

Algorithmique dans les civilisations anciennes

L'approche algorithmique en mathématiques, attestée dans l'ensemble des civilisations anciennes (Mésopotamie, Égypte, Inde, Chine, Grèce), a été longtemps mal comprise, assimilée à une démarche empirique peu rationnelle, alors qu'elle relève de la préhistoire de l'algèbre. (Bernard Vitrac, Faut-il réhabiliter Héron ?)

Un traitement algorithmique des mathématiques se trouve dans toutes les grandes civilisations anciennes, comme nous le rappelle Bernard Vitrac.

Mais dans les traces écrites que nous possédons, il manque souvent la validation des algorithmes, ce qui ne veut pas dire qu'elle n'existait pas : peut-être relevait-elle de l'oral, ou d'écrits moins nombreux qui ont disparu. Par exemple pour la Grèce, dans les *Métriques* de Héron d'Alexandrie tous les algorithmes (75) sont démontrés, alors que dans le corpus pseudo héronien il n'y a aucune démonstration. Comme le dit Bernard Vitrac : *Il est donc légitime de penser que ce traité a pu fournir la validation des procédures de calcul que l'on trouve dans les recueils de problèmes apparentés à ceux qui sont traités dans les Métriques* [Bernard Vitrac, *Héron d'Alexandrie et le corpus métrologique : état des lieux*]. De même en Chine, les premiers textes écrits ne comportaient que des problèmes et des algorithmes de résolution, sans démonstrations. S'y sont ajoutés par la suite des commentaires (ceux de Liu Hui pour les *Neuf Chapitres*, de Zhao Shuang pour le *Gnomon des Zhou*, et de Li Chunfeng pour les deux ouvrages) qui établissent la validité de leurs algorithmes [Karine Chemla, *Mathématiques et culture. Une approche appuyée sur les sources chinoises les plus anciennes*].

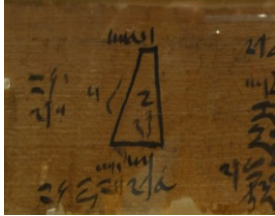



Comment étaient mis en œuvre ces algorithmes (et par qui) ? Là encore nous manquons souvent de documents pour le savoir, mais pour la Chine ancienne, Karine Chemla a pu montrer qu'ils étaient exécutés sur des surfaces à calculer avec des baguettes à calculer. Aujourd'hui leur exécution est confiée à l'ordinateur via leur programmation.

Aller voir dans ces mathématiques anciennes les problèmes qui étaient traités, les algorithmes qui étaient utilisés et la façon dont ils étaient exprimés peut enrichir et éclairer notre enseignement. L'enrichir en nous fournissant des situations qui lui donnent une profondeur historique, et peuvent l'ouvrir sur d'autres disciplines. L'éclairer en nous montrant qu'il n'est pas forcément pertinent de vouloir normaliser les démarches algorithmiques de nos élèves à propos d'un problème qu'ils ont à programmer, que l'on peut programmer des algorithmes sans passer par des formules...

Nous vous proposons quelques exemples égyptiens, grecs et chinois. Mais nous vous suggérons d'aller voir aussi du côté de la Mésopotamie, de l'Inde et des pays d'Islam.

L'algorithmique au temps des pharaons

Les traces écrites des mathématiques égyptiennes sont peu nombreuses. Les égyptologues s'appuient pour l'essentiel sur quatre papyri : le papyrus de Moscou (M), le papyrus de Berlin (B), le papyrus de Rhind (R) et le papyrus de Kahun (K).

Papyrus, et référence d'enregistrement (pour les maths)	Datation (av. J.-C.), Lieu de découverte, Lieu de conservation	Document	Contenu
Papyrus de Moscou Papyrus mathématique de Moscou	XIX ^e siècle, XI ^e dynastie Inconnu, Musée des beaux-arts Pouchkine Moscou (Russie)		25 problèmes mathématiques et solutions
Papyrus de Berlin P. Berlin 6619	XIX ^e siècle, XII ^e dynastie Saqqarah, Berlin (Allemagne)		Sujets médicaux et mathématiques
Papyrus de Rhind P. BM 10057 P. BM 10058	XVI ^e siècle, XV ^e dynastie Thèbes, British Museum Londres (Royaume-Uni)		87 problèmes résolus d'arithmétique, d'algèbre, de géométrie et d'arpentage
Papyrus Kahun ou d'El-Lahoun Kahoun IV 2-3, LV 3-4, XLV 1, ou, UC 32118B, 34A, 59 à 62	XIX ^e siècle, XII ^e dynastie El-Lahoun, University College Londres (Royaume-Uni)		Traité de gynécologie, traité de mathématiques et solutions

Les procédures de calcul y sont toujours exemplifiées mais ne laissent aucun doute sur la méthode générale sous-jacente qui a été utilisée. Les solutions aux problèmes proposées sont présentées sous une forme algorithmique simple consistant en une suite d'instructions menant au résultat ne contenant ni boucle ni condition.

Les procédures utilisées peuvent être rangées dans quatre types :

- Algorithme de calcul (multiplication, division, fraction)
- Résolution d'équations (du premier degré et plus rarement du second degré)
- Calcul de pentes, d'aires et de volumes
- Résolution de problèmes liés à la proportionnalité (proportions, partages égaux ou inégaux)

1) Algorithme de la multiplication

Exemple : problème R70

Calcul de $7 \frac{1}{2} \frac{1}{4} \frac{1}{8}$ fois $12 \frac{2}{3}$		
1	$12 \frac{2}{3}$	
2	$25 \frac{1}{3}$	
4	$50 \frac{2}{3}$	
$\frac{1}{2}$	$6 \frac{1}{3}$	
$\frac{1}{4}$	$3 \frac{1}{6}$	
$\frac{1}{8}$	$1 \frac{1}{2} \frac{1}{12}$	
$7 \frac{1}{2} \frac{1}{4} \frac{1}{8}$	$99 \frac{1}{2} \frac{1}{4}$	

