

Quelques interrogations à propos du "tableau de signes"

(version du 04/04/03)

Dans cet article, nous nous intéressons à un point très particulier du programme de seconde (voir extrait ci-dessous), en vigueur depuis la rentrée 2000, plus précisément :

- résoudre une équation ou une inéquation du premier degré
- utiliser un tableau de signes pour résoudre une inéquation ou déterminer le signe d'une fonction.

<i>Mise en équation ; résolution algébrique. Résolution graphique d'équations et d'inéquations</i>	<i>Résoudre un équation ou une inéquation se ramenant au premier degré. Utiliser un tableau de signes pour résoudre une inéquation ou déterminer le signe d'une fonction. Résoudre graphiquement des équation ou inéquations du type : $f(x)=k$; $f(x)=g(x)$; $f(x)<g(x)$;...</i>	<i>Pour un même problème, on combinera les apports des résolutions graphique et algébrique. On précisera les avantages et les limites de ces différents modes de résolution. On pourra utiliser les graphiques des fonctions de référence et leurs positions relatives. On ne s'interdira pas de donner un ou deux exemples de problème conduisant à une équation que l'on ne sait pas résoudre algébriquement et dont on déterminera des solutions approchées.</i>
--	--	---

Le libellé diffère sensiblement de celui des programmes antérieurs dans la mesure où c'est la première fois que l'expression « tableau de signes » est citée.

Nous nous sommes intéressés dans un premier temps à différentes présentations actuelles de cette notion, puis nous avons recherché les origines des problèmes censés motiver son utilisation, et enfin nous avons essayé de retracer son histoire au travers des différents programmes.

I- Exemples de présentation

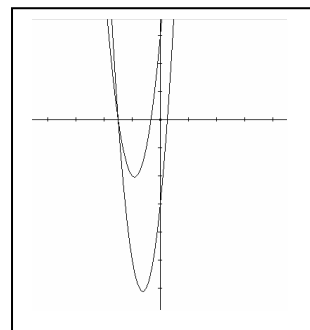
Nous étudions ci-dessous différentes situations proposées aux élèves pour découvrir la méthode de recherche du signe d'une expression polynomiale.

IREM de Poitiers

Une calculatrice graphique affiche les courbes ci-contre pour représenter les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = (2x+3)(3x+1) \text{ et } g(x) = (2x+3)(4x-1).$$

Comparer $f(x)$ et $g(x)$



Commentaires

Il s'agit d'une situation d'introduction motivée par des considérations fonctionnelles.

Le choix des variables didactiques, donnée d'un graphique et coefficients des binômes, vise à induire certains comportements :

d'une part le graphique invite à établir le lien entre comparaison de $f(x)$ et $g(x)$ (relevant du domaine algébrique) et position relative des courbes de f et g (relevant du domaine graphique). De plus le choix de la fenêtre ne permet pas de conclure quant à la position des courbes, ce qui incite à une exploration de la situation à l'aide d'une calculatrice graphique pour émettre des conjectures.

d'autre part les coefficients choisis pour les binômes, ne permettant pas de conjecturer les valeurs exactes des solutions de $f(x) = g(x)$, on est amené à une résolution algébrique.

Ainsi cette situation vise-t-elle à organiser un va et vient entre les cadres fonctionnel, graphique et algébrique.

L'expression factorisée ne comportant que deux facteurs, la résolution algébrique ne débouche pas obligatoirement sur la mise en place du tableau de signes mais peut amener à une résolution utilisant les connecteurs logiques "et" et "ou". Dans ce cas le tableau de signes apparaît comme un moyen pratique (voire un changement de registres) pour résumer la résolution d'inéquations. On peut proposer ensuite d'autres situations avec une expression comportant au moins trois facteurs, ce qui nécessite la mise en place d'un tableau de signes.

■ exemple

On veut étudier le signe de $P(x) = -x(x+1)(3-x)$, expression factorisée.

- On résout $-x(x+1)(3-x) = 0$

$$\begin{aligned} -x = 0 & \text{ ou } x+1 = 0 & \text{ ou } 3-x = 0 \\ x = 0 & \text{ ou } x = -1 & \text{ ou } x = 3. \end{aligned}$$

- On place ces valeurs dans l'ordre croissant sur la première ligne.

- On étudie le signe de chaque facteur dans un tableau de signes.

- On applique la règle des signes du produit pour obtenir la dernière ligne.

x	-1	0	3
-x	+	+	-
x+1	-	+	+
3-x	+	+	-
P(x)	-	0	+

► Voir Exercices 34 à 41

Inéquations

Pour résoudre une inéquation à une inconnue, on peut toujours se ramener à une comparaison à zéro.

Ainsi résoudre une inéquation revient à étudier le signe d'une expression.

Résoudre $A(x) \geq B(x)$ équivaut à résoudre $A(x) - B(x) \geq 0$,

c'est-à-dire trouver pour quelles valeurs de x l'expression $A(x) - B(x)$ est positive ou nulle.

■ exemple

On veut résoudre l'inéquation $-x^2(3-x) \geq 3x-x^2$ d'inconnue x .

- On se ramène à une comparaison à zéro : $-x^2(3-x) - (3x-x^2) \geq 0$.

- On cherche une forme factorisée : $-x^2(3-x) - x(3-x) \geq 0$

ici, on met $-x(3-x)$ en facteur : $-x(3-x)(x+1) \geq 0$.

