ASSOCIATION des PROFESSEURS de MATHÉMATIQUES de l'ENSEIGNEMENT PUBLIC
A.P.M.E.P.

<u>Régionale de LYON</u>

JOURNEE APMEP
DU SAMEDI 13 NOVEMBRE 2004

Démonstration en géométrie et en algèbre, figure et calcul littéral : quels rapports ?

Par Gilbert Arsac, Université Lyon 1

Lorsqu'il initie ses élèves au calcul littéral, l'enseignant insiste sur le fait qu'en calculant avec des lettres, on traite un cas général. On peut se demander comment cette question de la généralité est résolue en géométrie : suffit-il de prendre garde à raisonner sur une figure quelconque ? L'étude de cette question permet de voir sous un jour différent le rôle de la figure dans la démonstration en géométrie. Bien entendu, Euclide s'était déjà posé la question...

ASSOCIATION des PROFESSEURS de MATHÉMATIQUES de l'ENSEIGNEMENT PUBLIC
A.P.M.E.P. Régionale de LYON
15 quai André Lassagne 69001 LYON

TEL ET FAX : 04 78 27 25 55
E mail : E.Galion@wanadoo.fr

Formes et variables de la démonstration mathématique.
Une étude élémentaire.

Résumé.

Dans cet exposé, nous essayons de regrouper un ensemble de remarques sur la démonstration mathématique, fondées sur une étude de son fonctionnement qui prenne en compte aussi bien le niveau scolaire que celui de la recherche. Il s'agit d'une étude élémentaire en ce sens qu'elle ne fait appel à aucune théorie logique abstraite, mais cherche à serrer au plus près la pratique effective. Nous espérons qu'elle puisse être considérée comme une connaissance de base pour tout enseignant de mathématiques.

Une question fondamentale est celle de la variété apparente des textes de démonstration (Houdebine, 2001). Nous essaierons de montrer que ce foisonnement peut être expliqué, donc compris, comme l'effet produit par deux variables qui sont le domaine mathématique concerné d'une part, le niveau visé d'autre part. De ce point de vue, notre travail est un travail de synthèse permettant de relier entre elles des questions qui semblaient distinctes.

En ce qui concerne le domaine, nous remarquons que l'étude de la démonstration en géométrie plane conduit en général à la réduire à des enchaînements logiques simples. Nous montrons, par comparaison avec l'algèbre et l'analyse qu'en se limitant au domaine de la géométrie plane on laisse nécessairement dans l'ombre un certain nombre de phénomènes qui apparaissent au contraire de façon éclatante dans d'autres domaines.

En ce qui concerne le niveau, c'est-à-dire, en langage didactique, l'institution dans laquelle se développe la démonstration, nous montrons là aussi que certains phénomènes concernant la démonstration ne peuvent pas être perçus tant qu'on se limite à des démonstrations élémentaires.

Nous formulons au long de notre étude un certain nombre de questions qui nous semblent nouvelles et en conclusion, nous dégageons quels sont les aspects de la démonstration qui ne peuvent pas être appris si on se limite à la géométrie plane, domaine d'initiation classique à la démonstration, ce que nous ne remettons pas en cause.

1) La démonstration en géométrie : énoncé, hypothèse, raisonnement et conclusion.

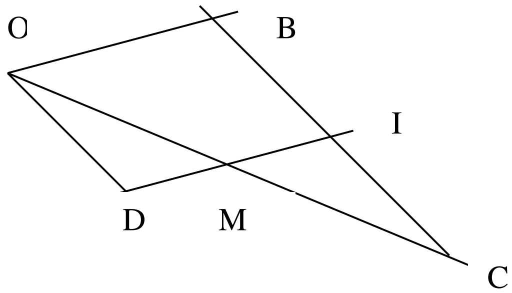
1.1) Hypothèse, conclusion, boîte à outils et démonstration.

Partons des idées couramment développées dans les manuels de l'enseignement secondaire français pour nous faire une première idée de la démonstration. Les mots clés sont : hypothèse, conclusion, boîte à outils, raisonnement. L'hypothèse H est constituée soit de ce que l'on suppose vrai, soit de ce que l'on sait être vrai, et la conclusion C est ce que l'on veut démontrer, ce que l'on espère être vrai. La démonstration va de l'hypothèse H à la conclusion C par un raisonnement déductif, constitué d'un enchaînement de « pas de déduction », utilisant les énoncés figurant dans l'hypothèse ou la boîte à outils. Ces définitions constituent une vulgarisation légitime des définitions de la logique : pour démontrer l'implication $H \Rightarrow C$, on adjoint H à l'ensemble des énoncés déjà connus comme vrais, c'est-à-dire qu'on suppose que H est vrai et on démontre C; l'ensemble des énoncés vrais effectivement utilisés dans la démonstration mais ne figurant pas dans l'hypothèse constitue la boîte à outils. En voici un exemple.

1.2) Un exemple de démonstration par enchaînement de pas de déduction, d'après Duval et Egret, (1989).

Des élèves de quatrième (grade 8) ont à résoudre le problème suivant :

O, B et C sont trois points non alignés. I est le milieu de [BC] et D le point tel que ODIB soit un parallélogramme. Pourquoi M, milieu de [ID] est-il le milieu de [OC] ?



Précisons que ce problème est soumis aux élèves au tout début de l'apprentissage de la démonstration, et qu'une recherche collective a abouti à l'idée que la remarque importante est que OICD est un parallélogramme. Parmi les 27 élèves de la classe figurent comme toujours quelques petits génies, ici ils sont deux à avoir fourni d'emblée une rédaction montrant qu'ils ont déjà tout compris, voici l'une des deux, qui utilise la boîte à outils suivante, extraite des résultats connus dans la classe :

Propriété n°2 : si un quadrilatère a deux côtés opposés égaux et parallèles, alors ce quadrilatère est un parallélogramme.
Théorème n°1 : les diagonales d'un parallélogramme se coupent en leur milieu.

Démonstration :
« 1 DIBO est un parallélogramme donc : -(DO)//(IB)//(BC) (car C, I et B sont alignés)
-DO=IB=CI (car I est le milieu de [CB]).
2 Si (DO)//(CI) et si DO=CI alors DOIC est un parallélogramme (voir propriété n°2 du parallélogramme)
3 Donc DOIC est un parallélogramme (voir 1 et 2) et ses diagonales se coupent en leur milieu (voir théorème n°1). Or ses diagonales sont PRECISEMENT [OC] et [ID] qui se coupent en leur milieu. Voilà la réponse à la question. » (Duval et Egret, loc. cit.)

Considérons la phrase 2 de l'élève, nous y reconnaissons la « structure ternaire » du pas de déduction en ce sens que : a) l'élève indique clairement ce qu'il sait déjà : (DO)//(CI) et DO=CI, b) il indique la propriété prise dans la boîte à outils qu'il va utiliser : propriété 2 du parallélogramme, c) il indique ce qu'il en déduit : DOIC est un parallélogramme. L'apparition de cette structure ternaire dans les propos de l'élève est la *structure profonde* qui atteste de sa compréhension du pas de déduction au delà de *l'indice de surface* que constitue le fait qu'il emploie le « si…alors ». Les trois étapes du pas de déduction ont les fonctions suivantes : le b) identifie l'énoncé, connu comme vrai, appelé couramment « énoncé tiers », qui est à la base du pas de déduction, le a) montre que les conditions d'entrée dans ce pas, qu'on peut aussi appeler prémisses locales de l'énoncé tiers sont remplies, le c) indique la conclusion que l'on peut en tirer (règle du détachement). Celle-ci, étant la condition d'entrée du théorème 1 sera le a) du pas de déduction suivant, ce qui montre en quoi le raisonnement est un enchaînement de pas de déduction. Ici il y a trois pas, le premier utilisant comme énoncé tiers, sous-entendu, la définition du parallélogramme, ou quatre pas si l'on compte la définition du milieu comme énoncé tiers.

L'analyse qui précède et le vocabulaire qu'elle utilise sont directement tirés des travaux de Duval (cf Duval, 1995) sur la démonstration. Il est important de remarquer, car c'est un point faible des textes élémentaires sur la démonstration, et souvent des théories didactiques qui la concernent, que c'est presque toujours la démonstration en géométrie plane qui sert d'illustration et de mise à l'épreuve de ces études. Ceci constitue une double limitation : à un domaine particulier des mathématiques et à un moment particulier de leur apprentissage, l'initiation à la démonstration dans le domaine géométrique au collège.

Sous ces restrictions, l'étude de Duval constitue une référence provisoirement définitive, que nous nous contentons de rappeler brièvement sur l'exemple précédent, et dont nous utiliserons le vocabulaire.

1.3) Données et hypothèses.

Précisons l'hypothèse et la conclusion dans l'exemple ci-dessus.