2) Résolution d'une équation du premier degré

Exemple : problème M19

Exemple de calcul d'une quantité (à déterminer)	
<p>Qui traitée $1 \frac{1}{2}$ fois et ajoutée à 4 est devenue 10. Quelle est la quantité qui s'exprime (ainsi) ? Tu dois faire en sorte de calculer la grandeur de 10 envers ce 4, ce qui donne 6. (Ensuite) tu dois faire en sorte de calculer $1 \frac{1}{2}$ pour trouver 1, ce qui donne $\frac{2}{3}$. Tu dois faire en sorte de calculer les $\frac{2}{3}$ de ces 6, Ce qui donne 4. Vois c'est 4 qui s'exprime (ainsi), Ce que tu trouves parfaitement.</p>	<p>$1 \frac{1}{2} X + 4 = 10$ $X ?$</p> <p>$10 - 6 = 4$</p> <p>$1 \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} = 1$</p> <p>$\frac{2}{3} \times 6 = 4, X = 4$</p>

3) Calcul du volume d'une pyramide tronquée

Exemple : problème M14

Méthode de calcul d'une pyramide tronquée	
<p>Si on te dit : une pyramide tronquée de 6 de hauteur, par 4 sur le côté inférieur et par 2 sur le côté supérieur.</p> <p>Tu feras en sorte que ce 4 soit élevé au carré. Il adviendra 16.</p> <p>Tu feras en sorte de doubler 4. Il adviendra 8.</p> <p>Tu feras en sorte que ce 2 soit élevé au carré. Il adviendra 4.</p> <p>Tu feras en sorte d'additionner ce 16 avec ce 8 et ce 4. Il adviendra 28</p> <p>(et) tu feras en sorte de calculer $\frac{1}{3}$ de 6 qui est 2.</p> <p>(Puis) tu feras en sorte de calculer 28, 2 fois. Il adviendra 56.</p> <p>Vois, le résultat est 56. Tu as bien trouvé.</p>	<p>V le volume, hauteur = 6 coudées, bases carrées de côtés 4 et 2 coudées.</p> <p>$4^2 = 16$</p> <p>$2 \times 4 = 8$</p> <p>$2^2 = 4$</p> <p>$16 + 8 + 4 = 28$</p> <p>$\frac{1}{3} \times 6 = 2$</p> <p>$2 \times 28 = 56$</p> <p>$V = 56$</p>

L'algorithme utilisé ici correspond à la formule $V = (a^2 + ab + b^2) \times h/3$. Elle est rigoureusement exacte et les experts se perdent en conjectures sur la façon dont les Égyptiens ont pu parvenir à cette formule.

4) Problème de partage en parts inégales

Exemple : problème R 65

Exemple d'une répartition proportionnelle	
<p>Si on te dit : il y a 100 boisseaux-hekat pour 10 hommes. Il y a un matelot, un officier, un portier à double ration. (Voici) son exécution : tu dois prendre l'ensemble des gens de l'équipage, ce qui fait 13. Calcule en partant de 13 pour trouver 100 pains Ce qui fait $7 \frac{2}{3} \frac{1}{39}$ Tu diras alors : ceci est la nourriture des 7 hommes. Le matelot, l'officier et le portier ont double ration. $7 \frac{2}{3} \frac{1}{39}$ (7 fois répété). Le matelot $15 \frac{1}{3} \frac{1}{26} \frac{1}{78}$ L'officier $15 \frac{1}{3} \frac{1}{26} \frac{1}{78}$ Le portier $15 \frac{1}{3} \frac{1}{26} \frac{1}{78}$ Total 100</p>	<p>Ces trois gradés ont une ration double. Il y a donc 7 hommes qui auront une simple ration. $7 + 2 \times 3 = 13$ Il faut comprendre l'ensemble des parts à distribuer $100 / 13 = 7 \frac{2}{3} \frac{1}{39}$ Chacun des 7 hommes reçoit $100 / 13 = 7 \frac{2}{3} \frac{1}{39}$ Les trois gradés reçoivent chacun $15 \frac{1}{3} \frac{1}{26} \frac{1}{78}$ $7 (7 \frac{2}{3} \frac{1}{39}) \times 3 \times (15 \frac{1}{3} \frac{1}{26} \frac{1}{78}) = 100$</p>

Source : « Mathématiques égyptiennes » par Sylvia Couchoud, Ed. Le Léopard d'Or, 1993 et Wikipedia.

L'algorithmique à Alexandrie : Héron et Théon

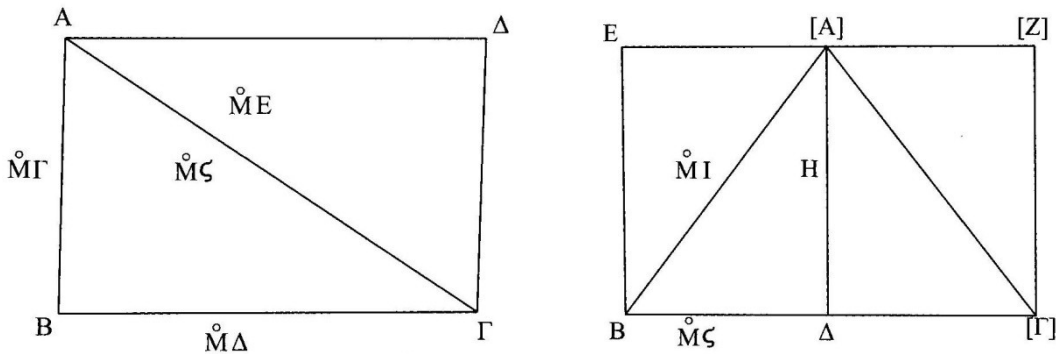
Dans les *Métriques* de Héron d'Alexandrie, le livre I est consacré à la mesure des surfaces : il vise à rendre effectif le calcul de n'importe quelle aire. En voici 5 exemples, dans lesquels on voit bien la structure : énoncé, démonstration, algorithme de calcul. C'est un des rares traités où figurent des algorithmes justifiés.

1) Triangle rectangle : aire et calcul de l'hypoténuse (I 2, trad. Acerbi & Vitrac)

II Soit un triangle rectangle $AB\Gamma$ ayant l'angle en B droit et soit d'une part AB de 3 unités, d'autre part $B\Gamma$ de 4 unités. Trouver l'aire du triangle et l'hypoténuse.

Que le parallélogramme rectangle $AB\Gamma\Delta$ soit complété. En effet, puisque l'aire du parallélogramme rectangle $AB\Gamma\Delta$ – comme cela a été démontré ci-dessus – est 12, et que le triangle $AB\Gamma$ est la moitié du parallélogramme $AB\Gamma\Delta$, l'aire du triangle $AB\Gamma$ sera alors 6. Et puisque l'angle $AB\Gamma$ est droit, les carrés sur AB , $B\Gamma$ sont aussi égaux au carré sur $A\Gamma$; et les carrés sur AB , $B\Gamma$ sont de 25 unités : le carré sur $A\Gamma$ sera donc aussi de 25 unités ; $A\Gamma$ elle-même sera donc de 5 unités.