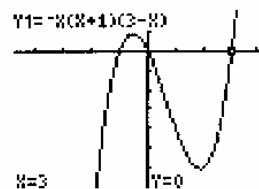
- On retrouve le polynôme $P(x)$ précédent.

Or d'après le tableau de signes précédent, on a :

$$P(x) \geq 0 \text{ lorsque } x \in [-1; 0] \text{ ou } x \in [3; +\infty[.$$

D'où l'ensemble solution : $S = [-1; 0] \cup [3; +\infty[.$

► Voir Exercices 44 à 46



Commentaires

Dans un premier temps, une méthode d'étude du signe du binôme a été introduite en s'appuyant sur la représentation graphique des fonctions affines.

Le tableau de signes est introduit **a priori** comme technique pour déterminer le signe d'un produit. Ensuite il est utilisé en situation pour résoudre une inéquation.

La courbe est là pour rappeler que dans le cadre graphique, en considérant non pas l'expression algébrique mais la fonction $x \mapsto -x(x+1)(3-x)$, on peut obtenir une autre vision de la résolution de l'inéquation $-x(x+1)(3-x) \geq 0$ qui permet au moins de vérifier les résultats. Mais ce graphique, qui ne correspond pas à la situation initiale, en donne-t-il un éclairage graphique ?

3 Inéquations $ax + b \geq 0$, $ax + b \leq 0$, ... ($a \neq 0$)

L'INÉQUATION $ax + b \geq 0$ ($a \neq 0$)

- En appliquant les transformations d'écritures décrites à la page précédente, l'inéquation $ax + b \geq 0$ équivaut à :

$$ax \geq -b \quad \text{et enfin à :}$$

$$x \geq -\frac{b}{a} \quad (\text{si } a > 0) \quad \text{ou} \quad x \leq -\frac{b}{a} \quad (\text{si } a < 0).$$

- Avec l'inéquation $ax + b \leq 0$, nous trouverions :

$$x \leq -\frac{b}{a} \quad (\text{si } a < 0) \quad \text{ou} \quad x \geq -\frac{b}{a} \quad (\text{si } a > 0).$$

Pratiquement, on ne retient pas ces résultats, mais seulement la conséquence suivante :

À RETENIR (SIGNE DE $ax + b$)

a et b fixés, $a \neq 0$. Lorsque x varie sur $\mathbb{R}$, l'expression $ax + b$ change de signe au point où elle s'annule : $-\frac{b}{a}$.

Étudier le signe de $3x - 2$.

1) $3x - 2 = 0$ lorsque $x = \frac{2}{3}$.

2) On détermine le signe de $3x - 2$ pour une valeur quelconque de x (autre que $\frac{2}{3}$);

pour $x = 0$, $3x - 2$ vaut -2 (donc $3x - 2 < 0$).

3) Conclusion

x	$-\infty$	0	$\frac{2}{3}$	$+\infty$
signe de $3x - 2$	$-$	0	$+$	

Dégageons alors une *méthode pratique* pour étudier le signe de $ax + b$ (doc. 10) :

- On recherche le point où $ax + b$ s'annule.
- On regarde le signe de $ax + b$ pour une valeur particulière de x (autre que $-\frac{b}{a}$).
- On consigne les résultats dans un tableau de signes.

doc 10. Un exemple mis en œuvre.

4 Signe d'un produit, d'un quotient

EXEMPLE

Étudier le signe de $(x - 3)(1 - 5x)$.

On détermine séparément les signes de $(x - 3)$ et de $(1 - 5x)$, puis on applique la règle des signes pour un produit. D'où le tableau :

x	$-\infty$	$\frac{1}{5}$	3	$+\infty$
signe de $(x - 3)$	$-$		0	$+$
signe de $(1 - 5x)$	$+$	0	$-$	$-$
signe de $(x - 3)(1 - 5x)$	$-$	0	$+$	$-$

Nous approfondirons ces études dans les *Problèmes* (rubrique 2), pp. 140 et 141.

Commentaires

La résolution de l'inéquation du premier degré dans le cas général est envisagée a priori. Cette résolution débouche sur une méthode pratique qui donne le signe du binôme en perdant de vue tout élément de justification (« on ne retient pas ces résultats »). En conclusion ce signe est résumé dans un tableau dont l'existence n'est pas motivée.

Dans la suite, on utilise a priori un tableau de signes pour l'étude du signe d'un produit.

A ce moment de l'étude, aucun lien n'est fait entre l'algébrique, le fonctionnel et le graphique.

En outre, la présentation de la disjonction des cas « $x \geq -$ **Erreur !** (si $a > 0$) ou $x \leq -$ **Erreur !** (si $a < 0$) » peut être source de confusions ; la forme rappelant la résolution d'équations du type $(ax + b)(cx + d) = 0$, elle risque de suggérer un théorème en acte : « $(ax + b)(cx + d) \geq 0 \Leftrightarrow ax + b \geq 0$ ou $cx + d \geq 0$ ».

Delagrave ,2000 page 153

Application : Signe d'un produit de facteurs du premier degré

Soit à résoudre l'inéquation : $(3x - 6)(-2x + 1) > 0$. Utilisons un tableau de signes. On notera que la connaissance du sens de variation de la fonction $x \mapsto mx + p$ et de la valeur de x qui annule $mx + p$ permet d'en connaître le signe sans résoudre d'inéquation.

x	$-\infty$	$\frac{1}{2}$	2	$-\infty$
$3x - 6$	-	-	0	+
$-2x + 1$	+	0	-	-
$(3x - 6)(-2x + 1)$	-	0	+	-

L'ensemble des solutions de l'inéquation est l'intervalle $\left] \frac{1}{2} ; 2 \right[$.