Hypothèse : *O, B et C sont trois points non alignés. I est le milieu de [BC] et D le point tel que ODIB soit un parallélogramme.*
Conclusion : *Le milieu M de [ID] est aussi le milieu de [OC].*

En dehors de variations langagières évidentes comme celle qui consisterait à énoncer comme conclusion que *« [ID] et [OC] ont le même milieu »*, une autre remarque plus profonde s'impose : nous pouvons parler de données au lieu d'hypothèse, c'est même ce qui s'imposerait le plus vu la manière dont nous avons énoncé les hypothèses. Mais on pourrait aussi mélanger les deux :

Données : *cinq points O, B, C, I, et D.*
Hypothèses : *O, B et C sont trois points non alignés. I est le milieu de [BC] et D le point tel que ODIB soit un parallélogramme.*

Examinons maintenant une situation plus simple où l'on part par exemple d'un triangle. Dans ce cas, il est équivalent de se *donner* un triangle, ou de se *donner* trois points, et de supposer *par hypothèse* qu'ils sont non alignés. D'une manière générale, toute démonstration mathématique porte sur des objets, qu'il faut se donner et sur des propriétés que l'on suppose à ces objets ou bien qui font partie de leur définition, et qui constituent des hypothèses. Les exemples ci-dessus montrent que l'on peut jouer facilement sur cette distinction et la déplacer presque à volonté.

Elargissons notre propos : tous les énoncés ne sont pas donnés sous forme d'implication, par exemple ceux qui énoncent des propriété d'objet comme

- la fonction logarithme est croissante ;
- l'ensemble des nombres premiers est infini.

Dans ce cas, on part a priori d'une donnée : la fonction logarithme dans un cas, l'ensemble des nombres premiers dans l'autre et pour démontrer que l'énoncé est vrai, on montre qu'il est déductible de l'ensemble des énoncés vrais déjà connus. Si l'on veut expliciter une hypothèse, il suffira d'indiquer les propriétés caractéristiques de l'objet considéré ou plus simplement celles que l'on va utiliser dans la démonstration.

Bien sûr, du point de vue logique, comme l'implication $A \Rightarrow B$ n'est autre que l'énoncé « (non$A$) ou B », la démonstration d'une implication n'est qu'un cas particulier de celle d'un énoncé, mais nous n'insisterons pas sur ce point de vue théorique qui n'est pas celui qui nous intéresse ici.

En général, l'élève de collège ou de lycée n'a que peu d'initiative en ce qui concerne l'écriture de l'hypothèse et de la conclusion, cependant même à ce stade élémentaire des questions se posent. Considérons par exemple l'une des démonstrations les plus classiques, celle de l'énoncé : « Dans un triangle, les médiatrices sont concourantes », ou encore « les médiatrices d'un triangle sont concourantes ». Le premier énoncé conduit à prendre comme donnée un triangle ABC. Malheureusement, comme à ce niveau on admet en général sur la base du dessin que deux médiatrices d'un triangle sont toujours concourantes, l'hypothèse, c'est-à-dire le fait que les trois points A, B et C ne sont pas alignés, ne sert à rien. Ceci est fâcheux puisque le fait d'utiliser les hypothèses est l'un des critères d'une démonstration réussie proposé aux élèves par l'enseignant...En fait la démonstration, une fois admise l'existence d'un point commun à deux médiatrices, n'utilise que les propriétés des médiatrices. Ceci explique que certains manuels partent de la donnée, non pas d'un triangle, mais des médiatrices d'un triangle.

En conclusion, le jeu sur les données et les hypothèses ne soulève pas de problème pour l'expert que doit être l'enseignant. Mais ceci ne signifie pas qu'il n'en pose pas pour l'élève, ni qu'il soit insignifiant : le choix de la manière d'écrire les hypothèses, de ce que l'on considère comme donné, reflète en général une certaine tactique de résolution. Revenons par exemple sur l'énoncé « l'ensemble des nombres premiers est infini » ; sa démonstration usuelle, depuis Euclide est la suivante : on se donne p entiers $n_1,\ldots, n_p$ premiers deux à deux distincts et l'on montre qu'il existe un entier premier qui n'appartient pas à cette liste, en considérant un diviseur premier de $m= n_1 n_2\ldots n_p +1$. On précise donc des données et une conclusion à partir de la définition suivante d'un ensemble infini : il n'est identique à aucun des ses sous-ensembles finis. Mais dans ce cas beaucoup d'autres choix de données, d'hypothèses et de conclusions sont possibles, reflétant d'autres tactiques de démonstration (on en trouvera cinq autres dans Aigner M et Ziegler GM, 2001, ch 1)

Ce problème est peu abordé en didactique mais cependant sous-jacent aux recherches sur « l'unité cognitive » (Garuti, 1998, Boero, 2000), sur l'axiomatisation locale (Rogalski) et finalement sur la question de la dualité opérations objets (Granger, 1994)

2) La démonstration en algèbre. Nécessité et généralité, exemple générique, données et hypothèse,

Dans ce deuxième paragraphe, nous abordons la question de la démonstration en algèbre, ce qui nous amène à approfondir ensuite la question de la démonstration en géométrie, et à identifier les raisons profondes des différences qui apparaissent au premier coup d'œil entre ces deux domaines des mathématiques.

2.1) Nécessité et généralité, exemple générique.

La plupart des énoncés de théorèmes sont des énoncés « universels », c'est-à-dire exprimant qu'une propriété est vraie pour tous les éléments d'un ensemble E. Cette universalité s'exprime en principe par le quantificateur universel « quel que soit » ou « pour tout », mais il est très courant qu'il soit sous-entendu, en particulier dans les énoncés en « si…alors ». Par exemple un énoncé comme « si ABC est un triangle, alors ses médiatrices sont concourantes » signifie en réalité « quel que soit le triangle ABC, ses médiatrices sont concourantes » ou même, en se rapprochant davantage d'une écriture symbolique : « quels que soient les points A, B, C, si ABC est un triangle, alors les médiatrices sont concourantes ». De même de l'énoncé « si une fonction est dérivable, elle est continue ». En dehors des énoncés portant sur les nombres entiers, dont certains se démontrent par récurrence, la démonstration des énoncés universels se fait par la **méthode de l'exemple générique**. Elle consiste, rappelons-le, à raisonner sur un élément de l'ensemble E, puis à montrer que le raisonnement ainsi effectué est en réalité valable pour tous, en général en remarquant que l'on n'a utilisé aucune propriété qui ne soit pas partagée par tous les éléments de l'ensemble. Cette méthode peut être éventuellement complétée par une disjonction de cas, comme l'étude des différents cas de figures en géométrie. Dans ce cas on considère un recouvrement de l'ensemble E, et on raisonne sur un exemple générique de chaque ensemble du recouvrement.

Dans une telle démonstration, on doit distinguer la *nécessité* du raisonnement qui conduit au résultat sur le cas que l'on étudie, c'est-à-dire sur un élément de E, de sa *généralité* (ou *universalité*) qui montre ensuite que ce cas n'a rien de particulier. La nécessité est assurée par l'usage du raisonnement sous forme d'enchaînement de pas de déduction, comme nous l'avons vu en géométrie, la généralité peut résulter simplement d'une argumentation, c'est-à-dire ne pas faire référence, en tout cas pas explicitement, au raisonnement. C'est la qualité de cette argumentation qui permettra de reconnaître une démonstration, c'est-à-dire une preuve intellectuelle, et non une simple preuve empirique, suivant les classifications de N Balacheff (1987). Remarquons que parallèlement, l'enseignement utilise systématiquement des exemples « pour faire comprendre ». Un tel exemple est évidemment supposé avoir un caractère suffisamment générique, sinon il ne serait qu'une vérification dans un cas particulier, mais ce caractère générique n'a pas à être argumenté car le but n'est pas de démontrer et le caractère générique est à admettre par les élèves sur l'autorité de l'enseignant.

2.2) Etude d'exemples. La démonstration en algèbre.

Précisons ici que nous entendons le mot algèbre en son sens élémentaire traditionnel, pratiquement synonyme de calcul littéral. Afin d'illustrer le double aspect de nécessité et de généralité, voici deux démonstrations d'un énoncé d'arithmétique (Garuti et al, 1998).

Enoncé : *la somme de deux entiers impairs consécutifs est un multiple de 4.*

Première démonstration, par un élève de cinquième :

« Je fais quelques essais : 3+5=8, 1+3=4, 5+7=12 ; je vois que je peux écrire ces additions de la manière suivante : 3+5=3+1+5-1=4+4=8 (de même pour les autres). C'est la même chose que d'additionner le nombre pair intermédiaire à lui-même, et le double d'un nombre pair est toujours un multiple de 4. »

Deuxième démonstration, par un élève de seconde :

« Je peux écrire deux nombres impairs consécutifs sous la forme 2k+1 et 2k+3, ainsi je trouve :

$$(2k+1) + (2k+3) = 2k+1 + 2k+3 = 4k+4 = 4(k+1).$$

Le nombre obtenu est un multiple de 4. »

Examinons ces deux démonstrations : dans la première, l'élève, après une vérification sur trois exemples, montre en se concentrant sur le premier, 3+5=8, que l'on peut présenter le calcul de manière à ce qu'il ait une valeur générale en introduisant le nombre pair « intermédiaire » entre deux impairs consécutifs. Remarquons que cette argumentation de généralité est tout à fait explicite et particulière au problème considéré. Dans la deuxième, l'élève traite directement un « cas général » grâce à la notation littérale, c'est l'emploi de cette notation, dont l'origine remonte à Viète, au seizième siècle, qui assure la généralité : la lettre k représente un nombre entier quelconque, donc le calcul est général, mais comme cette argumentation, contrairement à la première, n'est pas liée à un problème particulier, et qu'elle est connue comme classique, elle n'est pas reproduite, il n'y a donc pas d'argumentation explicite de généralité. Cette question de la généralité n'apparaît explicitement dans la classe qu'aux débuts de l'apprentissage du calcul littéral, quand l'enseignant y fait allusion en rappelant « traitez un cas général, calculez avec des lettres ! »