Et la méthode est celle-ci. En faisant les 3 par les 4, prendre la moitié de ceux-ci ; il en résulte 6. Autant que cela est l'aire du triangle. Et l'hypoténuse : en faisant les 3 par eux-mêmes et, semblablement, en faisant les 4 par eux-mêmes, composer : et en résultent 25 ; et, en prenant un côté de ceux-ci, avoir l'hypoténuse du triangle.



2) Triangle isocèle : aire (I 3, trad. Acerbi & Vitrac)

III Soit un triangle isocèle $AB\Gamma$ ayant AB égal à $A\Gamma$ et, d'une part, chacun des deux [côtés] égaux de 10 unités, d'autre part $B\Gamma$ de 12 unités. Trouver son aire.

Qu'une [droite] $A\Delta$ soit menée perpendiculaire à $B\Gamma$ et que d'une part soit menée par A une [droite] EZ parallèle à $B\Gamma$, d'autre part, que soient menées par B , Γ des [droites] BE , ΓZ parallèles à $A\Delta$: le parallélogramme $B\Gamma EZ$ est donc double du triangle $AB\Gamma$ – car il a et la même base que lui et est dans les mêmes parallèles. Et puisqu'il est isocèle et que $A\Delta$ a été menée perpendiculaire, $B\Delta$ est égale à $\Delta\Gamma$; et $B\Gamma$ est de 12 unités : $B\Delta$ est donc de 6 unités ; or AB est de 10 unités : $A\Delta$ sera donc de 8 unités – puisqu'alors, précisément, le [carré] sur AB est égal à ceux sur $B\Delta$, ΔA – ; de sorte aussi que BE sera de 8 unités ; or $B\Gamma$ est de 12 unités ; l'aire du parallélogramme $B\Gamma EZ$ est donc de 96 unités ; de sorte que l'aire du triangle $AB\Gamma$ est de 48 unités.

Et la méthode est celle-ci. Prends la moitié des 12 : en résultent 6. Et les 10 par eux-mêmes : en résultent 100 ; retranche les 6 par eux-mêmes, lesquels sont 36 : en résultent 64 restants ; de ceux-ci, un côté : il en résulte 8. Autant que cela sera la perpendiculaire $A\Delta$. Et les 12 par les 8 : en résultent 96 ; de ceux-ci, la moitié : en résultent 48. Autant que cela sera l'aire du triangle.

3) Triangle quelconque : aire. C'est le texte où se trouve la fameuse formule de Héron, qui n'existe pas sous forme de formule, mais d'algorithme. On y trouve aussi la célèbre méthode de Héron pour le calcul de la racine carrée, indispensable ici, mais aussi pour de nombreux autres calculs. On a un exemple de boucle et test. (I 8, Traduit du grec par Jacqueline Guichard à partir de l'édition bilingue (grec-allemand) de Hermann Schöne - Leipzig 1903 : Heronis alexandrini opera - Vol. III : *Métriques et Dioptrique* pp. 18 à 24)

VIII Il y a une méthode générale pour trouver, sans perpendiculaire, la surface d'un triangle quelconque dont les trois côtés sont donnés.

Par exemple, que les côtés du triangle soient de 7, 8 et 9 unités. Additionne 7, 8 et 9 ; cela fait 24 ; de ceci prends la moitié ; cela fait 12 ; retranche 7 ; il reste 5. De nouveau retranche de 12, 8 ; il reste 4 ; et retranche-lui de nouveau 9, il reste 3. Fais le produit de 12 par 5 ; cela fait 60 ; multiplie-le par 4 ; cela fait 240 ; multiplie ce dernier par 3, cela fait 720. Prends la racine¹ de celui-ci : ce sera la surface du triangle.

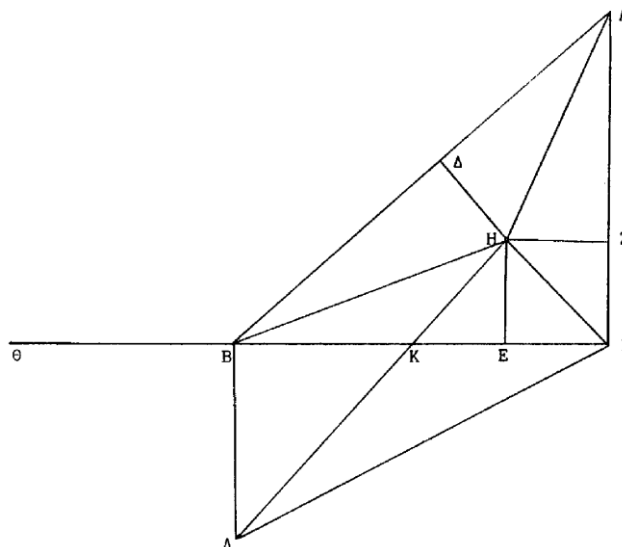
Puisque donc, 720 n'a pas de racine rationnelle, nous extrairons, avec la plus petite différence possible, la racine de la façon suivante :

puisque le carré qui s'approche le plus de 720 est 729 et a pour racine 27, divise 720 par 27 ; cela fait 26 et $\frac{2}{3}$; ajoute 27 ; cela fait $53 \frac{2}{3}$; prends-en la moitié ; cela fait $26 \frac{1}{2} \frac{1}{3}$. Ainsi donc, la racine la plus proche de 720 sera $26 \frac{1}{2} \frac{1}{3}$.

En effet, $26 \frac{1}{2} \frac{1}{3}$ multiplié par lui-même fait $720 \frac{1}{36}$; de sorte que, la différence est de $\frac{1}{36}$.

Si nous voulons que la différence devienne inférieure à $\frac{1}{36}$, nous mettrons les $720 \frac{1}{36}$ trouvés tout à l'heure à la place de 729 et, après avoir fait les mêmes opérations, nous trouverons que la différence devient inférieure de beaucoup à $\frac{1}{36}$.

La démonstration géométrique de ceci est la suivante : les trois côtés d'un triangle étant donnés, trouver la surface.