Commentaires

Le signe du binôme est introduit par l'étude des variations de la fonction affine $x \mapsto mx + p$ à l'aide d'une remarque décontextualisée prenant une allure de méthode. Les cas $m > 0$ et $m < 0$ sont distingués. L'étude du signe d'un produit apparaît comme une application. On notera que le tableau de signes où sont symbolisées les variations des fonctions binômes rappelle l'origine des signes de chaque facteur.

Les aspects fonctionnel et algébrique sont imbriqués. Le cadre graphique n'apparaît pas à ce niveau.

II- Les mises en œuvre sont-elles en adéquation avec le programme ?

Si on se réfère aux commentaires du programme, le cadre algébrique est à relier en permanence au cadre fonctionnel et au cadre graphique.

- “ Utiliser de façon raisonnée et efficace la calculatrice pour les calculs et pour les graphiques ”.
- “ Des activités liées aux fonctions, aux équations ou aux inéquations mettront en valeur l'information donnée par la forme d'une expression et motiveront la recherche d'une écriture adaptée ”.
- “ On multipliera les approches ”...
- La rubrique contenus spécifie “ mise en équation ; résolution algébrique, résolution graphique d'équations et d'inéquations ”.
- “ Pour un même problème, on combinera les apports des modes de résolution graphique et algébrique. On précisera les avantages et les limites de ces différents modes de résolution. On pourra utiliser les graphiques des fonctions de référence et leurs positions relatives. On ne s'interdira pas de donner un ou deux exemples de problèmes conduisant à une équation que l'on ne sait pas résoudre algébriquement et dont on cherchera des solutions approchées ”.

Dans les capacités attendues et pour la première fois dans les programmes, on note : “ **Utiliser un tableau de signes** pour résoudre une inéquation ”. Dans les programmes précédents, si le signe d'un produit apparaissait, jamais la technique du tableau de signes n'était mentionnée.

On peut à ce propos noter le statut très différent qui est réservé à l'objet " tableau de signes " dans les manuels : sa présentation figure soit dans les savoirs officiels (cours) soit dans des " savoirs qui en sont sans en être " : T.P. , méthodes , activités, exercices résolus ... Dans ce dernier cas, le tableau de signes risque d'apparaître comme marginal aux yeux des élèves alors que c'est l'outil qui est principalement utilisé dans les exercices.

En ce qui concerne sa mise en œuvre, telle qu'elle apparaît dans les exercices des différents manuels, on remarque peu de recommandations à propos des liens à établir entre les cadres algébrique, fonctionnel et graphique. Au mieux on est incité à une vérification graphique des résultats. L'éclairage que peut apporter la mise en regard des différents cadres est donc du ressort du lecteur ou de l'enseignant.

D'autre part les programmes précisent que : " Les activités de calcul doivent être l'occasion de raisonner .../... On évitera une activité trop mécanique et on s'efforcera de développer .../... des stratégies s'appuyant sur l'observation, l'anticipation et l'intelligence du calcul". Ainsi, il nous semble, qu'à côté de la mise en place et l'utilisation de techniques, **il est demandé de ne pas perdre de vue les justifications des techniques employées.**

Nos questions

Comme le montrent les extraits précédents, les approches sont différentes.

Certains essaient de trouver une situation « consistante » qui amène à faire de l'utilisation du tableau de signes ou de la résolution des inéquations produit un outil incontournable.

Peut-on trouver des problèmes consistants faisant apparaître le signe d'un produit de deux binômes comme un outil incontournable pour leur résolution ?

Comment étudier le signe d'une expression polynomiale ? Quelles sont les techniques utilisées ? Comment sont-elles justifiées ? Le tableau de signes est-elle la seule technique possible ?

Certains manuels restent dans l'algèbre, certains passent dans le fonctionnel sans aller jusqu'à la vision graphique, d'autres s'aventurent, comme les y incite le programme, à mener de front le fonctionnel, le graphique et l'algèbre.

Actuellement, pourquoi le cadre algébrique est-il souvent privilégié par rapport aux cadres fonctionnel et graphique ?

Ces questions en appellent d'autres :

Pourquoi étudier le signe d'une expression polynomiale ? Mathématiquement, à quoi cela sert-il ?

Quelle importance doit-on accorder à la détermination du signe d'une expression et à la technique du tableau de signes ?

Pour tenter d'éclaircir ces questions nous avons regardé :

l'histoire des mathématiques :

Quand a-t-on étudié le signe d'une expression polynomiale ? Dans quels buts ? Quelles étaient les techniques alors employées ? Comment étaient-elles justifiées ?

les programmes à partir des années 1820 jusqu'à nos jours (dans la mesure où nous pouvions y accéder) et des manuels de différentes époques :

Quand l'étude du signe d'une expression polynomiale est-elle apparue dans les programmes scolaires ? Pour résoudre quels types de problèmes ? Y avait-il des techniques préconisées ou imposées ? Y avait-il des justifications ? Quelle place cette étude avait-elle au sein de l'organisation mathématique préconisée dans les programmes ou mise en œuvre dans les manuels ?

III- Origines du problème

L'étude historique nous a amenés à balayer l'histoire de l'algèbre moderne. Il apparaît que le signe d'une expression algébrique permet d'en localiser les zéros voire les dénombrer. On est dans un contexte d'équations et d'algèbre jusqu'à, nous semble-t-il, Cauchy (≈1820). Ensuite l'analyse devient essentielle.