Quant à la nécessité, elle n'apparaît pas à première vue dans aucune des deux démonstrations. La deuxième par exemple se réduit apparemment à un calcul. C'est que le calcul n'est autre qu'un raisonnement automatisé. Si l'on voulait mettre en évidence ce raisonnement, il faudrait revenir aux justifications du calcul, en commençant par écrire en détail :

$$(2k+1) + (2k+3) =(2k+1) + (3+2k)=2k+(1+(3+2k))= 2k+((1+3)+2k)= 2k+(4+2k) = 2k+(2k+4)=(2k+2k)+4=(2+2)k+4=4k+4=4k+4.1=4(k+1).$$

On pourrait ensuite justifier chaque égalité en citant les propriétés (associativité, distributivité, commutativité) auxquelles on a fait appel. Celles-ci jouent le rôle d'énoncés tiers et permettent de retrouver, à condition de détailler assez, la structure habituelle d'un raisonnement par enchaînement de pas de déduction. Bien sûr, personne ne fait cela, car le but des règles de calcul est précisément d'éviter d'avoir à le faire. Ceci peut aboutir à une « perte de sens » c'est-à-dire qu'à force de faire des calculs on finit par oublier qu'ils représentent en fait des raisonnements.

En résumé, dans ces deux démonstrations, la nécessité est assurée par l'usage des règles de calcul, la généralité est assurée dans le premier cas par une argumentation explicite particulière, dans le deuxième par le recours à une méthode, la notation littérale, universellement admise en mathématiques, et qui n'est donc plus argumentée. Ainsi s'explique que dans la deuxième démonstration, qui a la forme la plus courante, **aussi bien la nécessité que la généralité soient apparemment absentes**. De là provient l'idée « **qu'il n'y a pas de démonstration en algèbre** ».

Revenons sur cet exemple : nous avons dit un peu rapidement que dans la démonstration classique de calcul littéral, toute allusion explicite aux énoncés tiers qui justifient le calcul est supprimée. En réalité, il n'en est pas ainsi lorsque ces règles sont encore en cours d'apprentissage : alors le professeur en exigera la mention explicite. Il pourra par exemple trouver un peu « rapide » l'égalité 2k+1 + 2k+3 = 4k+4 et exiger un commentaire. Voici une situation analogue observée en quatrième : pour justifier l'égalité,

$$\frac{BC}{2}+\frac{AB}{2}+\frac{AC}{2}=\frac{BC+AB+AC}{2},$$

l'enseignant impose le commentaire suivant « Pour ajouter trois nombres qui ont le même dénominateur, on ajoute les numérateurs. Ce qui fait AB+BC+AC le tout sur 2 . Ainsi le niveau d'explicitation de la démonstration évolue avec le contrat didactique. Ceci est lié à un phénomène de communication général : il n'est pas utile de répéter ce qui est bien connu de votre interlocuteur, soit parce que vous le connaissez précisément, soit parce qu'il est sujet d'une institution dans laquelle un certain savoir est supposé. Bien entendu, l'appréciation de ce qui peut être sous-entendu est aussi en partie subjective, ce qui laisse la place à des styles personnels de rédaction, plus ou moins concis. On peut résumer de façon provocante ce qui précède en affirmant que « toute démonstration est abrégée d'une autre démonstration ». Le lecteur qui prend connaissance d'une démonstration rétablit éventuellement pour lui-même une forme plus explicite, en exhumant les justifications sous-entendues dont il fait crédit à l'auteur. Il en est ainsi en particulier de l'enseignant qui lit une démonstration proposée par un élève ; on conçoit que ceci pose de gros problèmes pour la notation et que ce que l'on veut bien attribuer à l'élève dépende du niveau qu'on lui suppose. Duval propose de tourner cette difficulté en distinguant soigneusement indices de surface et structure profonde de la démonstration, reste à vérifier que cette structure profonde puisse toujours être déterminée sans ambiguïté. Ceci est difficile, en effet nous avons vu dans l'exemple simple du § 1.2, que même le nombre de pas de déduction ne peut pas être fixé sans ambiguïté (Houdebine, 2001).

2.3) Donnée ou hypothèse (à nouveau) ?

Du fait que la démonstration d'un énoncé universel se fait en considérant un élément générique, elle commence par la « donnée » de cet élément. Ainsi, pour démontrer que dans tout triangle les médianes sont concourantes, on commence par la « donnée » d'un triangle quelconque, ce qui explique qu'il soit plus naturel de parler de *donnée* que d'hypothèse. Ceci nous permet de préciser la donnée des objets dont nous avons parlé dans le paragraphe précédent : lorsqu'on a affaire à un énoncé universel portant sur tous les objets d'un ensemble, la donnée est celle d'un objet générique pris parmi dans l'ensemble. Parfois, l'énoncé du théorème préfigure et met déjà en place cette méthode de démonstration : « soit f une fonction continue sur un segment [a,b], alors f est minorée et majorée sur [a,b] ». La démonstration commencera par « soit donnée une fonction f continue sur un segment [a,b] » ; la donnée de cette fonction continue tient lieu d'hypothèse, la conclusion restant « alors f est majorée et minorée sur [a,b] ». Quant à l'énoncé complet quantifié, il serait « quels que soient les nombres réels a et b, et la fonction f, si a<b et si f est continue sur [a,b], elle est majorée et minorée sur [a,b] ». Cette forme lourde, dans laquelle on distingue les données a, b, f et l'hypothèse (la fonction f est continue), est rarement explicitée. De même, l'énoncé classique du théorème des accroissements finis dissimule également une quantification universelle implicite. En algèbre, comme on vient de le voir, c'est la notation littérale qui permet de travailler sur un nombre quelconque ; par exemple, pour démontrer que « pour tous réels a et b, on a $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$ », on commencera par « soit deux réels a et b », en ajoutant éventuellement « quelconques ». La donnée est ici celle de a et b.

2.4) Le cas de la géométrie.

En géométrie, il est remarquable que le problème de la généralité n'apparaisse jamais explicitement, tout au moins dans les travaux de didactique que nous connaissons. Pourtant pour Euclide, au témoignage de Proclus et en accord avec les historiens (Arsac, 1999, Mueller, 1981, Euclide, tome I, p.189-90) il est clair que la démonstration d'une propriété géométrique vraie pour toute une famille de figures, par exemple pour tous les triangles, se fait par la méthode de l'exemple générique, ce qui se traduit par la présentation suivante que nous montrons sur un exemple (prop 6 du livre I des éléments d'Euclide).

Tout d'abord, Euclide énonce le théorème à démontrer, dans toute sa généralité, sans introduire de lettres, c'est ce que Proclus appelle « protasis » :

« Si deux angles d'un triangle sont égaux entre eux, les côtés qui sous-tendent les angles égaux seront aussi égaux entre eux. »

Vient ensuite l' « esthesis » : on se donne un triangle générique et on affirme que l'on va démontrer le résultat dans ce cas particulier :

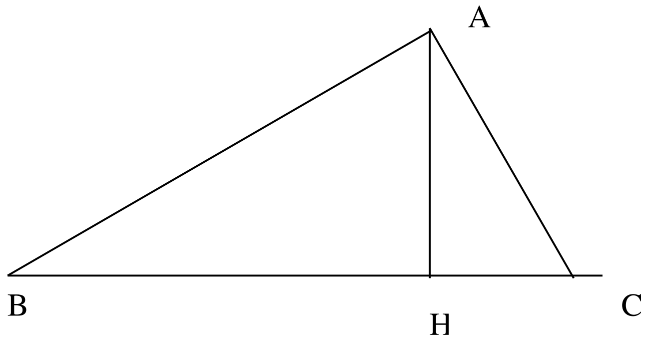
« Soit le triangle ABC ayant l'angle sous ABC égal à l'angle sous ACB. Je dis que le côté AB est égal au côté AC. »

Ensuite seulement vient la démonstration qui est générale dans la mesure où l'on n'a utilisé aucune autre propriété que le fait que les trois points A, B et C ne sont pas alignés (pour une discussion plus approfondie du problème de la généralité chez Euclide, cf Arsac, 1999, p. 370).

Revenons à la classe du vingt-et-unième siècle. Lorsque l'enseignant insiste auprès des élèves pour qu'ils dessinent précisément un triangle quelconque, c'est-à-dire ni isocèle, ni rectangle, il essaie d'obtenir qu'ils tracent une figure générique en ce sens qu'on ne risque pas d'y lire d'autres propriétés que celles postulées dans les hypothèses du problème étudié. Cette précaution a-t-elle un statut théorique ? A priori non : on peut parfaitement démontrer que les médiatrices d'un triangle sont concourantes en s'appuyant sur une figure qui perceptivement représente un triangle isocèle, pourvu qu'on n'utilise pas le fait que deux côtés et deux angles du triangle sont égaux. Ceci justifierait que l'on affirme, comme parfois, que la figure n'a aucun rôle dans le caractère de nécessité de la démonstration : elle aurait seulement l'utilité d'un changement de registre permettant de mettre en valeur visuellement les hypothèses, de déceler par un travail propre à son registre les énoncés à faire intervenir dans la démonstration. Quant à l'insistance de l'enseignant sur les figures génériques, elle n'aurait qu'un rôle pédagogique : éviter de lire sur le dessin des propriétés parasites, montrer que la démonstration doit être dans une certaine mesure indépendante du dessin.