Il est bien sûr possible de trouver la surface d'un triangle en prenant une perpendiculaire et en se donnant la grandeur de celle-ci, mais qu'on convienne d'obtenir cette surface sans perpendiculaire.

Soit $AB\Gamma$ le triangle donné et AB , $B\Gamma$, $A\Gamma$ chacun de ses côtés. Trouver la surface.

Que soit inscrit, dans le triangle, le cercle ΔEZ dont le centre sera H et que AH , BH , ΓH ,

¹ C'est le même mot qui, en grec, désigne la racine et le côté : pleurav (pleura).

ΔH , EH , ZH soient tracés.

Ainsi donc, d'une part, le produit $B\Gamma EH^2$ est le double du triangle $BH\Gamma$, d'autre part, le produit $\Gamma A ZH$ est le double du triangle $A\Gamma H$ et le produit $AB \Delta H$ est le double du triangle ABH ; par suite, le produit du périmètre du triangle $AB\Gamma$ par EH , à savoir le segment qui part du centre du cercle ΔEH , est le double du triangle $AB\Gamma$.

Que ΓB soit prolongé, et que $B\Theta$ soit égal à $A\Delta$. Ainsi, donc, $\Gamma B\Theta^3$ est la moitié du périmètre du triangle $AB\Gamma$, parce que d'une part, $A\Delta$ est égal à AZ , que d'autre part, ΔB est égal à BE et $Z\Gamma$ à ΓE ; par conséquent, le produit $\Gamma\Theta EH$ est égal au triangle $AB\Gamma$.

Mais le produit $\Gamma\Theta EH$ est la racine du produit du carré⁴ de $\Gamma\Theta$ et du carré de EH ; par suite, la surface du triangle $AB\Gamma$ multipliée par elle-même sera égale au produit du carré de $\Gamma\Theta$ par le carré de EH .

Que HA soit mené de façon à former un angle droit avec ΓH , de même pour BA avec ΓB et que ΓA soit tracé.

Puisque donc, chacun des deux angles ΓHA , ΓBA ⁵ est droit, le quadrilatère ΓHBA est inscrit dans un cercle. Par conséquent les angles ΓHB et ΓAB sont égaux à deux droits; les angles ΓHB et $AH\Delta$ sont aussi égaux à deux droits parce que les angles autour de H sont coupés en deux par AH , BH , ΓH , et que les angles ΓHB et $AH\Delta$ sont égaux aux angles $AH\Gamma$ et ΔHB , et que tous sont égaux à quatre droits. Donc, l'angle $AH\Delta$ est égal à l'angle ΓAB . De plus, l'angle $A\Delta H$ qui est droit est égal à l'angle ΓBA qui est droit. Par conséquent, le triangle $AH\Delta$ est semblable au triangle ΓBA . Par suite, $B\Gamma$ est à BA ce que $A\Delta$ est à ΔH , c'est-à-dire ce que $B\Theta$ est à EH , et en inversant, ΓB est à $B\Theta$ ce que BA est à EH , c'est-à-dire ce que BK est à KE , parce que BA est parallèle à EH et, ayant fait une addition, $\Gamma\Theta$ est à $B\Theta$ ce que BE est à EK ; de sorte que le carré de $\Gamma\Theta$ est au produit $\Gamma\Theta <\Theta B>$ ⁶ ce que le produit $BE\Gamma$ ⁷ est au produit ΓEK , c'est-à-dire ce qu'il est au carré de EH . En effet, EH , mené orthogonalement de l'angle droit sur la base est la hauteur; de sorte que, le produit du carré de $\Gamma\Theta$ par le carré de EH , dont la racine était la surface du triangle $H\Gamma B$, sera égal au produit $\Gamma\Theta B$ multiplié par le produit ΓEB . Et chacun des segments $\Gamma\Theta$, ΘB , BE , ΓE est donné. En effet, d'une part $\Gamma\Theta$ est la moitié du périmètre du triangle $AB\Gamma$, d'autre part, $B\Theta$ est cette grandeur que la moitié du périmètre dépasse de ΓB , BE est celle que la moitié du périmètre dépasse de $A\Gamma$, $E\Gamma$ celle que la moitié du périmètre dépasse de AB , puisque $E\Gamma$ est égal à $Z\Gamma$, et $B\Theta$ à AZ , car il est égal à $A\Delta$.

Ainsi donc, la surface du triangle $AB\Gamma$ se trouve donnée.

On terminera ainsi : soit AB égal à 13 unités, $B\Gamma$ à 14 et $A\Gamma$ à 15. Ajoute 13, 14 et 15, cela fait 42 : prends la moitié de ce résultat, cela fait 21 : soustrais 13, il reste 8 ; ensuite recommence avec 14, il reste 7, et encore avec 15, il reste 6. Multiplie par 8, puis le résultat par 7, et de nouveau ce résultat par 6, tout cela fait 7056. La surface du triangle sera la racine $< 84 >$ de ce résultat.

² Le produit de deux longueurs est ici exprimé par une préposition suivie des noms de ces deux longueurs, séparés par un intervalle : $B\Gamma EH$.

³ $\Gamma B\Theta = \Gamma B + B\Theta$ ou $\Gamma\Theta$.

⁴ exprimé ici par une préposition suivie du nom de la longueur.

⁵ Le mot angle : *gnwiva* (gonia) n'apparaît pas ici, mais une périphrase qui le sous entend : (*hJ uJpov* $\Gamma HA =$ l'<angle> sous ΓHA).

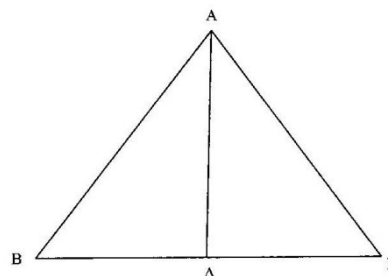
⁶ $< \Theta B >$ indique un ajout dans le texte.

⁷ $BE\Gamma$ est une contraction pour $BE E\Gamma$. (Cf. note 3).

4) Triangle équilatéral : aire (I 17, trad. Acerbi & Vitrac)

XVII Soit en premier lieu un triangle équilatéral dont chaque côté est de 10 unités. Et que ce soit $AB\Gamma$.