III.1- Avant Cauchy : la primauté à l'algèbre

Nous avons repris quelques ouvrages qui ont marqué l'histoire des équations algébriques et qui nous ont semblé les plus pertinents.

Descartes (1637) : Dans *La Géométrie*, il n'est question que d'équations. Les préoccupations de Descartes sont les suivantes :

la détermination du nombre de racines d'une équation (nombre de vraies racines, de "fausses racines" ...), résultat énoncé par Girard en 1629 dans son Invention nouvelle en algèbre ;
le calcul des valeurs exactes - et non des valeurs approchées des solutions d'une équation ;
la construction géométrique des racines.

L'étude du signe d'une quantité algébrique n'apparaît pas.

Rolle dans son *Algèbre* (1690) remarque que les racines, que nous appelons maintenant réelles, d'un polynôme sont nécessairement séparées par celles du polynôme, que l'on appelle maintenant polynôme dérivé, ces dernières par celles du polynôme dérivé second, et ainsi de suite. C'est la méthode appelée méthode des cascades.

Le Marquis de l'Hospital (*Analyse des infiniment petits pour l'intelligence des lignes courbes*, 1696) :

L'idée de variation apparaît page 42 : "on conçoit aisément qu'une quantité qui diminue continuellement, ne peut devenir positive à négative sans passer par le zéro". **Le calcul infinitésimal ne s'intéresse pas à ce qui est devenu un point essentiel de notre enseignement à savoir les variations de signe d'une quantité.**

D'Alembert (*Encyclopédie méthodique*, 1784, ACL Editions), dans l'article **approximation**, où il traite de résolution d'équations polynomiales, dit :

"Théorème : Si en substituant dans une équation quelconque deux nombres différents à la place de l'inconnue, on obtient des résultats de signes contraires, l'une des valeurs de l'inconnue sera comprise entre les deux nombres substitués".

De ce résultat, énoncé en théorème mais non démontré, il tire des corollaires permettant d'affirmer :

- * **qu'un polynôme de degré impair a toujours une racine réelle,**
- * **que tout polynôme unitaire de degré pair dont le terme constant est négatif admet une solution réelle,**
- * **que tout polynôme unitaire dont le terme constant est négatif a au moins une racine positive,**

...

Suit une **technique** pour trouver les valeurs approchées des solutions d'une équation :

"Résoudre une équation quelconque, sinon rigoureusement, au moins par approximation."

On recherche des racines multiples.

On recherche si l'équation n'a pas de diviseurs commensurables d'une dimension. Ainsi il reste une équation dont les racines sont inégales et incommensurables ou des racines imaginaires...

On fait un tableau de valeurs pour étudier les variations de signes de l'expression .

Si des variations de signes n'apparaissent pas, il ne faut pas nécessairement conclure qu'il n'y a pas de racines : ayant pris des valeurs entières pour tester le signe, il faut affiner. Pour cela on "zoom" en changeant de variable (On pose : $x = \text{Erreur}!$). Et on recommence, ce qui donne une méthode d'approximation.

La méthode d'approximation due à Newton (voir Lacroix) peut être utilisée car plus efficace .

Comme on peut le constater, il y a un embryon de « méthode » mais elle n'est pas justifiée .

Si la variation du signe de l'expression polynomiale n'est pas fondée, des éléments de justification peuvent être perçus dans l'article **équation**, (page 658, Tome 1, ACL-Editions) : D'Alembert contestant un article de **Fontaine** paru dans les mémoires de l'Académie des Sciences de 1747, fait appel au **graphique**.

On note aussi d'autres références aux graphiques dans divers articles de D'Alembert.

Lacroix : L'ouvrage consulté est la seizième édition des *Eléments d'algèbre de Lacroix* (1836). (La première édition date de 1797.) Ce manuel aura un succès énorme. C'est la transposition du savoir savant de l'époque. Nous retrouvons dans cet ouvrage ce qui a été développé par d'Alembert. Et tout comme l'avait fait D'Alembert, il fait aussi référence à Lagrange.

Après avoir étudié tous les cas où l'on pouvait trouver des solutions exactes aux équations, Lacroix, dans le paragraphe intitulé *Procédés pour approcher des racines d'une équation numérique* (page 298), cite le principe¹ suivant :

"Lorsque l'on a trouvé deux quantités qui, substituées dans une équation à la place de l'inconnue, donnent deux résultats de signes contraires, on doit conclure qu'une des racines de l'équation proposée est comprise entre ces deux quantités, et est par conséquent réelle".

Remarquons que c'est à ce propos que Lacroix introduit les signes < et > et en précise l'utilisation.

¹ Intitulé comme tel par Lacroix.

Le principe n'est pas démontré. Son explication est de nature dynamique et utilise l'hypothèse de continuité non mise à jour à l'époque. Il donne une technique qui n'est « justifiée » que par des exemples. Mais pouvait-il faire autrement ?

Par ailleurs, Lacroix expose une **technique justifiée** cette fois pour reconnaître qu'une équation a des racines doubles :

En effet, supposons que a soit solution de l'équation $x^m + Px^{m-1} + Qx^{m-2} + \dots + U = 0$. En substituant $a + y$ à x on obtient une nouvelle équation (d) en y de degré $m - 1$. Si b est une autre racine, $b - a$ est solution de cette dernière équation. En particulier si a est racine double, $y = 0$ est solution de (d). Ce principe itéré permet de connaître l'ordre de multiplicité d'une racine.

