deux autres égalités VRAIES sur ce modèle.

c) Écrire une égalité TOUJOURS VRAIE pour exprimer le cas général du modèle.

$3\times(4+2)$	MÉMORY DISTRIBUTIVITÉ
$4\times(3+2)$	MÉMORY DISTRIBUTIVITÉ
$2\times(3+4)$	MÉMORY DISTRIBUTIVITÉ
$(7+5)\times 6$	MÉMORY DISTRIBUTIVITÉ
$5\times(6+7)$	MÉMORY DISTRIBUTIVITÉ
$(5+6)\times 7$	MÉMORY DISTRIBUTIVITÉ

$3\times 4+3\times 2$	MÉMORY DISTRIBUTIVITÉ
$4\times 3+4\times 2$	MÉMORY DISTRIBUTIVITÉ
$2\times 3+2\times 4$	MÉMORY DISTRIBUTIVITÉ
$7\times 6+5\times 6$	MÉMORY DISTRIBUTIVITÉ
$6\times 5+7\times 5$	MÉMORY DISTRIBUTIVITÉ
$7\times 6+7\times 5$	MÉMORY DISTRIBUTIVITÉ

Pas chaque paire il y a une sans parenthèse et une avec des parenthèse.
Dans chaque paire, il y a les même chiffres.
Dans chaque paire il y a les mêmes signes opératoirs.

- x - + - x -
- x (- ÷ -)
(- : + -) x -
- x - ÷ - x -

Dans chaque étiquette, le chiffre que l'on trouve le plus de fois joue un rôle important dans l'égalité.
Il ne peut y avoir deux étiquette ensemble si chacune ont un chiffre qui joue un rôle.

On mémorise les égalités et leur paires.

On associe ces 2 squellettes → $(. + .) \times . = . \times . + . \times .$

Dans une égalité on retrouve 3 chiffres ou nombre différents.

Dans le 1er squellette : $\odot \times (\odot + \odot)$, le chiffre hors des ( ) se retrouvera 2 fois dans le 2nd squellette : $\odot \times \odot + \odot \times \odot$

- Une des deux cartes de la paire a des parenthèses
- La paire doit contenir les mêmes chiffres
- Dans la paire il doit y avoir un squelette comme ça : .x(.+.) et l'autre comme ceci : .x.+.x.
- Un des trois chiffres revient dans les deux multiplications (le deuxième squelette)

on sait que le chiffe à la fin de la parenthèse, sa sera le même
à la fin du calcule.

$$x \times (y + t) = x \times y + x \times t$$

$6 \times x + 7 \times x$

$x \times (6+7)$

Car il y a 2 fois x

ex : 1er membre $6 \times x + 7 \times x$

2ème membre $x \times (6+7)$

l'égalité est VRAI !

$x = 5$

$6 \times \underline{x} + 7 \times \underline{x}$

$x \times (6+7)$

⚠ Si $7 \times (4+9)$ n'est pas égale a $2 \times (8+5)$

car c'est la même structure opératoire.

$$x \times (y+t) = x \times y + x \times t$$

à retenir à retenir à retenir

Il faut aussi retenir la case.

$$\cdot \times \cdot + \cdot \times \cdot \neq \cdot \times \cdot + \cdot \times \cdot$$

$$\cdot \times (\cdot + \cdot) \neq \cdot \times (\cdot + \cdot)$$

c'est impossible car c'est la même structure opérateur

Quels apports pour les expressions littérales ?

Développer une expression littérale

N5 – Programmes de calcul équivalents

Voici deux programmes de calcul

Programme A
Choisir un nombre ;
Ajouter 5 ;
Multiplier par 2.

Programme B
Choisir un nombre ;
Prendre son double ;
Ajouter 10.

1) Calculer les résultats obtenus avec ces deux programmes lorsqu'on choisit :

a) 0 b) 6 c) 9,5 d) -5

2) On note x le nombre choisi.
Exprimer en fonction de x, les résultats de chaque programme.

3) Luke affirme : « Ces deux programmes donnent toujours le même résultat pour le même nombre choisi. »
A-t-il raison ?