Qu'une [droite] $A\Delta$ soit menée perpendiculaire à $B\Gamma$. Et puisque $B\Gamma$ – c'est-à-dire AB – est double de $B\Delta$, le [carré] sur AB est donc quadruple de celui sur $B\Delta$; de sorte que celui sur $A\Delta$ est triple de celui sur ΔB ; or quadruple de celui sur ΔB est celui sur $B\Gamma$: celui sur $B\Gamma$ sera donc épitrite (*1/3 en plus, donc 4/3*) de celui sur $A\Delta$; celui sur $B\Gamma$ relativement à celui sur $A\Delta$ a donc comme rapport celui qu'[a] 4 relativement à 3 ; et [qu'ils soient] tous [multipliés]



par celui sur $B\Gamma$ – d'où, aussi bien celui sur $B\Gamma$ par lui-même que celui sur $A\Delta$ par celui sur $B\Gamma$ – ; la *dunamodunamis* (*puissance 4*) sur $B\Gamma$ a donc comme rapport, relativement au [carré] sur $B\Gamma$ par celui sur $A\Delta$, celui qu'[a] 4 relativement à 3 – c'est-à-dire celui qu'[a] 16 relativement à 12 ; mais le [carré] sur $B\Gamma$ par celui sur $A\Delta$ est le [rectangle contenu] par $A\Delta$, $B\Gamma$ par lui-même – c'est-à-dire deux triangles par eux-mêmes ; la *dunamodunamis* sur $B\Gamma$ relativement à deux triangles par eux-mêmes a donc comme rapport celui qu'[a] 16 relativement à 12 ; or deux triangles par eux-mêmes sont quadruples d'un seul triangle par lui-même ; la *dunamodunamis* sur $B\Gamma$ relativement à un seul triangle par lui-même a donc comme rapport celui qu'[a] 16 relativement à 3 ; et la *dunamodunamis* sur $B\Gamma$ est donnée – puisque $B\Gamma$ l'est aussi – : l'aire du triangle par elle-même est donc donnée ; de sorte aussi que le triangle lui-même est donné.

Et, en conséquence de l'analyse, cela sera synthétisé ainsi.

Les 10 par eux-mêmes : il en résulte 100 ; ceux-ci par eux-mêmes : il en résulte 10000 ; de ceux-ci, prends les 3/16 : il en résulte 1875 ; de ceux-ci, prends un côté ; et puisqu'ils n'ont pas un côté exprimable, qu'il soit pris de manière approchée avec une différence, comme nous l'avons appris ; et l'aire sera $43\frac{1}{3}$.

Algorithme : $c \rightarrow c^2 \rightarrow c^4 \rightarrow 3/16 c^4 \rightarrow \text{rac}(3/16 c^4) = S$

A comparer avec le même problème chez Columelle (Livre V, *De re rustica*, dans Vitrac, *Héron d'Alexandrie et le corpus métrologique : état des lieux*) :

Dans le cas où vous devriez mesurer un triangle à trois côtés égaux, vous opéreriez de la manière suivante.

Soit un champ triangulaire offrant sur chaque côté trois cents pieds ; multipliez ce nombre par lui-même, prenez le tiers de quatre-vingt-dix mille, produit de cette multiplication, c'est-à-dire trente mille, puis le dixième qui est de neuf mille ; réunissez ces deux sommes, vous trouverez trente neuf mille, nombre de pieds carrés que contient ce triangle, et qui équivalent à un jugère un trient et un sicilique.

L'algorithme ($c \rightarrow c^2 \rightarrow 1/3 c^2$, $1/10 c^2 \rightarrow 1/3 c^2 + 1/10 c^2 = S$) est donné sans démonstration.

On trouve aussi, dans le corpus pseudo héronien, pour le triangle équilatéral, un autre algorithme sans démonstration, attribué à Archimède par Diophane (Acerbi et Vitrac, *Metrica*, p. 191) : $c \rightarrow c^2 \rightarrow 13 c^2 \rightarrow 3/10 (13 c^2) = S$

On peut remarquer que l'algorithme de Héron, grâce à l'utilisation d'une puissance 4, fait rare, place ainsi le calcul de la racine en position terminale, ce qui permet dans certains cas d'avoir la valeur exacte, et pour les autres d'utiliser une table ou d'enchaîner un nouvel algorithme pour calculer la racine. Alors que les autres algorithmes utilisent des coefficients approchés, valeurs approchées connues de racines connues.

5) Cercle : aire et périmètre (I 26, trad. Acerbi & Vitrac)

XXVI Alors, d'une part, Archimède démontre dans la *Mesure du cercle* que 11 carrés sur le diamètre du cercle sont, à très peu près, égaux à 14 cercles ; de sorte que, *si le diamètre du cercle est donné, disons au hasard de 10 unités, il faudra faire les 10 par eux-mêmes : il en résulte 100 ; ceux-ci par les 11 : il en résulte 1100 ; dont [on prend] le 14^e : il en résulte 78 1/2 1/14. Il faut déclarer que l'aire du cercle est autant que cela.*

D'autre part, le même Archimède démontre dans l'[écrit] *Sur les plinthes et les cylindres* que le périmètre de tout cercle, relativement au diamètre, a un rapport, d'une part plus grand que celui qu'a 21 1875 relativement à 6 7441, d'autre part plus petit que celui qu'a 19 7888 relativement à 6 2351.

Mais puisque ces nombres ne s'appliquent pas bien aux mensurations, ils sont ramenés à des nombres minimaux, comme le 22 relativement aux 7 ; de sorte que, *si le diamètre du cercle est donné, disons au hasard de 14 unités, et qu'on veuille trouver le périmètre, il faut faire les 14 par les 22 et, de ceux-ci, prendre le septième et déclarer qu'autant que cela est le périmètre ; et il est de 44 unités.*

Et inversement aussi, *si le périmètre est donné de 44 unités et que nous voulions trouver le diamètre, nous ferons les 44 sept fois et, prenant le 22^e, de ce qui en résulte, nous aurons le diamètre ; et c'est 14.*

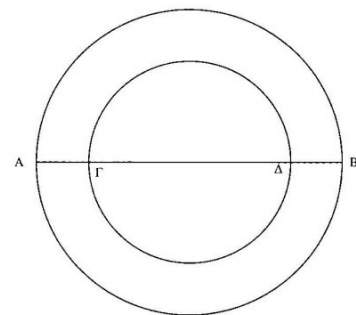
Et le même Archimède démontre, dans la *Mesure du cercle*, que le [rectangle contenu] par la circonférence du cercle et le rayon est double du cercle ; de sorte que, *si le périmètre est donné de 44 unités, prenant la moitié du diamètre – et ce sont 7 unités –, nous les multiplierons par les 44 et, prenant la moitié de ce qui en résulte – et ce sont 154 unités –, nous déclarerons que l'aire du cercle est autant que cela.*

Et si, étant donné un certain domaine, ou bien rectiligne ou bien quelconque, il faut fournir un cercle égal à celui-ci, *prenant l'aire du domaine – et qu'elle soit de 154 unités –, de ceux-ci, les 14 onzièmes, qui deviennent 196 ; et de nouveau de ceux-ci, prenant un côté – et il est de 14 unités –, nous déclarerons le diamètre du cercle autant que cela.*

Deux cercles étant autour du même centre, il est possible de trouver le domaine compris entre leurs circonférences en mesurant chacun des deux cercles et en retranchant le plus petit du plus grand. Mais, afin que nous n'ayons pas à faire la mesure des deux cercles, nous démontrerons [les choses] ainsi.