En fait, cette position est illusoire car la très grande majorité des démonstrations géométriques font appel à des propriétés lues sur la figure (cf Arsac, 1998) ; il en est ainsi de celle que nous avons citée en exemple au §1 : en effet, on ne peut conclure que DOIC est un parallélogramme qu'en vérifiant sur le dessin que [OI] et [CD] ne se coupent pas. Toutefois, la situation ici est assez particulière en ce sens que cet appel au dessin est entériné par le programme français actuel. Voici un autre exemple plus simple et plus général : considérons un triangle ABC rectangle en A et la hauteur issue de A qui coupe (BC) en H. Plusieurs démonstrations élémentaires du théorème de Pythagore, ainsi que la démonstration d'Euclide elle-même, utilisent le fait que H est entre B et C, qui permet d'écrire que :

aire (ABC)=aire(ABH)+aire(ACH), ou bien que BC=BH+HC.



Si l'on veut que le résultat de ces démonstrations ait un caractère de nécessité, il faut donc en particulier que H soit *nécessairement* entre B et C. Rappelons que cela signifie depuis Aristote, qu'il ne peut absolument pas en être autrement. Si l'on renonce à se placer dans un cadre de géométrie affine, où le problème, moyennant le choix d'un système d'axes devient un problème algébrique, ce caractère de nécessité peut être établi de deux manières.

- On peut se placer dans un cadre axiomatique « complet », comme celui défini par Hilbert (1899), on disposera alors d'un cadre théorique dans lequel on pourra démontrer que H est entre B et C par un raisonnement déductif ne renvoyant en aucune manière à la lecture de la figure (cf Arsac 1998).
- Mais en général, comme le faisait Euclide lui-même, on utilise cette propriété sans l'énoncer. Dans ce cas, si l'on pose explicitement la question de la vérité de cette affirmation, la réponse spontanée est que c'est évident. Il s'agit maintenant d'analyser cette évidence.

Afin d'écarter toute équivoque dans l'étude de cette question, rappelons qu'il est classique depuis Platon de distinguer la figure tracée sur le papier (ou l'écran) qu'il est naturel de désigner comme un dessin, de l'objet géométrique « abstrait » sur lequel porte en fait la démonstration. Alors, le problème porte bien sur le dessin : comme personne n'a jamais vraiment contemplé l'objet idéal platonicien, c'est bien sur le dessin, qui en est son représentant, tout imparfait soit-il, que se fait la constatation du fait que H est entre B et C. *C'est donc le dessin qui doit avoir un caractère générique* et attester de la nécessité du fait que H est entre B et C. Autrement dit, il faut que dans tout dessin H soit entre B et C, et même qu'on puisse affirmer que tout dessin contradictoire est faux. Mais comment s'en assurer ? Nous emprunterons à N. Rouche (1989) la formule suivante, concernant ce qu'il appelle la « pensée mathématique immédiate » ou les jugements « d'une seule venue » et qui recouvre en particulier ce que nous caractérisé comme des évidences lues sur le dessin.

« Une double condition semble nécessaire et suffisante pour qu'une proposition soit vécue comme évidente, à savoir
a) Qu'on en discerne à vue la réalisation sur un cas particulier ;
b) que la pensée s'engage sans accroc dans l'imagination de tous les cas particuliers. » (Rouche, loc cit, p. 14).

Ainsi, la démonstration géométrique usuelle utilise des constatations sur le dessin qui ne peuvent être incorporées dans le déroulement du raisonnement que parce qu'elles présentent un caractère de nécessité et ce caractère de nécessité renvoie à une certitude sur le caractère générique de ces constats graphiques. Ces constatations sur le dessin, fondées sur la familiarité avec le dessin géométrique, constituent un stock d'évidences qui sont **une partie implicite de la boîte à outils**. Bien entendu, la conviction du caractère générique des constatations sur le dessin peut être renforcée par l'emploi d'un logiciel comme Cabri, mais il reste toujours le problème de la séparation entre ce qu'il est légitime de lire sur le dessin et ce qu'il n'est pas légitime d'y lire, la conclusion en particulier (pour une étude plus détaillée, cf Arsac 1999).

Par ces dernières remarques, liées à la prise en compte du problème de la généralité, l'analyse ci-dessus diffère de celle de Duval. Mais cette différence porte sur la dimension épistémologique de l'analyse sans remettre nécessairement en cause son aspect didactique, ceci pour deux raisons :

- tout d'abord, l'analyse de Duval se situe à un niveau où l'on peut supposer que l'apprentissage des évidences graphiques ou des « jugements d'une seule venue », est déjà réalisé. Nos remarques soulignent simplement que cet apprentissage préalable doit être acquis pour que l'analyse didactique de Duval s'applique.
- D'autre part, personne ne songe (ou ne songe plus ?) à enseigner une géométrie sur une base axiomatique rigoureuse, à la Hilbert, ce qui n'était d'ailleurs pas le projet de Hilbert lui-même, lequel s'attache à « l'analyse de notre intuition de l'espace ». Cette analyse consiste pour lui à mettre en évidence en particulier les relations logiques entre les diverses évidences utilisées en géométrie, mais pas dans le but d'inventer une nouvelle façon de faire de la géométrie plane (Arsac)

Nous avons mentionné le fait que l'on distingue parfois dans une démonstration géométrique différents cas de figure. On peut remarquer que cette distinction entre deux ou trois cas et son caractère exhaustif ne sont en général fondés que sur des évidences graphiques. Lorsqu'on admet, souvent implicitement et toujours sans argumentation explicite, qu'il n'y a qu'un seul cas de figure, ce qui précède montre que l'on admet en fait que le dessin que l'on a tracé a un caractère générique !

Ce genre de question n'est pas abordé en didactique, sans doute parce qu'effectivement, on sait depuis longtemps que la démonstration géométrique classique assure la généralité de ce qu'elle démontre, ce qui revient à la réduire, comme le fait Duval, au seul aspect de la nécessité. Cet escamotage du problème de la généralité est nécessaire si l'on veut éviter les redoutables problèmes dus à la lecture sur le dessin de certaines informations nécessaires à la démonstration. Cependant la prise de conscience du fait que c'est le dessin, et non l'objet géométrique abstrait, qui doit avoir un caractère générique a les avantages suivants :

- elle montre que l'on peut faire de la géométrie, sans résoudre le problème philosophique du statut de l'objet géométrique (Arsac, 1999, p. 363 et 385-87), que chacun peut résoudre à sa manière sans que cela influe sur la pratique de la démonstration géométrique.
- Elle rappelle l'enracinement de la géométrie dans la perception, et souligne, du point de vue pédagogique la continuité entre la familiarisation avec le dessin géométrique qui remonte à l'école primaire et la démonstration géométrique. Elle fait le lien entre le point de vue de Rouche et celui de Duval.

En ce qui concerne la démonstration elle-même, nous pouvons tirer les conclusions suivantes de cette brève étude :

-en géométrie, le problème de la généralité n'est pas soulevé, la démonstration se réduit donc au raisonnement déductif, essentiellement en langue naturelle.

-En algèbre, le raisonnement déductif en langue naturelle disparaît le plus souvent derrière les automatismes de calcul ; le problème de la généralité est réglé par l'usage de la notation littérale, son traitement n'est donc pas explicité.

Le lecteur intéressé par la dimension historique du problème de la généralité, aussi bien en algèbre qu'en géométrie, pourra se reporter à Serfati (1999).

3) La démonstration en analyse et le jeu des variables.

Jusqu'à présent, nous n'avions pas eu à tenir compte de la structure interne des propositions, en général quantifiées, dont le raisonnement assure l'enchaînement. Nous allons voir que dans certaines situations, il n'en est plus ainsi.

Remarquons tout d'abord que l'usage de la quantification implicite n'est pas universel, certains énoncés en analyse ou en algèbre sont explicitement quantifiés soit en langage naturel, soit par introduction du symbolisme du calcul des prédicats. Ainsi, les définitions relatives aux limites, à la continuité, à la dépendance et à l'indépendance linéaire sont très souvent sous forme explicitement quantifiée. A cette occasion, un enseignement des règles syntaxiques et de l'interprétation sémantique de la négation d'un énoncé quantifié est souvent délivré. Nous ne nous attarderons pas sur ces questions car elles sont antérieures à la démonstration proprement dite, quoiqu'elles interviennent dans l'écriture de l'hypothèse et de la conclusion quand on fait le choix d'une démonstration par l'absurde, et qu'elles soient par exemple nécessaires pour passer instantanément de la dépendance à l'indépendance linéaire. Nous allons maintenant, sur le cas de l'analyse, étudier quelques difficultés spécifiques, puis indiquer comment cette étude pourrait être reprise dans d'autres domaines.

3.1) Exemple : les limites.