Programme A)

a. 1) Je choisis 0.
$(0+5) \times 2 = 10$

b. Je choisis 6.
$(6+5) \times 2 = 22$

c. Je choisis 9,5.
$(9{,}5+5) \times 2 = 29$

d. Je choisis −5.
$(-5+5) \times 2 = 0$

Programme B)

a. $0 \times 2 + 10 = 10$ b. $6 \times 2 + 10 = 22$ c. $9{,}5 \times 2 + 10 = 29$ d. $-5 \times 2 +$

A)	2/ $(x+5) \times 2$
B)	2/ $x \times 2 + 10$

1er membre $(x+5) \times 2 = x \times 2 + 10$?

$(x+5) \times 2 = x \times 2 + 5 \times 2$ par distributivité

$= 2x + 10$ (2ème membre)

DISTRIBUTIVITÉ

L'égalité $(a+b)\times c = a\times c + b\times c$ est toujours vraie.

Utilisation de la distributivité pour développer

exemple : $(3x+5)\times 2 = 3x \times 2 + 5 \times 2 = 6x+10$

p102-06

17 Lorsque c'est possible, utiliser la distributivité pour développer les expressions suivantes. Si c'est impossible, expliquer pourquoi.

a. $5 \times (2x + 3)$ **b.** $5 + (2x + 3)$ **c.** $(5 + 2x) \times 3$

d. $4 \times (5x - 2)$ **e.** $4 \times (5x \times 2)$ **f.** $4 \times (3 \times x + 2)$

17 Lorsque c'est possible, utiliser la distributivité pour développer les expressions suivantes. Si c'est impossible, expliquer pourquoi.

a. $5 \times (2x + 3)$ **b.** $5 + (2x + 3)$ **c.** $(5 + 2x) \times 3$

d. $4 \times (5x - 2)$ **e.** $4 \times (5x \times 2)$ **f.** $4 \times (3 \times x + 2)$

$$k \times (a+b) = k \times a + k \times b$$
$$k \times a + k \times b = k \times (a+b)$$

La distributivité met en relation deux structures opératoires

$$\boxed{\cdot \times (\cdot + \cdot)}$$
$$\cdot \times \cdot + \cdot \times \cdot$$

structure operatoire de $5 \times (2x+3)$: $\cdot \times (\cdot + \cdot)$

c'est possible

structure operatoire de $5 + (2x+3)$: $\cdot + (\cdot + \cdot)$

ce n'est pas possible

ex 17 p 102 :

a) $\cdot \times (\cdot + \cdot)$ b) $\cancel{\cdot + (\cdot + \cdot)}$ c) $(\cdot + \cdot) \times \cdot$

d) $\cdot \times (\cdot - \cdot)$ e) $\cancel{\cdot \times (\cdot \times \cdot)}$ f) $\cdot \times (\cdot \times \cdot + \cdot)$

$$\boxed{\text{distributivité} \quad k \times (a+b) = k \times a + k \times b}$$

la distributivité met en relation deux structure opératoire : $\cdot \times (\cdot + \cdot) \xrightarrow[\text{développer}]{} \cdot \times \cdot + \cdot \times \cdot$

structure opératoire de chaque expression

a) $5 \times (2x + 3) = 5 \times 2x + 5 \times 3 = 10x + 15$

b) $(5 + 2x) \times 3 = 3 \times 5 + 3 \times 2x = 15 + 6x$

d) $4 \times (5x - 2) = 4 \times 5x - 4 \times 2 = 20x - 8$

f) $4 \times (3x + 2) = 4 \times 3x + 4 \times 2 = 12x + 8$

$(x+5)\times 7-2x$

$(.+.)\times . - 2x$ distributivité

$= 5\times 7+x\times 7-2x$

$= 35+7x-2x$

$= 35+5x$

$(x+7)\times 7-2\times x \rightarrow (.+.)\times . - . \times . \rightarrow . \times . + . \times . - . \times .$

$= 7\times x+7\times 7-2x$

$= 7x+7\times 7-2x$

$= 7x+49-2x \rightarrow 7x-2x+49$

$= 5x+49$

Le groupe collège de l’IREM des Pays de la Loire

François Guérineau
Mathilde Jacob
Benjamin Ventana
Sylvie Grau