Soient deux cercles autour du même centre, dont AB, ΓΔ sont des diamètres.

Alors, puisque l'aire du plus grand cercle résulte des 11/14 du [carré] sur AB et semblablement l'aire du plus petit cercle résulte des 11/14 du [carré] sur ΓΔ, des 11/14 de l'excès des [carrés] sur AB, ΓΔ résulte donc l'aire dudit domaine, celui que l'on appelle « jante ». Or l'excès des [carrés] sur AB, ΓΔ est le quadruple du [rectangle contenu] par ΓB, BΔ – puisqu'alors, précisément, aussi le quadruple du [rectangle contenu] par ΓB, BΔ avec le [carré] sur ΓΔ est égal au [carré] sur ΓB, BΔ, l'une avec l'autre – ; or, ΓB, BΔ, l'une avec



l'autre, est égale à AB – puisqu'alors, précisément, BΔ est égale à AΓ – ; *de sorte que si d'une part ΓΔ est donnée de 14 unités, d'autre part chacune des deux AΓ, BΔ de 6 unités, BΓ sera de 20 unités. Ceux-ci par les 6 : il en résulte 120 ; ceux-ci, quatre fois : il en résulte 480 ; de ceux-ci, les 11/14. Il en résulte 377 1/7. Autant que cela sera l'aire de la jante.*

Dans son *Almageste*, Ptolémée a souvent besoin de connaître le côté d'un carré d'aire donné, et donne à chaque fois, sans explication, une valeur approchée très précise du résultat. Dans son *Commentaire sur le premier livre de la Composition mathématique de Ptolémée* (appelé aussi *Syntaxe mathématique* ou *Almageste*), Théon d'Alexandrie explicite alors un algorithme pour ce calcul (qui pour nous est un calcul de la racine carrée). Il décrit son algorithme sur un exemple qui se trouve dans l'*Almageste* : la valeur du côté d'un carré d'aire 4500, que Ptolémée affirme être à très peu près égal à $67 \frac{4}{60} \frac{55}{3600}$ ($67 \text{ } 4' \text{ } 55''$ en écriture sexagésimale). La structure du texte de Théon est la même que chez Héron : énoncé, démonstration, algorithme de calcul.

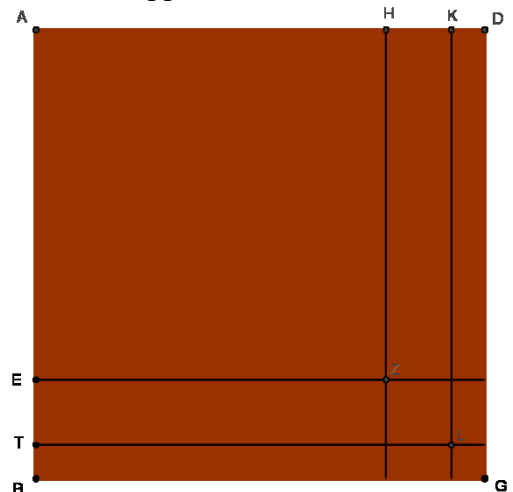
6) Carré : côté (Théon d'Alexandrie, *Commentaire sur le premier livre de la Composition mathématique de Ptolémée*, traduit par l'Abbé Halma, Paris, 1821 p. 184-186. On en trouvera une autre traduction dans *Histoire d'algorithmes*, la meilleure étant celle de l'édition de 2010).

On cherchera comment, étant donnée, l'aire d'un carré dont le côté n'est pas d'une longueur déterminée, nous calculerons ce côté approximativement.

Suivant le quatrième théorème du second livre des éléments, le carré d'une droite entière, quelle qu'elle soit, est égal, à la somme des carrés des segments de cette droite, et au double du rectangle des segments. En effet, ayant un nombre carré donné, tel que 144, dont le côté rationnel soit la droite AB, prenant 100 qui est le plus grand carré inférieur contenu dans ce nombre, et dont le côté est 10, et faisant AG égale à 10, doublons ce nombre ci, parce que le rectangle des segments est pris deux fois ; divisons le reste 44 par le produit 20, reste 4 qui est le carré de GB, dont la longueur est 2. Or AG était 10, donc la droite entière est longue de 12. C'est ce qu'il s'agissait de démontrer.

Mais, pour rendre cette démonstration de la distinction des parties d'un tout, plus sensible, par son application à quelque nombre contenu dans la composition (de Ptolémée), nous l'avons appliquée au nombre 4500 dont il a fait le côté de $67 \text{ } 4' \text{ } 55''$. Supposons ABGD l'aire du carré, seule rationnelle, et qu'il s'agisse d'en calculer le côté approximativement.