Examinons la **technique** mise en place pour déterminer les racines approchées de $x^4 - 4x^3 - 3x + 27 = 0$ qui a des racines distinctes :

1. La plus grande racine positive est plus petite que 5 car ici U est positif (voir explication ci-après).
2. En substituant $-y$ à x on obtient : $y^4 + 4y^3 + 3y + 27 = 0$. Ce qui montre que y ne peut être que négatif et donc que les solutions, s'il y en a, sont positives.
3. Il substitue 1 ; 2 ; 3 et 4 à x et **on observe un changement de signe** de la quantité $x^4 - 4x^3 - 3x + 27$ entre 2 et 3 et 3 et 4. Il y a donc une racine entre 2 et 3.
4. Pour approcher cette racine on regarde la valeur approchée de l'expression pour $x = \text{Erreur} = 2,5$ qui rend l'expression négative.
5. On peut réitérer ce procédé dichotomique pour affiner. Mais il est préférable d'utiliser (pour gagner du temps) des procédés infinitésimaux : On pose $x = 2,3 + y$, y étant petit, on peut négliger y^2 ; $y^3 \dots$. Ainsi $x^4 = 2,3^4 + 4 \times 2,3^3 y$; $-4 \times x^3 = -4 \times 2,3^3 - 12 \times 2,3^2 y$; $-3x = -3 \times 2,3 - 3y$.

Ainsi $x^4 = 2,3^4 + 4 \times 2,3^3 y$; $-4 \times x^3 = -4 \times 2,3^3 - 12 \times 2,3^2 y$; $-3x = -3 \times 2,3 - 3y$.

L'équation devient alors une équation du premier degré qui donne $y = -\text{Erreur}!$. On ne va pas au delà des centièmes dans l'exécution de la division ce qui donne $y = -0,03$. Puis on réitère l'opération en posant $x = 2,27 + y'$.

Dans l'exposé de cette technique, Lacroix donne des **justifications** :

“ Toute équation² de degré impair a nécessairement une racine réelle d'un signe contraire à celui de son dernier terme ” (démontré).

“ Toute équation de degré pair, dont le dernier terme est négatif, a au moins deux racines réelles, l'une positive et l'autre négative ” (démontré).

“ Quels que soient le degré d'une équation et ses coefficients, on peut toujours assigner un nombre qui, substitué à l'inconnue, rend le premier terme supérieur à la somme de tous les autres ”.

Ce résultat est démontré et signifie qu'étant donnée une équation

$x^m + Px^{m-1} + Qx^{m-2} + \dots + U = 0$, on peut trouver M tel que :

$M^m > P \times M^{m-1} + Q \times M^{m-2} + \dots + U$. En fait il montre qu'il suffit de prendre :

$M > \sup (|P|; |Q|; \dots; |U|) + 1$. Ce résultat peut s'affiner en particulier suivant le signe de U . Si U est positif, il suffit de prendre $M > \sup (|P|; |Q|; \dots; |T|) + 1$, T étant le coefficient de X .

Pour affiner l'approximation :

Il utilise la méthode dichotomique qui est expliquée ;

Il combine avec une méthode infinitésimale qu'il dit être de Newton et qui est démontrée. Cela justifie la troncature au centième de la première valeur de y . Lacroix cite ses sources : la méthode ainsi exposée vient, selon ses dires, de Lagrange et figure dans son Traité de la résolution des équations numériques. Cette méthode s'appelle Méthode de substitutions successives.

Il reconnaît que sa technique a des failles car la substitution par des valeurs entières peut laisser échapper certaines racines.

Euler dans son *Introduction à l'analyse infinitésimale* (1796) énonce le théorème des valeurs intermédiaires pour les fonctions entières : “ Si une fonction entière Z (c'est à dire polynôme NDLR), en faisant $z = a$, prend la valeur A et en faisant $z = b$, prend la valeur B ; en mettant à la place de z des valeurs moyennes entre a et b , la fonction Z peut prendre toutes les valeurs moyennes qu'on voudra entre A et B ”. (n° 33)

Puis (n° 34) “ Si dans la fonction entière Z , l'exposant de la plus haute puissance de z est un nombre impair $2n+1$, la fonction Z aura un facteur réel ”.

² Dans toutes les équations le coefficient du terme de plus haut degré est 1.

Dans le chapitre “ De la recherche des facteurs trinômes ”, Euler s’intéresse à la factorisation des expressions polynomiales. Les techniques sont algébriques et s’appuient sur les propriétés des nombres complexes. Les factorisations obtenues sont utilisées pour sommer des séries infinies (chapitre 10) puis pour décomposer des fractions rationnelles en éléments simples. Dans le tome premier, on ne trouve aucune trace du signe de l’expression mais les techniques de factorisation des polynômes à coefficients réels sont bien présentes.

Le calcul infinitésimal est avant tout un outil pour résoudre des problèmes liés aux courbes dans la lignée de la géométrie analytique créée par Descartes.

La localisation des racines conduit à la recherche (locale) du signe d’une expression.

Le signe d’une expression n’est pas étudié pour lui-même. Plus précisément, on s’interroge sur les valeurs des racines d’une équation. Quand on ne sait pas calculer les valeurs exactes des racines, on cherche des méthodes d’approximation. Pour cela il faut localiser les racines et l’une des méthodes consiste à rechercher localement le signe de la quantité polynomiale par “ balayage ”. (On connaît depuis Girard le nombre possible de racines d’une équation et certaines méthodes, en particulier celle de Lagrange, permettent de déterminer un intervalle de longueur finie où elles figurent). Reste le problème des racines multiples. Pour le résoudre des techniques sont mises au point.

