ANNEXE
Démonstration de la relation de Simson

Pour tout entier naturel n :

$$F_n^2 + F_{n+1}^2 = F_{2n+1}.$$

Nous allons utiliser la récurrence, mais, en fait, pour éviter une démonstration matricielle, nous ajoutons une deuxième relation à celle de Simson et nous nous proposons de démontrer à la fois :

$$F_n\,(F_{n-1} + F_{n+1}) = F_{2n} \qquad (1)$$

$$F_n^2 + F_{n+1}^2 = F_{2n+1} \qquad (2)$$

(pour une vérification « confortable », utiliser le tableau, énoncé précédemment, des valeurs de F_n)

• Initialisons :
Si $n = 1$,

$$F_1\,(F_0 + F_2) = 1 \times (0 + 1) = 1 = F_{2\times 1} = F_2.$$

$$F_1^2 + F_2^2 = 1^2 + 1^2 = 2 = F_{2\times 1+1} = F_3.$$

• Supposons que (1) et (2) soient vérifiés au rang n et démontrons (1) au rang $n + 1$.
Par définition, $F_{2n+2} = F_{2n+1} + F_{2n}$.
En additionnant (1) et (2), on obtient :

$$F_{2n+2} = F_n^2 + F_{n+1}^2 + F_n\,(F_{n-1} + F_{n+1}),$$

$$F_{2n+2} = F_n\,(F_n + F_{n-1}) + F_{n+1}\,(F_n + F_{n+1}),$$

$$F_{2n+2} = F_n\,F_{n+1} + F_{n+1}\,F_{n+2}.$$

En factorisant F_{n+1} on trouve bien la relation (1) au rang $n + 1$:

$$F_{2n+2} = F_{n+1}\,(F_n + F_{n+2}) \qquad (3)$$

• Toujours en supposant que (1) et (2) sont vérifiés au rang n, démontrons maintenant la relation (2), c'est-à-dire la relation de Simson au rang $n + 1$.
Par définition : $F_{2n+3} = F_{2n+2} + F_{2n+1}$.
En additionnant (2) et (3), on obtient :

$$F_{2n+3} = F_n^2 + F_{n+1}^2 + F_{n+1}\,(F_n + F_{n+2}),$$

$$F_{2n+3} = F_{n+1}^2 + F_n\,(F_{n+1} + F_n) + F_{n+1}\,F_{n+2},$$

$$F_{2n+3} = F_{n+1}^2 + (F_n + F_{n+1})\,F_{n+2}.$$

On remplace $F_n + F_{n+1}$ par F_{n+2} et on reconnaît la relation (2) au rang n + 1 :

$$F_{2n+3} = F_{n+2}^2 + F_{n+1}^2.$$

La relation de Simson est démontrée.
[On peut l'écrire sous la forme : $F_{2(n+1)+1} = F_{(n+1)+1}^2 + F_{n+1}^2$].