La définition classique de la limite, dans le cas simple d'une fonction réelle de variable réelle, que l'on supposera pour simplifier partout définie, est la suivante :
Soit x, a et l trois nombres réels, on dit que f tend vers l quand x tend vers a si, quel que soit $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que pour tout x vérifiant $0 < |x - a| < \eta$, on ait $|f(x) - l| < \varepsilon$
Cette définition est fréquemment écrite en utilisant le formalisme des quantificateurs. Mais ce qui nous intéresse, ce sont les commentaires qui accompagnent en général cette définition, et qui soulignent trois phénomènes : le caractère générique de ε, la dépendance de η par rapport à ε, le changement de statut de ε suivant qu'il figure dans l'hypothèse ou dans la conclusion.

3.1.1) Le caractère générique de ε : en fait, bien sûr, ce n'est pas dans la définition que ε a un caractère générique, c'est lorsqu'on voudra démontrer que f(x) tend vers l quand x tend vers a, qu'il faudra se donner un ε générique pour commencer la démonstration. D'ailleurs, un logicien n'accepterait jamais de désigner par la même lettre la variable muette ε qui figure dans la définition et le nombre réel positif générique que l'on introduit pour la démonstration.

Certains manuels explicitent d'emblée dans la définition la pratique de la démonstration sur un ε générique ; la définition est déjà formulée comme une règle d'action, par exemple :

> « Définition : Etant donné le nombre positif arbitraire ε, on peut prouver l'existence d'un nombre positif α tel que la condition $|f(x) - l| < \varepsilon$ est vérifiée en tout point x qui vérifie $0<|x - a| < \alpha$. ». (Cagnac, 1963, p. 67) »

Cette idée de remplacer le *quel que soit* par l'allusion à un élément quelconque n'est pas propre aux mathématiciens. C'est ainsi que John Stuart Mill écrit : « The language of ratiocination would, I think, be brought into closer agreement with the real nature of the process, if the general propositions employed in reasoning, instead of being in the form *All men are mortal*, or *Every man is mortal*, were expressed in the form *Any man is mortal* (Un homme quelconque est mortel) (cité in Lalande, 1902, article « quelconque »).
On trouve dans certains manuels une justification de la preuve par exemple générique par appel aux situations de débat contradictoire, par exemple :

> « […] l'affirmation : « f(x) tend vers l lorsque x tend vers x_0 » nécessite une démonstration. Pour bien comprendre le mécanisme de celle-ci, imaginons deux personnes A et B, A faisant la démonstration sous le contrôle de B, B imposera à A certaines conditions, A dira à B comment il y satisfait, et B vérifiera les résultats obtenus par A sans s'inquiéter de la façon dont ils ont été obtenus. A cet effet, A impose à B un nombre positif, et lui demande de choisir […] De façon précise, B demande à A de lui fournir un nombre tel que…etc » (Commeau, 1959, p. 312)

La relative rareté de ce genre de commentaire s'explique sans doute par le fait que, pour les enseignants, c'est aux explications orales pendant le cours de prendre en charge l'insistance sur le fait que ε est « donné », « imposé », qu' « on ne peut pas le choisir ». Ces commentaires qui n'ont pas de statut mathématique précis sont évités, peut-être sont-ils considérés comme de la cuisine pédagogique. Pourtant, historiquement, d'Alembert n'hésite pas à faire à un interlocuteur imaginaire pour justifier des règles de manipulation des variables dans un contexte analogue. Voici l'article « exhaustion » dû à d'Alembert, dans la grande Encyclopédie.

> **EXHAUSTION,** s. f. *terme de Mathématiques*. La méthode d'*exhaustion* est une manière de prouver l'égalité de deux grandeurs, en faisant voir que leur différence est plus petite qu'aucune grandeur assignable ; & en employant, pour le démontrer, la réduction à l'absurde.
> Ce n'est pourtant pas parce que l'on y réduit à l'absurde, que l'on a donné à cette méthode le nom de *méthode d'exhaustion :* mais comme l'on s'en sert pour démontrer qu'il existe un rapport d'égalité entre deux grandeurs, lorsqu'on ne peut pas le prouver directement, on se restraint à faire voir qu'en supposant l'une plus grande ou plus petite que l'autre, on tombe dans une absurdité évidente : afin d'y parvenir, on permet à ceux qui nient l'égalité supposée, de déterminer une différence à volonté ; & on leur démontre que la différence qui existeroit entre ces grandeurs (en cas qu'il y en eût) seroit plus petite que la différence assignée. (Encyclopédie, article exhaustion).

Ainsi, d'Alembert rattache explicitement le caractère générique de ε aux règles du débat contradictoire, ce que les Grecs appelaient la dialectique.

On peut tout de même se demander pourquoi il faut tant de discours et d'explications pour fixer un nombre réel positif quelconque, alors qu'on n'en dit pas tant pour fixer un triangle quelconque et démontrer par exemple que « quel que soit le triangle ABC, il existe un cercle (G) passant par A, B et C ». Nous avons volontairement donné à cet énoncé, en explicitant les quantifications, une forme montrant la grande analogie qu'il présente dans sa structure logique avec la définition de la limite. On peut avancer plusieurs hypothèses pour expliquer cette différence :

1) une explication scolaire : l'initiation à la géométrie s'effectue à partir de l'école primaire et se poursuit au collège, de sorte que, lorsqu'on aborde au lycée ou à l'université la notion de limite, le problème de la donation d'un élément générique en géométrie est réglé depuis longtemps.

2) Une explication liée au contenu mathématique : en géométrie, le tracé de la figure « absorbe » en quelque sorte, ou automatise, la donnée de l'objet générique. De plus, ent traçant la figure, on change de registre, ce qui fait apparaître de nouvelles possibilités de traitement, alors que réécrire le ε qui figure dans la définition ne fait surgir a priori aucune idée nouvelle pour le débutant.

Bien sûr, ces deux explications ne sont pas exclusives l'une de l'autre, elles peuvent d'ailleurs se regrouper : le choix d'un élément « quelconque » dans un contexte mathématique est lié à ce contexte et ne constitue pas une connaissance universelle, indépendante du contexte dans lequel on l'applique (pour un exemple en géométrie axiomatique, cf Durand-Guerrier et Arsac, 2003, p. 307).

3.1.2) Un problème oublié, le statut des variables.

Une difficulté bien connue des enseignants provient de l'identité de forme et de contenu des énoncés figurant en hypothèse et en conclusion des théorèmes sur les limites par exemple :
Hypothèse : $\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x, (0 < |x - a| < \eta) \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$.

Conclusion : $\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x, (0 < |x - a| < \eta) \Rightarrow |\alpha f(x) - \alpha l| < \varepsilon$.

Le débutant demeure perplexe devant cette foule de variables dont il ne sait que faire, il ne voit pas de différence majeure entre les contenus de l'hypothèse et de la conclusion. Il s'agit là d'un phénomène bien identifié par Duval en géométrie : la difficulté à différencier le statut des énoncés de leur contenu. Ici, la différence de statut entre l'hypothèse et la conclusion se traduit par une différence du statut des variables : le nombre ε qui figure dans la conclusion doit être considéré comme donné, car la démonstration doit s'effectuer sur un exemple générique, alors que l'on dispose du choix du nombre ε figurant dans l'hypothèse puisque celle-ci est affirmée comme vraie. Il est d'ailleurs prudent de différencier les deux au niveau des notations et d'appeler par exemple ε_1 celui qui figure dans l'hypothèse. Dans ce cas, si $\alpha \neq 0$ la démonstration se réduit à : « ε étant donné, il suffit de choisir $\varepsilon_1 = \dfrac{\varepsilon}{|\alpha|}$ ».
Evidemment, beaucoup d'étudiants « voient » cette égalité, mais il sont incapables de la commenter, c'est-à-dire de préciser les rôles disymétriques joués par ε et ε_1 .

Cette grosse difficulté fait de façon surprenante l'objet de beaucoup moins de commentaires que la précédente. En fait, nous n'avons trouvé qu'un seul manuel y faisant explicitement allusion. Dans les autres, l'étudiant doit extraire cette règle de la pratique qu'il voit à l'œuvre dans les démonstrations, que ce soit dans les manuels ou dans le discours et la pratique de son enseignant. Bien entendu, ceci suppose un emploi rigoureux et une différenciation entre « se donner » et « choisir ».

En géométrie, l'étude de Duval (1995) montre que le problème se pose différemment, au niveau des énoncés mais pas spécialement à celui des variables.

3.1.3) la dépendance de η par rapport à ε.

Dans les ouvrages d'enseignement supérieur où figure la définition de la limite, celle-ci est fréquemment accompagnée d'un commentaire, de longueur variable, soulignant que le nombre η dépend de ε , la chose étant apparemment présentée comme évidente car affirmée sans argument. Très souvent également, cette dépendance est soulignée par l'introduction de la notation η_ε Cette insistance est facile à expliquer : d'une part historiquement les mathématiciens ont eu du mal à tenir compte de cette dépendance, et en la négligeant ont abouti à des théorèmes faux, c'est le cas par exemple pour Cauchy ou Abel. D'autre part, cette même erreur se retrouve chez les étudiants (cf Durand-Guerrier et Arsac, 2003). La difficulté apparaît dès que, cet énoncé étant supposé vrai par hypothèse, on doit l'utiliser pour plusieurs valeurs de ε, il importe alors de différencier au niveau des notations les valeurs correspondantes de η. L'exemple très simple qui suit (extrait de cf Durand-Guerrier et Arsac, 2003) montre tout de suite que ce problème de la dépendance se pose dans un cadre beaucoup plus vaste que celui de la définition de la limite.