Notons que dans la recherche des valeurs approchées des racines, la technique d’approximation de Newton, qui repose sur les infinitésimaux, est la plus efficace.

Ainsi, on constate que, jusqu’à Cauchy, la problématique essentielle est :

- la recherche des valeurs exactes des racines d’une équation,
- la localisation pour la détermination de valeurs approchées des racines d’une équation polynomiale.

II .2- Cauchy : le renversement, la primauté de l’analyse

Dès le début du XIXe siècle, l’analyse devient prépondérante, principalement avec Cauchy.

Déjà, **Bolzano** (1817) apporte un élément important à la justification du changement de signe d’une fonction et donc d’une expression polynomiale :

“ Dans la théorie des équations, il y a deux théorèmes dont on pouvait dire récemment encore que la démonstration entièrement correcte est inconnue. L’un est le suivant : il faut qu’il y ait toujours, entre deux valeurs quelconques de la grandeur inconnue qui donnent deux résultats de signes opposés, au moins une racine réelle de l’équation. Voici l’autre : toute fonction algébrique rationnelle entière d’une grandeur variable peut être décomposée en facteurs réels du premier et second degré. ”

Bolzano mentionne que si le deuxième théorème semble avoir été démontré par Gauss, peu de mathématiciens se sont intéressés au premier. Il cite Clairault (suppléments de la cinquième édition des éléments d’algèbre), Lacroix (7e édition des éléments d’algèbre), Metternich, Klügel. Il réfute les démonstrations du premier théorème :

celles qui s’appuient sur des vérités géométriques (sur des changements de cadres qui sont apparemment familiers),

celles qui introduisent la continuité fondée sur le mouvement et le temps qui sont deux notions étrangères aux mathématiques,

celles qui utilisent un résultat non prouvé : “ toute grandeur variable peut passer d’un état positif à un état négatif seulement en traversant l’état de n’être rien ou celui d’être infinie ”.

....

La démonstration qu’il propose repose sur un résultat plus général : “ Si deux fonctions continues de x , $f(x)$ et $\phi(x)$ ont la propriété que pour $x = \alpha$ on ait $f(\alpha) < \phi(\alpha)$ mais pour $x = \beta$, $f(\beta) > \phi(\beta)$ alors il doit toujours exister une certaine valeur intermédiaire entre α et β pour laquelle $f(x) = \phi(x)$ ”.

Fourier proposera aussi une méthode de détermination des racines d’une équation, qui s’avère peu efficace.

Avec **Cauchy**, la problématique de **la variation des fonctions** apparaît, de façon explicite mais non essentielle, dans les résumés de ses **cours** à l’Ecole Polytechnique (1823). La recherche des variations se fait à partir de l’étude du signe de la dérivée. Cette problématique de la variation des fonctions semble être restée étrangère aux fondateurs et aux premiers utilisateurs du calcul infinitésimal. Elle ne figure ni dans l’œuvre de Newton, ni dans celle de Leibniz, et apparemment pas dans celle d’Euler. Elle ne figure pas non plus dans les “ Réflexions sur la métaphysique du calcul infinitésimal ” de Lazare Carnot (1797) qui récapitule

les différentes problématiques dont traite le “ calcul ” et fait l’inventaire comparé des méthodes concurrentes. Des techniques, des technologies, voire des embryons de théories sont présents chez Cauchy. Il y manque, bien

sûr, les éléments technologiques et théoriques (c'est à dire la construction de I, R) qu'apporteront les fondateurs de l'analyse moderne.

C'est essentiellement dans le cadre de l'étude et de la résolution des équations différentielles ou aux dérivées partielles, issues de la mécanique et de la physique (questions relatives aux petites oscillations des corps, à la stabilité du système solaire, au mouvement des fluides, à la diffusion de la chaleur) que l'intérêt d'une étude qualitative des fonctions va être défendu, par **Poincaré** mais d'abord par **Sturm** (Mémoires sur la résolution des équations numériques, 1835).

« La résolution des équations numériques est une question qui n'a cessé d'occuper les géomètres, depuis l'origine de l'algèbre jusqu'à nos jours. Lagrange, le premier, a donné pour cet objet une méthode rigoureuse .../... Mais, dans l'application, la longueur des calculs .../... la rend presque impraticable. Le théorème dont le développement est l'objet de ce mémoire .../... fournit un moyen très sûr de connaître combien une équation a de racines réelles comprises entre deux nombres quelconques ; cette connaissance suffit pour conduire à la détermination effective de toutes les racines réelles. »

Pour déterminer le nombre de racines réelles d'une équation polynomiale $P(x) = 0$ dans un intervalle donné, la méthode de Sturm fait intervenir l'algorithme d'Euclide, appliqué à P et P' , et utilise un simple décompte de changement de signes. (Voir annexe)

Donc le premier et principal problème reste la résolution, au moins qualitative, dans un premier temps, des équations : nombre de racines, multiplicité, nature, localisation. Ce problème est difficile : de 1750 à 1850 tous les grands mathématiciens (Lagrange, Laplace, Fourier, Cauchy) vont y travailler et mettre au point des méthodes lourdes, examinant de nombreux cas et donnant, pour la plupart des cas, un majorant et non le nombre exact de racines. Aussi, Sturm, grâce à son théorème, va connaître immédiatement la célébrité.