Puisque le carré le plus proche 4500, ayant un côté rationnel, est 4489, carré du côté 67, ôtons le carré AZ, ou 4489, dont le côté est 67, du carré ABGD, le gnomon BZD vaudra donc les 11 parties restantes. Réduisons-les en primes, nous en aurons 660. Ensuite doublons $EZ = 67$, parce que EZ est multiplié deux fois, prenons ZH comme prolongeant EZ, et divisons les 660 primes par 134. Cette division donne 4 primes, et nous avons ainsi chacune des droites ET, HK. En complétant les parallélogrammes TZ, ZK, nous aurons 536 pour les deux, ou 268 pour chacun. Puis réduisant les 124 primes restantes en 7440 secondes, nous en retrancherons le parallélogramme de complément



ZL = 16 secondes, de manière qu'en ajoutant le gnomon au premier carré AZ, nous ayons le carré AL fait sur le côté $67 \text{ } 4'$, de $4497 \text{ } 56' \text{ } 16''$. Enfin le gnomon restant BL LD est de $2 \text{ } 3' \text{ } 44''$, c'est-à-dire de 7424 secondes. Doublant donc encore TL, comme étant prolongée par LK, et divisant ces 7424 secondes par $134 \text{ } 8'$, il viendra 55 secondes à peu près au quotient, pour la valeur de chacune des droites TB et KD. Complétant les parallélogrammes BL, LD, nous les aurons de 7377 secondes et 20 tierces, et chacun de $3688''40'''$; mais il reste encore $46'' \text{ } 40'''$ qui font à peu près le carré LG, dont le côté est 55". Ainsi, le côté du carré ABGD, 4500, se trouve être à peu près de $67 \text{ } 4' \text{ } 55''$.

En général, si nous cherchons le côté du carré (la racine carrée de quelque nombre), nous prenons d'abord le côté (racine) du nombre carré le plus approchant. Ensuite, le doublant, et divisant par ce double, le reste du nombre donné réduit en primes, nous ôtons du quotient, le carré ; puis réduisant encore le reste en secondes, et le divisant par le double des unités et des primes, nous aurons à peu près le nombre cherché, qui exprime le côté de l'espace carré.

Quelques remarques

1) Les dénominations

Le nom du carré ou du parallélogramme est celui d'une de ses diagonales : AZ, BZ ...

Le gnomon est l'équerre qui reste quand on enlève un carré d'un carré : il est formé de deux rectangles à angle droit, et d'un carré. Par exemple : gnomon BZD = carré AG – carré AZ, donc gnomon BZD = rectangle BZ + rectangle ZD + carré ZG.

2) L'identité remarquable $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

On peut remarquer que l'algorithme de Théon repose sur une réécriture de cette identité sous la forme $(a+b)^2 - a^2 = 2ab + b^2$ qu'on peut lire comme la division euclidienne de $(a+b)^2 - a^2$ (le gnomon) par $2a$, b étant le quotient et b^2 le reste. C'est une bonne illustration de l'utilité de cette identité.

En termes actuels, ce que cherche Théon c'est x tel que $x^2 = A$ (A entier), A n'étant pas un carré parfait. Il prend, certainement dans une table, un carré parfait a^2 (a entier) qui approche A , et cherche b (fraction sexagésimale d'un entier pour lui, fraction décimale pour nous actuellement) tel que $a + b$ approche x . Donc $(a+b)^2$, a^2 et a étant donnés, la division euclidienne donne b et b^2 .

Quand A est un carré parfait (144), Théon montre que sa méthode marche : il faut jouer le jeu et faire comme si on ne savait pas que 144 était le carré de 12. Peut-être Théon a-t-il choisi 100 et pas 121 comme carré parfait plus petit que 144, considérant que l'on n'a alors pas besoin de chercher dans une table qui donnerait immédiatement la solution pour 144.

Quand A n'est pas un carré parfait (4500) la division donne une valeur de b (largeur du gnomon) un peu plus petite que la valeur non rationnelle manquante, qui permet de construire un nouveau gnomon d'aire plus petite, et de réitérer l'opération jusqu'à l'approximation désirée.

3) La numération sexagésimale

Si l'on veut faire et vérifier les calculs de Théon à la main en base soixante, cela amène à faire du développement et du calcul sur les fractions.

Par exemple : aire du rectangle TZ = $67 \times 4/60$, aire du carré AL = $(67 + 4/60)^2$, aire du carré ZL = $(67/60)^2$, $2 \times TL = 2 \times (67 + 4/60)$, aire du rectangle BL = $(67 + 4/60) \times 4/3660$, aire du dernier carré = $(67 + 4/60 + 55/3600)^2$, et le reste de sa différence avec 4500 qui donne la précision sur l'aire pour un côté de $67\ 4'\ 55''$ (moins d'un dix millième).

4) En numération décimale

La reprise de l'algorithme de Théon fait travailler quotient et division euclidienne.

L'algorithmique en Chine ancienne

Voici quelques exemples de problèmes tirés des *Neufs Chapitres* dont le nom complet est *Les Neufs Chapitres sur les procédures mathématiques*. De façon anachronique nous pourrions dire : *Les Neufs Chapitres sur les algorithmes mathématiques*. Tous les problèmes des *Neufs Chapitres* concernent des grandeurs. Leur présentation est standardisée sous la forme : énoncé, réponse, procédure. L'énoncé commence toujours par : *supposons que* ; ce qui montre que l'on pourrait avoir d'autres données numériques et donc que le problème a un caractère de généralité. Les procédures sont parfois instanciées, parfois partiellement instanciées, parfois générales ne faisant aucune références aux données du problème. Comme nous l'avons dit en introduction, on trouve des démonstrations de ces procédures dans les écrits des commentateurs, ainsi que des indices de leur mise en œuvre

1) Longueur et triangle rectangle : hypoténuse (IX.1 Base (gou) et hauteur (gu))

On pourra comparer avec le même problème vu chez Héron d'Alexandrie (I. 2).

Supposons que la base soit de 3 chi et la hauteur de 4 chi. On demande combien fait l'hypoténuse.

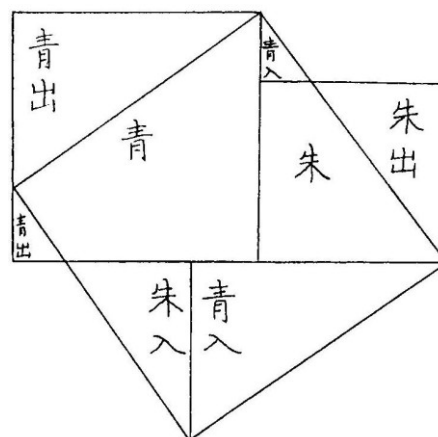
Réponse : 5 chi.

Procédure : base et hauteur étant chacune multipliée par elle-même, on somme (les résultats) et on divise ceci par extraction de la racine carrée, ce qui donne l'hypoténuse.