Rappelons tout d'abord l'énoncé du théorème des accroissements finis :

Théorème des accroissements finis. Etant donné deux réels a et b tels que a < b et une fonction numérique f définie sur l'intervalle fermé [a ; b], si f est continue sur l'intervalle fermé [a ; b], et dérivable sur l'intervalle ouvert]a ; b[, alors il existe un réel c dans l'intervalle]a ; b[tel que f(b) - f(a) = (b-a)f'(c).

Supposons maintenant qu'on se donne une deuxième fonction g vérifiant les même hypothèses mais telle de plus que la dérivée g' de g ne s'annule pas sur l'intervalle]a ; b[. On peut alors démontrer qu'il existe un réel c dans l'intervalle]a ; b[, tel que $\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$, ce qui constitue le **théorème des accroissements finis généralisé**.

Une démonstration, fréquemment rencontrée chez les étudiants en DEUG scientifique première année, consiste à déduire le deuxième théorème du premier, de la façon suivante.

La fonction f vérifie les conditions d'application du théorème des accroissements finis, donc il existe c dans]a ; b[, tel que f'(c)(b-a) = f(b)-f(a). De même g vérifie les conditions d'application du théorème des accroissements finis, donc il existe c dans]a ; b[, tel que g'(c)(b-a) = g(b)-g(a). Comme g' ne s'annule pas sur]a ; b[, g'(c) $\neq 0$ et donc g(b) - g(a) $\neq 0$. On peut donc faire le quotient des deux égalités, on obtient alors l'égalité cherchée.

Cette démonstration est fausse, bien que le théorème soit exact, car on peut trouver facilement des exemples dans lesquels on ne peut pas trouver un même nombre c pour les deux fonctions f et g et ceci est tout à fait évident si l'on se souvient de l'interprétation graphique du théorème des accroissements finis.

Ici, la dépendance est relative à f : le théorème est implicitement quantifié par rapport à f, « $\forall f, \ldots \exists c$ », on l'applique successivement à f et g, et il faut différencier les nombres c correspondants. Ceci fait apparaître une deuxième possibilité d'analyse et de tentative de remédiation de l'erreur : dans un tel énoncé, f et c sont des variables muettes, qui ne peuvent donc pas servir à désigner quelque objet mathématique que ce soit. Il faut donc tout d'abord appeler autrement les fonctions auxquelles on va l'appliquer, par exemple h et g, puis, en appliquant toujours des règles de manipulation des variables issues de la logique, si l'on appelle d le nombre relatif à h, on doit s'interdire d'appeler du même nom aucun autre objet mathématique. Cette analyse, purement syntaxique, ne semble pas avoir la faveur de la majorité des enseignants de mathématiques (cf Durand-Guerrier et Arsac, 2003)

Ce problème apparaît dès qu'on veut par exemple démontrer que la limite d'une somme ou d'un produit est le produit ou la somme des limites, et déjà ici la dépendance dont il faut tenir compte est une dépendance par rapport à la fonction à laquelle on applique la définition de la limite, comme dans l'exemple ci-dessus. Il est vrai que dans tous ces cas élémentaires, l'oubli de la dépendance conduit malgré tout à un résultat exact...Il n'en est pas de même quand on veut démontrer la continuité de la limite d'une suite simplement convergente de fonctions continues sur un intervalle I : la convergence s'exprime par une hypothèse de la forme : $\forall x \in I, \forall \varepsilon > 0, \exists N, \forall n \in N, n > N \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$. Mais ce qui intervient dans la démonstration de la continuité de f, c'est la dépendance de *N* par rapport à *x*. L'oubli de cette dépendance conduit cette fois-ci à confondre convergence simple et convergence uniforme, et à démontrer que toute fonction limite d'une suite simplement convergente de fonctions continues est elle-même continue, ce qui est faux. C'est la difficulté qu'ont rencontrée Cauchy et Abel en s'intéressant au cas des séries. De même, seule cette règle de dépendance permet de démontrer le théorème affirmant que pour que f soit continue en a, il suffit que pour toute suite (u_n) tendant vers a, $f(u_n)$ tende vers $f(a)$.

3.2) Contextes d'apparition de la dépendance des variables.

Nous avons constaté empiriquement que la règle de dépendance apparaissait dans les démonstrations d'analyse, alors qu'elle ne semblait pas exister en géométrie. Il nous faut maintenant chercher des explications à ce phénomène et déterminer les conditions de son apparition. Pour cela, remarquons que la règle de dépendance intervient dès que l'on utilise au moins deux fois un énoncé tiers de la forme : « quel que soit X, il existe Y » où X et Y sont des objets qui sont chacun éléments d'un ensemble bien déterminé. Dans le théorème des accroissements finis par exemple, X est une fonction continue sur un intervalle fermé [a,b], dérivable dans]a,b[et Y un nombre réel de]a,b[, et la quantification sur X est implicite. Dans la définition de la limite d'une fonction de variable réelle en un point, X et Y, notés traditionnellement ε et δ sont des réels positifs. L'énoncé définit une relation binaire R(X,Y), qui n'est pas fonctionnelle en général ; par exemple dans les deux exemples que nous venons de citer, Y n'est pas fonction de X (sauf cas particuliers). Bien sûr, il serait possible via l'axiome du choix de remplacer R par une relation fonctionnelle, mais nous verrons que ce n'est pas là la pratique des mathématiciens. La règle de dépendance exprime que si X_1 et X_2 sont deux valeurs différentes de X, il n'est pas toujours possible de trouver un Y tel que l'on ait à la fois $R(X_1,Y)$ et $R(X_2,Y)$. C'est en ce sens faible, voisin du sens courant non mathématique du mot, que Y « dépend » de X. Le rappeler, c'est mettre en mise en garde contre une erreur possible dont nous avons vu l'apparition aussi bien chez les étudiants que, historiquement, chez les mathématiciens. Le caractère trivial de la règle, quand elle est exprimée sous forme abstraite comme ci-dessus, rend d'autant plus étonnant qu'elle puisse être source de difficultés quand on doit l'utiliser dans un contexte précis.

Revenons sur le cas de la géométrie. Dans son cas, la pratique de la quantification implicite masque le fait qu'il y a une foule d'énoncés du type « quel que soit X, il existe Y ». Par exemple l'énoncé « Tout segment admet un milieu » signifie, une fois restituée la quantification : « Pour tout couple de points (A,B), si A≠B, il existe un point I de la droite (AB) tel que IA=IB ». Il en est de même de tout énoncé affirmant l'existence, et en général la constructibilité, d'un objet géométrique, par exemple le cercle circonscrit à un triangle, la médiatrice d'un segment, etc. D'autre part, il est courant en géométrie d'appliquer deux fois des énoncés de ce type. Par exemple quand on démontre divers les théorèmes élémentaires relatifs au triangle, on est amené à considérer les milieux, les médiatrices, etc... de plusieurs côtés, et il est facile de trouver d'autres situations moins élémentaires où l'on applique plusieurs fois en géométrie un énoncé du type « quel que soit X, il existe Y ». Et pourtant, on ne parle jamais en géométrie ni de la règle de dépendance, ni d'erreurs qui seraient conséquence de son oubli. La raison en est simple : en géométrie, la dépendance de Y par rapport à X est évidente pour les raisons suivantes :

a) la figure est un registre dans lequel sont traduites les étapes de la démonstration et dans lequel le fait que quand on change X, Y change aussi est en général une évidence graphique : on dessinera difficilement un triangle dans lequel deux médiatrices sont confondues, ou deux triangles qui aient même orthocentre. Si ce deuxième cas se produisait, on en conclurait qu'on s'est placé dans un cas particulier, et qu'il convient de faire une figure correspondant au cas général.
b) en géométrie, Y est en général fonction de X, et plus précisément constructible au sens géométrique à partir de X, et ces deux relations montrent bien la dépendance, surtout la deuxième.
c) Très souvent, cette dépendance fonctionnelle se traduit par des notations systématiques, de façon fort variée : si ABC et A'B'C' sont deux triangles, leurs orthocentres seront notées H et H'. Dans un même triangle ABC, les milieux des côtés pourront être notés A' (milieu de BC), B', C' ou I, J, K.

Bien entendu, a) et b) se renforcent mutuellement. Il est probable que a) joue un rôle prépondérant, en revanche, il semble que c) soit une pratique assez récente, absente en tout cas chez Euclide.

A contrario, le problème de la dépendance se posera plus probablement dans des contextes où une ou plusieurs des conditions suivantes sont réunies :
a') L'absence d'un registre dans lequel on peut lire la dépendance.
b') une dépendance non fonctionnelle de Y par rapport à X.
c') L'absence d'une notation rappelant la dépendance, qu'elle soit fonctionnelle ou non.
d') Une manipulation des variables ne tenant pas compte des règles d'instanciation.

Ces conditions nous permettent de repérer d'autres contextes que l'analyse où les erreurs dues à l'oubli de la dépendance peuvent apparaître. Voici un exemple tiré de l'algèbre linéaire : lorsqu'on cherche les endomorphismes h d'un K-espace vectoriel E qui commutent avec tous les autres, le raisonnement peut être présenté aux étudiants comme ci-dessous.