Il est à remarquer que toutes les méthodes, même pour les polynômes, se placent dans le cadre de l'Analyse et font appel à ses outils (et/ou ses concepts) de base : fonctions, continuité, dérivées, courbes. Les arguments utilisés se fondent sur la corrélation entre s'annuler et changer de signe.

Dans le cas des fonctions polynômes, **c'est à partir de leur forme développée que se fait la recherche des zéros.**

La règle de Descartes établit un lien entre le nombre de racines, positives et négatives, et le nombre de changements de signes des coefficients de cette forme développée. Les autres méthodes (cascades de Rolle, théorème de Fourier, théorème de Sturm) conservent la même idée, les variations de signe concernant alors des expressions en rapport avec ces coefficients. Dans l'établissement de ces méthodes, le va et vient entre des formes factorisées et la forme développée joue un rôle important. Une fois connues toutes les racines, avec leur multiplicité, que l'équation soit entière ou transcendante, on a alors immédiatement le signe de la fonction.

IV- Naissance d'une tradition didactique

Tout acte d'enseignement des mathématiques commence par :

- Déterminer les théories, concepts, techniques qui vont être les objets d'enseignement
- Organiser ces théories, concepts, techniques ... en un cursus qui permette de leur donner du sens
- Articuler les nouveaux savoirs avec les précédents.
- Construire les situations aux travers desquelles l'apprenant pourra se les approprier.

En d'autres termes le premier acte de tout enseignement des mathématiques est un acte d'adaptation à des fins d'enseignement, la **transposition didactique**, qui a pour but de transformer un **savoir savant** en un **savoir à enseigner**.

L'acte de transposition didactique n'est pas neutre par rapport au savoir savant qu'il met en scène :

- Lorsqu'il est opéré à un niveau élémentaire, la nécessité de mettre à portée de débutants les notions à enseigner oblige à créer un environnement propice à leur assimilation. Il y a alors création d'un ensemble de problèmes qui sont parfois étrangers au savoir savant et de techniques qui n'ont d'intérêt que dans la transposition didactique qui les a fait naître³.

³ Les équations du second degré avec paramètres qui ont pendant des décennies occupé une grande place dans les cursus du secondaire - voir infra - fournissent un exemple propre à illustrer ce propos.

- Lorsqu'il est opéré à un niveau supérieur, il donne une forme au savoir savant à transmettre, sélectionne des cadres de présentation, des champs d'application, en occulte d'autres et détermine ainsi, pour des décennies parfois, les axes de la recherche et la postérité de certaines théories⁴.

La partie historique a mis en évidence que le savoir savant et les différentes traditions didactiques qui ont vu le jour au XVIII^e et au début du XIX^e siècle ne faisaient aucune place à l'étude du signe d'une expression algébrique. Seuls les changements de signe des expressions, repérés par de banals tests numériques sont objet d'intérêt, comme révélateurs de l'existence d'un zéro de l'expression.

Les changements de signe de l'expression sont alors utilisés dans des processus dichotomiques pour donner des valeurs approchées de ces zéros.

La question se pose donc de comprendre ce qui a motivé, au niveau de l'enseignement :

- l'étude systématique du signe d'une expression algébrique lorsqu'elle apparaît dans les programmes.
- le choix des techniques qui sont proposées aux élèves pour conduire cette étude, les types de problèmes traités, leurs diverses formes au cours du temps.

IV-1 Les programmes

L'étude du signe d'une expression algébrique devient un objet d'enseignement explicite dans les programmes de 1891.

Classe de troisième

Inégalités⁵ numériques du premier degré à une inconnue

Classe de seconde

Equations du deuxième degré à une inconnue

Inégalité du second degré à une inconnue

Classe de première

Représentation d'une fonction par une courbe –notion de dérivée- La dérivée est le coefficient angulaire de la tangente

Variation des fonctions suivantes :

$$y = ax^2 + bx + c, \quad y = \frac{ax+b}{cx+d}, \quad y = \frac{ax^2 + bx + c}{dx^2 + ex + f}$$

Pour cette dernière fonction, on se bornera à des exemples numériques

Remarque : En vue de la variation des fonctions précédentes, il suffira de faire connaître la dérivée d'une somme, d'un produit et d'un quotient.

Ce programme est repris et complété dans celui de la grande réforme de 1902

Classe de seconde C et D

Variation de l'expression $ax+b$; représentation graphique

Equation du second degré à une inconnue.

Nature et signe des racines - Etude du trinôme du second degré. Changements de signe. Inégalités du second degré. Variation du trinôme du second degré ; représentation graphique.

Variation de l'expression $y = \frac{ax+b}{cx+d}$, représentation graphique.

Notion de dérivée ; signification géométrique de la dérivée – le sens de variation est indiqué par le signe de la dérivée - applications à des exemples numériques simples.

Classe de mathématiques

Variations et représentations graphiques des fonctions :

$$y = ax^2 + bx + c, \quad y = \frac{ax+b}{cx+d}, \quad y = \frac{ax^2 + bx + c}{dx^2 + ex + f}, \quad y = ax^4 + bx^2 + c$$

Notion de dérivée. Signification géométrique (coefficient angulaire de la tangente) et cinématique (vitesse dans le mouvement rectiligne) de la dérivée ; le sens de variation d'une fonction est indiqué par le signe de la dérivée. Dérivée d'une somme, d'un produit, d'un quotient, de la racine carrée d'une fonction, de $\sin x$, $\cos x$, $\tan x$, $\cot x$.