Commentaire de Liu Hui

« La base multipliée par elle-même fait un carré rouge, la hauteur multipliée par elle-même un carré bleu, et l'on fait en sorte que ce qui sort et ce qui rentre se compense l'un l'autre, que chacun se conforme à sa catégorie ; alors, du fait que l'on garde ceux qui restent sans les bouger, on engendre par réunion l'aire du carré de côté l'hypoténuse. »

La figure de départ est le triangle rectangle *vertical*. A vous de colorier les deux carrés, et de repérer les pièces des carrés rouge et bleu qui restent et celles qui sortent pour entrer, par translation, dans la surface du carré de l'hypoténuse.



2) Longueurs et triangle rectangle : équation (IX.6 Base (gou) et hauteur (gu))

Supposons que l'on ait un étang carré de 1 zhang de côté, au centre duquel pousse un roseau qui dépasse de 1 chi de l'eau. Quand on tire le roseau vers la rive, il arrive juste au bord. On demande combien valent respectivement la profondeur de l'eau et la longueur du roseau.

Réponse : la profondeur de l'eau vaut 1 zhang 2 chi, la longueur du roseau 1 zhang 3 chi.

Procédure : la moitié du côté de l'étang carré étant multipliée par elle-même, on en soustrait ce qui dépasse de l'eau, 1 chi, multiplié par lui-même. On divise le reste par le double de ce qui dépasse de l'eau, ce qui donne comme résultat la profondeur de l'eau. En ajoutant la quantité qui dépasse de l'eau, on obtient la longueur du roseau.

Indications sur les unités de longueur en Chine : 1 zhang = 10 chi, 1 chi = 10 cun.

3) Aire d'un rectangle : produit de fractions (I.19 Champ rectangulaire)

Supposons qu'on ait un champ de $\frac{4}{7}$ de bu de largeur et de $\frac{3}{5}$ de bu de longueur. On demande combien fait le champ.

Réponse : $\frac{12}{35}$ de bu.

Procédure : les dénominateurs multipliés l'un par l'autre font le diviseur ; les numérateurs multipliés l'un par l'autre font le dividende. On effectue la division du dividende par le diviseur.

4) Fraction d'un volume : proportionnalité (II.1 Petit mil et grains décortiqués)

Supposons qu'on ait un dou de petit mil. Si on veut en faire du grain grossièrement décortiqué, on demande combien on en obtient.

Réponse : cela fait 6 sheng de grain grossièrement décortiqué.

Procédure : si ayant du petit mil, on cherche du grain grossièrement décortiqué, on multiplie ceci par 3, et on divise par 5.

Indications sur les unités de contenance en Chine : 1 dou = 10 sheng.

5) Partage équitable de prix : proportionnalité (III. 3 Parts pondérées en fonction des degrés)

Supposons qu'alors que Jia possède 560 sapèques, Yi 350 sapèques et Bing 180 sapèques, les trois personnes, passant ensemble une douane, paient en tout une taxe douanière de 100 sapèques. Si elles veulent payer en pondérant en fonction des quantités (SHU) de sapèques, on demande combien chacune.

Réponse : Jia paie 51 sapèques $\frac{41}{109}$ de sapèque ; Yi paie 32 sapèques $\frac{12}{109}$ sapèque ; Bing paie 16 sapèques $\frac{56}{109}$ de sapèque.

Procédure : on place respectivement les quantités (Shu) de sapèques pour faire la rangée des coefficients de la pondération en fonction des degrés. Et on somme en auxiliaire, ce qui fait le diviseur. On multiplie par les 100 sapèques les coefficients que l'on avait avant qu'ils ne soient sommés, ce qui fait respectivement les dividendes. Effectuer les divisions des dividendes par le diviseur donne les résultats en sapèques.

Ces exemples, pris dans trois civilisations anciennes, nous montrent l'importance qu'y occupait la pensée algorithmique dans le corpus mathématique. Les analyses de Karine Chemla pour la Chine font voir aussi que la recherche de procédures très générales et la démonstration de la validité des algorithmes [*Mathématiques et culture. Une approche appuyée sur les sources chinoises les plus anciennes*], ne sont pas que des préoccupations de l'algorithmique actuelle. Cet éclairage historique sur le traitement algorithmique des mathématiques, peut nous amener à envisager que la pensée algorithmique, omniprésente dans le monde d'aujourd'hui, pourrait avoir une plus grande place dans le traitement des problèmes et techniques mathématiques que nous enseignons.

Bibliographie

- CHABERT Jean-Luc et alii, *Histoire d'algorithmes, du caillou à la puce*, Belin, 1994. Nouvelle édition, revue et augmentée, Belin, 2010.

- CHEMLA Karine, Mathématiques et culture. Une approche appuyée sur les sources chinoises les plus anciennes, dans *La mathématique, I Les lieux et les temps*, dir. Claudio Bartocci et Piergiorgio Odifreddi, CNRS Editions, 2009.
- CHEMLA Karine, GUO Shuchun, *Les neuf chapitres, Le classique mathématique de la Chine ancienne et ses commentaires*, Dunod, Paris, 2005.
- COUCHOUD Sylvia, *Mathématiques égyptiennes*, Recherches sur les connaissances mathématiques de l'Égypte pharaonique, Éditions Le Léopard d'or, Paris, 1993.
- HÉRON d'Alexandrie, *Metrica*, introduction, texte critique, traduction française et notes de commentaire par Fabio Acerbi et Bernard Vitrac, Fabrizio Serra éditeur, Pise-Rome, 2014.
- THÉON d'Alexandrie, *Commentaire sur le premier livre de la Composition mathématique de Ptolémée*, traduit par l'Abbé Halma, Paris, 1821
- VITRAC Bernard, *Faut-il réhabiliter Héron ?*, Sep 2008, Montpellier, France. Les Belles Lettres, pp.281-296, 2011. <hal-00454027>. En ligne sur HAL (<https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00454027/document>), 2010.
- VITRAC Bernard, *Héron d'Alexandrie et le corpus métrologique : état des lieux, Géométrie(s), pratiques d'arpentage et enseignement : quels liens et dans quel contexte ?*, Mars 2010, Paris, France. <hal-00473981>. En ligne sur HAL (https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00473981/PDF/Heron_d_Alexandrie_et_le_corpus_metrologique.pdf), 2010.
- VITRAC Bernard, *Euclide et Héron : Deux approches de l'enseignement des mathématiques dans l'Antiquité ?* G. Argoud. Science et vie intellectuelle à Alexandrie (I^{er}-III^e siècle après J. C.), Publications de l'Université de Saint-Etienne, pp.121-145, 1995. <hal-00175155>. En ligne sur HAL (<https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00175155/document>), 2010.