Soit x un vecteur non nul de E, soit P un sous-espace de E supplémentaire du sous-espace à une dimension Kx engendré par x. Soit p le projecteur sur Kx associé à la décomposition en somme directe $E=Kx+P$. On a en particulier $hp=ph$ et donc $h(p(x))=p(h(x))$. Tenant compte du fait que $p(x)=x$, on obtient $h(x)=p(h(x))$, ce qui signifie que $h(x)$ appartient à Kx, donc est de la forme λx. Si $x=0$, cette même conclusion est évidente.

Tout enseignant qui a eu l'occasion de tester les réactions des étudiants dans cette situation sait qu'ici ils sont en général tout prêts à admettre que la démonstration est terminée, car pour tout x, $h(x)= \lambda x$, et qu'ils sont perplexes quand l'enseignant fait remarquer qu'il faut encore démontrer que λ ne dépend pas de x.

Pourtant ici, pour $x\neq 0$, ce qui est le seul cas intéressant, $\lambda = \dfrac{h(x)}{x}$ est unique et fonction de x, mais les conditions a'), c') et d') suffisent pour rendre probable l'oubli de la règle de dépendance.

En conclusion, cette étude nous permet à la fois de comprendre pourquoi la règle de dépendance est invisible en géométrie, où elle fonctionne trop bien, et de caractériser, à l'aide des variables que nous avons mises en évidence, les contextes dans lesquels elle risque de poser problème.

4) Prémisses, invention et rédaction d'une démonstration.

Nous allons maintenant aborder un aspect de la démonstration indépendant du domaine mathématique étudié, mais qui mettra en évidence les variations suivant le niveau mathématique et le public visé, ce qu'on peut résumer en parlant de dépendance par rapport à l'institution de production et de destination de la démonstration.

On affirme parfois que la démonstration consiste en une suite de déductions logiques permettant d'aller de l'hypothèse à la conclusion, en ajoutant toutefois qu'on peut aussi « remonter » de l'hypothèse à la conclusion en raisonnant par conditions suffisantes, ce que l'on dénomme alors « chaînage arrière » pour le distinguer de la première démarche « chaînage avant ». Cette affirmation doit être complétée et nuancée, en ce sens que cette chaîne de déductions utilise non seulement les hypothèses et données particulières dont on dispose, mais aussi les énoncés de la boîte à outils, et surtout des objets introduits par des constructions auxiliaires justifiées par l'ensemble des connaissances mathématiques antérieures ; celles-ci n'interviennent donc pas seulement comme un réservoir d'énoncés tiers.

Considérons par exemple la démonstration classique relative à la somme des angles d'un triangle ABC qui consiste à tracer en un sommet la parallèle au côté opposé puis à appliquer le théorème des angles alternes-internes. C'est la construction de cette parallèle qui permet de mettre en branle le processus déductif, car on dispose alors de la configuration nécessaire (au point de vue géométrique), c'est-à-dire des conditions d'entrée indispensables à l'application du théorème des angles alternes-internes. Cette prémisse est donc la clé de la démonstration. De même, dans la démonstration, que nous avons rappelée, de l'infinitude des nombres premiers, la clé est l'introduction du nombre m. Dans les démonstrations élémentaires on peut en général introduire toutes les prémisses indispensables au début, mais dans les démonstrations complexes, l'injection de prémisses se fait tout au long du raisonnement, en brisant la chaîne déductive. Il est certes possible de rétablir la continuité logique en citant intégralement les théorèmes qui autorisent l'introduction des prémisses. Par exemple, dans le cas de la somme des angles du triangle : comme ABC est un triangle, le point A n'appartient pas à la droite (BC), par conséquent, comme par tout point extérieur à une droite il passe une parallèle unique à cette droite, il existe une parallèle à (BC) passant par A….Ce pas de déduction rétablit la chaîne logique. Mais cette solution n'est pas satisfaisante, ni du point de vue de l'élève, ni de celui du mathématicien.

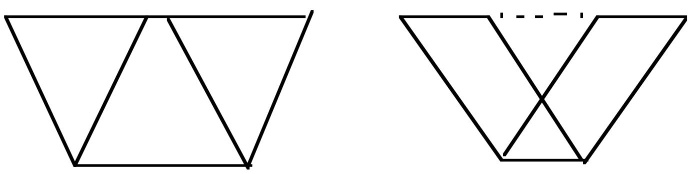
Du point de vue de l'élève, l'existence de la parallèle est attestée par le fait qu'on peut la tracer à la règle et au compas, ou exécuter une commande sur un logiciel de dessin géométrique, opération qui pour lui n'a pas a priori d'aspect logique. D'une manière générale, quand il s'agit de géométrie, l'introduction des prémisses apparaît comme une opération de complémentation de la figure, confinée au registre graphique, qui relève de la recherche de problème, de l'heuristique, non d'une tâche d'organisation.

Du point de vue du mathématicien, la situation est en fait la même. C'est d'ailleurs ainsi que le comprend Euclide qui sépare soigneusement cette phase de constructions nécessaires à la démonstration de la démonstration proprement dite. Plus généralement, les objets mathématiques introduits sans justification explicite, alors que celle-ci est en général possible, sont ceux qui doivent être présents, disponibles dans l'esprit du mathématicien, comme ils le sont pour l'élève, éventuellement comme primitives dans un logiciel, pour que la démonstration puisse être trouvée, et qui doivent l'être dans l'esprit du lecteur pour qu'elle soit effectivement comprise. Lorsqu'un mathématicien introduit un objet ou lit une propriété sur le dessin, au cours d'une démonstration géométrique, il n'a pas présente à l'esprit une axiomatique de la géométrie ; a fortiori s'il décide de « considérer » l'ensemble des objets qui vérifient une certaine propriété, il n'a pas présent à l'esprit l'axiomatique de la théorie des ensembles qui lui permettrait de justifier l'existence de celui qu'il vient d'introduire.

On retrouve ici la distinction entre forme et rôle d'une démonstration : une soumission totale, une réduction à la pure logique serait contradictoire avec le rôle de compréhension et de communication de la démonstration. En effet, comme le souligne Poincaré (1889), « c'est par la logique qu'on démontre mais c'est par l'intuition qu'on invente » : les introductions d'objets relèvent plutôt de l'intuition et de la découverte et ne doivent pas être dissoutes dans la chaîne logique. Du point de vue didactique, ceci soulève le problème du lien dans l'apprentissage entre découverte et rédaction d'une démonstration. Faut-il faire apprendre simultanément à découvrir et à rédiger une démonstration, ou faut-il séparer ces deux tâches ?

Du point de vue mathématique, ceci explique un certain « mépris » des mathématiciens vis-à-vis de l'écriture et de la structure logique de la démonstration. Ce qui est fondamental, c'est l'invention, c'est-à-dire la fabrication des prémisses, la découverte des objets dont l'introduction permettra de mettre en marche le processus déductif. On retrouve ici « l'unité cognitive » (Boero, Garuti, loc cit, Pedemonte, 2002) entre la recherche et la rédaction de la démonstration : si l'on énumère les domaines dans lesquels on peut repérer cette unité, il faut ajouter à la liste de Pedemonte (2002), la liste des objets à introduire, cette liste peut d'ailleurs avoir un sens en dehors de la démonstration au simple niveau de la compréhension du problème. Plus ces objets sont nombreux, plus ils se situent dans des domaines a priori éloignés de celui de l'énoncé, plus leur introduction est originale par rapport aux méthodes classiques de démonstration, plus la démonstration sera difficile à trouver. Dans certains cas, au contraire, cette introduction d'objets est relativement naturelle, et pourra être obtenue simplement par « l'analyse » des Anciens, c'est-à-dire en supposant le problème résolu.

La prépondérance des objets sur le raisonnement se retrouve en géométrie, aussi bien chez Hilbert que chez Euclide. Pour toute démonstration géométrique, appelons « figure complétée » (Arsac, 1999) la figure initiale complétée par toutes les constructions d'objets nécesaires à la démonstration. Il semble bien attesté historiquement que pour les Grecs, cette figure complétée pouvait être considérée comme une métonymie de la démonstration. Or, Hilbert adopte le même point de vue. C'est ainsi qu'il écrit (Hilbert, 1899) "La démonstration bien connue, due à Euclide et illustrée par la figure ci-contre, conduit au théorème :



Théorème 44 : deux parallélogrammes de même base et de même hauteur sont équicomplémentaires"

Dans la suite, Hilbert utilise à nouveau la figure complétée comme métonyme d'une démonstration, y compris dans des cas où la reconstitution de la démonstration à partir de la figure n'est pas évidente.

Ainsi, même en géométrie, la démonstration ne se réduit au raisonnement que si l’on écarte les problèmes qui demanderaient un trop grand appel au dessin[1], ou dont la longueur nécessiterait des cassures du raisonnement pour introduire de nouveaux objets. Cette restriction de la difficulté est certainement inévitable dans une phase d’initiation.

Yves Chevallard avait identifié deux différences essentielles entre les démonstrations « savantes » et les démonstrations « scolaires » : une démonstration savante est juste ou fausse, il n’y a pas de milieu, alors qu’une démonstration scolaire peut valoir 10/20 ; une démonstration savante a pour fonction de prouver, une démonstration scolaire vise à montrer le niveau de son auteur. Ces différences portent sur la fonction de la démonstration. En ce qui concerne son contenu, nous pouvons ajouter que l’on cherchera au niveau scolaire à réduire la complexité par deux méthodes : diminution du nombre de pas de raisonnement, diminution du nombre d’objets à introduire.

