Annexe 4

(Quand l'intuition a tout faux)

Surprise pour le temps d'attente moyen

Au cours d'une succession de jeters d'une pièce, le temps d'attente moyen de FF est 6 alors que le temps d'attente moyen de PF est 4. Cela semble paradoxal si l'on considère que ces deux séquences ont même probabilité d'apparition, c'est-à-dire ¼.

En voici l'explication.

Temps d'attente de la séquence P.

- Une fois sur 2 on obtient P dès le premier tirage (temps d'attente = 1). Dans le calcul de la moyenne du temps d'attente, 1 a un poids de 1/2.
- Une fois sur 4 on a le début FP, et le temps d'attente a donc été 2. Dans la moyenne, on a donc 2 avec un poids 1/4.
- Une fois sur 8 on a le début FFP. Dans la moyenne, on a donc 3 avec un poids 1/8 ; etc.

Le temps d'attente moyen de P est donc la somme de la série :

1/2 + 2•1/4 + 3•1/8 + 4•1/16 + ..., que l'on peut calculer, et qui vaut 2.

Mais voici une autre méthode qui présente deux avantages ; elle évite le calcul de la somme d'une série, et son principe s'étend à d'autres cas :

Soit t ce temps d'attente moyen de P. Une fois sur deux, le temps d'attente est 1 car P vient tout de suite. Une fois sur deux, ce temps est $1+t$ car on obtient F, et que tout repart donc à zéro. On a donc $t = 1/2 + (1/2)(1+t)$, qui conduit à $t = 2$.

Temprs d'attente de la séquence F. Soit T ce temps d'attente. En envisageant les deux possibilités pour le premier tirage :

T = (1/2) (Temps d'attente moyen de FF si le premier tirage a donné F) +
(1/2) (Temps d'attente moyen de FF si le premier tirage a donné P)

Le temps d'attente moyen de FF quand le premier tirage a donné P est bien sûr une unité de plus que le temps d'attente moyen de FF, car quand on a obtenu P en premier on a perdu un coup : le P obtenu ne sert à rien et ne servira pas. Le second terme de la somme est donc (1/2)(1+T).

Pour le premier terme, on écrit :

Temps d'attente moyen de FF si le premier tirage a donné F =
(1/2) (Temps d'attente moyen de FF si le premier tirage a donné F et le second a donné F) +
(1/2) (Temps d'attente moyen de FF si le premier tirage a donné F et le second P).

La première grande parenthèse vaut évidemment 2. Quant à la seconde, en raisonnement comme précédemment, on voit qu'elle vaut (2+T). En regroupant ce que nous venons d'obtenir, on a : T = (1/2)((1/2)(2) + (1/2)(2+T)) + (1/2)(1+T), ce qui, après résolution, donne T = 6.

Temps d'attente de la séquence PF. Soit T' ce temps. Par la même méthode, on trouve :

T' = (1/2) (temps d'attente moyen de PF si le premier tirage a donné P) +
(1/2) (temps d'attente moyen de PF si le premier tirage a donné F)
= (1/2) (1+ temps d'attente moyen de F)+ (1/2) (1+T')
= (1/2) (1+2) + 1/2 + T'/2

On en tire T' = 4.