Remarques bibliographiques : on trouvera dans Arsac (1998) une étude systématique des implicites lus sur le dessin dans les démonstrations de géométrie plane. D’autre part, on trouvera dans le premier chapitre de Aigner et Ziegler (1999) sept manières différentes de démontrer que l’ensemble des nombres premiers est infini. Ce livre « Raisonnements divins » est une collection de démonstrations choisies pour leur beauté, souvent complexes, mais n’utilisant guère que des outils enseignés dans les deux premières années de l’université. C’est un bijou à recommander à tous ceux qui s’intéressent à la démonstration et en tout cas à faire acheter par toutes les bibliothèques d’établissements.

5) Conclusion.

La prise en compte du double caractère de nécessité et de généralité dans la démonstration d’une part, la mise en évidence du rôle de l’exemple générique dans le règlement du problème de la généralité d’autre part, permettent, sans faire appel ni au calcul des prédicats, ni à la théorie de la démonstration, de dégager les traits communs à la pratique de la démonstration mathématique. En même temps l’étude de cette pratique, dans les champs de la géométrie plane, de l’algèbre et de l’analyse, montre comment la mise en œuvre de ces principes dans des contextes différents conduit à des pratiques spécifiques, des routines, qui assurent la rigueur du raisonnement dans chacun de ces domaines. Ainsi la prise en compte de la nécessité et de la généralité rend compte à la fois de l’unité du raisonnement mathématique et de son éclatement apparent suivant les contextes, qui rend cette unité difficile à percevoir. Notre étude est incomplète, nous pensons en effet qu’il faudrait la tester au moins dans les cas de la géométrie dans l’espace, du calcul des probabilités, de l’arithmétique et des

[1] Il en est ainsi du problème suivant : soit dans un plan deux cercles extérieurs l’un à l’autre (la somme des rayons est strictement inférieure à la distance des centres), existe-t-il des points M dans le plan, extérieurs aux deux cercles, tels que toute droite passant par M coupe au moins un des deux cercles ? Il n’est pas trop difficile de résoudre le problème graphiquement, mais il est pratiquement impossible de rédiger une démonstration de la solution fondée sur autre chose que des évidences lues sur le dessin.

mathématiques discrètes. Nous nous contenterons ici de conjecturer que les résultats précédents ne seraient pas remis en cause.

En ce qui concerne plus précisément la recherche didactique, nous pensons avoir mis en évidence l'oubli dans ce qui a été fait jusqu'à présent dans ce domaine de certains problèmes, en partie à cause de la réduction traditionnelle de la démonstration, et pas seulement chez les didacticiens, à son squelette logique du calcul des énoncés. Or notre étude montre que chez le mathématicien, ce soubassement logique est si bien maîtrisé qu'il devient imperceptible et secondaire (Arsac, 1999, p. 377-78), bien qu'il existe toujours et soit une condition sine qua non du raisonnement. Mais la partie visible de ce raisonnement porte surtout sur des problèmes relatifs aux variables et au calcul, et c'est dans ce domaine que se nouent également les difficultés des apprentis mathématiciens lorsqu'ils ont assimilé les règles du raisonnement de base.

Le concept, que nous appelerions plutôt le postulat ou la conjecture de l'unité cognitive dans la démonstration, développé par l'école italienne, ouvre la voie à un pont entre démonstration et découverte dans la résolution d'un problème de mathématiques. Nous avons vu que l'unité cognitive qui, suivant Pedemonte, doit être spécifiée en différentes variantes pourrait aussi être examinée du point de vue de l'introduction d'objets.

Les analyses que nous avons développées expliquent à notre sens pourquoi la démonstration est à la fois la même et différente suivant les domaines des mathématiques. Limitons nous, pour simplifier, à la règle de dépendance et aux domaines de la géométrie et de l'analyse : cette règle n'est pas particulière à l'analyse, mais est « invisible » en géométrie car elle y est, par suite du contexte, et pour des raisons que nous avons détaillée, évidente. Au contraire, elle apparaît fondamentale en analyse, mais aussi dans certaines démonstrations algébriques. De même, le problème soulevé dans l'apprentissage par la distinction entre statut et contenu d'un énoncé mathématique prend en analyse une dimension différente de celle de la géométrie, en ce sens qu'elle se traduit par des distinctions sur le statut des variables et donc par les règles de leur manipulation dans les calculs. Enfin, même la donnée d'un élément générique semble être différente suivant les contextes.

La géométrie reste un lieu privilégié pour le début de d'apprentissage de la démonstration car la structure logique y apparaît particulièrement évidente, mais tout en ménageant un lien très fort, par l'intermédiaire du dessin avec l'intuition spatiale, c'est-à-dire en proposant un registre autonome muni de grandes capacités de traitement. Cette structure logique restera, même si elle devient implicite, car complètement assimilée, la base des démonstrations plus tard. Mais il y a un grand nombre de choses que la géométrie plane ne permet pas d'apprendre :
-le calcul et tous les raisonnements qui lui sont liés.
-La règle de dépendance des variables.
-Les règles de manipulation des lettres.
-Le raisonnement par récurrence.
-Le raisonnement par exemple générique, et plus globalement la question de la généralité.

Plus généralement, suivant le domaine dans lequel on étudie une démonstration, certains phénomènes deviennent prépondérants, d'autres sont occultés. La même remarque vaut lorsqu'on change d'institution : suivant les cas certains phénomènes deviennent prépondérants, d'autres sont occultés.

Bibliographie

Aigner M, Ziegler G M, 1999, *Proofs of the book* Springer, Berlin, 256 pages.

Arsac G, 1998, *L'axiomatique de Hilbert et l'enseignement de la géométrie au collège et au lycée*. Aléas, Lyon, 125 pages.

Arsac G, 1999, Variations et variables de la démonstration géométrique, *Recherches en didactique des mathématiques*, vol 19/3, p. 357-390.

Balacheff, N., 1987, Processus de preuve et situations de validation, *Educational Studies in Mathematics,* vol. 18, n° 2, Mai 1977, p. 147-176.

Boero P, 2000, Entrer dans la culture des théorèmes à 12-14 ans : un défi pour la didactique des mathématiques, *Actes du séminaire national de didactique des mathématiques, Année 2000,* p.41-54, IREM de Paris 7.

Cagnac G., Ramis E., Commeau J. (1963), *Nouveau cours de mathématiques spéciales, tome 2*, Analyse. Paris : Masson.

COMMEAU J. (1959), *Algèbre et trigonométrie*. Paris : Masson.

Durand-Guerrier V et Arsac G (2003) Méthodes de raisonnement et leurs modélisations logiques. Spéficité de l'analyse. Quelles implications didactiques ? *Recherches en didactique des mathématiques*, vol 23/3, page 295-342.

Duval R. (1995), *Sémiosis et pensée humaine*. Bern : Peter lang, 395 pages.

Egret M.A., Duval R 1989, Comment une classe de quatrième a pris conscience de ce qu'est une démarche de démonstration, *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, n°2, p. 41-64. IREM de Strasbourg.

Euclide, *Les éléments*, tome 1, B. Vitrac éditeur, PUF, 1990, Paris, 531 pages.

Garuti, R.; Boero,P. & Lemut, E.: 1998, Cognitive Unity of Theorems and Difficulties of Proof', *Proceedings of PME-XXII,* vol. 2, pp. 345-352

Granger G.G. (1994), *Formes, opérations, objets*. Paris : Vrin.

Hilbert D, 1899, *Les fondements de la géométrie*, traduction de la dixième édition, Paul Rossier éditeur, Dunod Paris, 1971, 311 pages.

Houdebine J., 2001a, analyse de copies d'élèves, in Barbin, Duval et al., 2001, *Produire et lire des textes de démonstration*, Ellipses, Paris, 266 pages, p. 111-128.

Houdebine J., 2001b, La diversité des textes de démonstration, in Barbin, Duval et al., 2001, *Produire et lire des textes de démonstration*, Ellipses, Paris, 266 pages, p. 111-128.

LALANDE A, 1902, *Vocabulaire technique et critique de la philosophie*, Presses Universitaires de France, Paris, tome 2.

Mueller, I, 1981, *Philosophy of Mathematics and Deductive Structure in Euclid"s Elements*, Cambridge (Massachussets).

Netz R, 1999, *The Shaping of deduction in greek mathematics*, a study in cognitive history, Cambridge, 327 pages.

Pedemonte B, 2002, Etude didactique et cognitive des rapports entre argumentation et démonstration dans l'apprentissage des mathématiques, in Durand-Guerrier et Tisseron éd, *Actes du séminaire national de didactique des mathématiques, année 2002.* ARDM et IREM de Paris 7, p. 163-174.

Rouche N, 1989, Prouver : amener à l'évidence ou contrôler des implications ?, in *La démonstration mathématique dans l'histoire*, IREM de Lyon. 496 pages, p.9-38.

Serfati M. (1999), La dialectique de l'indéterminé, de Viète à Russell. In *La recherche de la vérité*. ACL-Les éditions du kangourou.