⁴ On pourra lire à ce propos ce qu'écrit L. Schwartz, dans *Un mathématicien dans le siècle*, sur le choix fait par Bourbaki sur la théorie de l'intégration et ses conséquences, en France, sur la recherche en probabilité.

⁵ Le mot *inéquation* semble avoir été introduit assez tard en mathématiques. Il ne figure pas dans l'encyclopédie de D'Alembert. Il apparaît tardivement dans les programmes.

Application à l'étude de la variation, à la recherche des maximums ou des minimums de quelques fonctions simples, en particulier des fonctions de la forme :

$$y = \frac{ax^2 + bx + c}{dx^2 + ex + f}, \quad y = x^3 + px + q$$

où les coefficients ont des valeurs numériques. Dérivée de l'aire d'une courbe dont l'aire est considérée comme fonction de l'abscisse (on admettra la notion d'aire)

L'étude du signe d'une expression algébrique est motivée par l'étude des variations des fonctions à l'aide du signe de la dérivée. Une lecture superficielle peut laisser croire que l'étude des variations des fonctions est l'objectif central et ultime de cette partie du programme d'analyse. Or l'étude des variations des fonctions n'a jamais constitué un axe de recherche en mathématique et la notion de dérivée n'a pas été inventée pour cela. L'objectif des auteurs de ces programmes qui sont de grands mathématiciens de l'époque⁶ est de moderniser l'enseignement des mathématiques qui était jusque là très fortement centré sur la géométrie d'Euclide. Un des axes de cette modernisation est l'introduction du concept majeur du calcul différentiel et intégral⁷ : la dérivée. Un problème surgit aussitôt : trouver des classes de problèmes simples permettant de mettre ce concept en scène. Le savoir savant n'en fournit que deux : la détermination des tangentes à une courbe en un point et les calculs d'aire de trapèzes mixtilignes. Tous les autres problèmes traités par le concept de dérivée sont hors de portée d'un débutant⁸. Un champ d'application simple⁹ est alors créé pour faire vivre ce concept, en donnant une importance primordiale à un point mineur du savoir savant, jamais développé pour lui-même : la variation des fonctions ; cette étude motive celle de l'étude du signe d'une expression algébrique.

Tous les programmes qui se succéderont de 1890 à 1980 reconduiront cette mise en scène, dans laquelle le signe d'une expression algébrique a pour unique champ d'application l'étude des variations des fonctions. Il faudra attendre les années 1980 pour voir les questions d'étude de signes prendre un nouvel intérêt et trouver un nouveau champ d'application avec l'introduction de majorations d'expressions dans le but d'évaluer des ordres de grandeur.

On montrera que l'inégalité $|x| \leq \frac{1}{2}$ entraîne $\left| \frac{1}{1+x} - (1+x) \right| \leq 2x^2$

On entrait avec ces programmes dans une ère ambitieuse de l'enseignement de l'analyse inspirée par les mathématiciens du groupe Bourbaki¹⁰. Les commentaires du programme de l'époque sont éloquents à ce sujet :

Il convient de consacrer de nombreuses activités réparties sur toute l'année aux concepts, fondamentaux en analyse, de majoration, minoration, encadrement (Extrait du commentaire du programme de seconde)

Dans les exercices de recherche de limites on se gardera de toute codification systématique ; on entraînera les élèves à évaluer l'ordre de grandeur des termes mis en jeu (Extrait du commentaire du programme de 1^{ère} S)

Il convient de rappeler que l'objet **tableau de signes** apparaît pour la première fois explicitement dans les programmes de l'année 2000.

Résoudre une équation ou une inéquation se ramenant au premier degré. Utiliser un tableau de signes pour résoudre une inéquation ou déterminer le signe d'une fonction.

Résoudre graphiquement des équations du type : $f(x) = k$; $f(x) < k$; $f(x) = g(x)$; $f(x) < g(x)$...

IV-2 La mise en œuvre dans les manuels

⁶ Darboux, Borel y contribuèrent, Poincaré, Lebesgues'y intéressèrent.

⁷ Celui-ci a été créé deux siècle plus tôt par Newton et Leibniz et a fait l'objet de recherches très actives pendant le XVIII^{ème} et le XIX^{ème} – Euler , Cauchy, Riemann, pour ne citer que quelques grands noms - et est encore l'objet de recherches qui s'avèreront très fructueuses à l'époque de Darboux, Borel, Lebesgue ...

⁸ calculs de courbure, détermination de points d'inflexion, détermination de maximums ou de minimums de fonctions de plusieurs variables, calculs de longueurs de courbes...

⁹ permettant de traiter les deux problèmes évoqués ci-dessus

¹⁰ « Pour acquérir le sens de l'analyse indispensable jusque dans les spéculations les plus abstraites, il faut avoir appris à distinguer ce qui est *grand* de ce qui est *petit*, ce qui est *prépondérant* de ce qui est *négligeable*. En d'autres termes le calcul infinitésimal est l'apprentissage du maniement des inégalités et on pourrait le résumer en trois mots : Majorer, Minorer, Approcher »

Jean Dieudonné- Calcul infinitésimal

Les manuels ont une importance considérable comme lieux de transposition didactique et comme conservatoires de celles-ci. Leur étude, confrontée au programme qu'ils mettent en œuvre et aux savoirs savants de référence, nous renseigne sur les choix qui ont été faits et nous permet de comprendre l'origine de méthodes et de types de problèmes dont on a parfois perdu de vue l'intérêt et les objectifs.

Pour des raisons de brièveté imposée dans cet article, nous n'avons retenu que peu d'extraits de manuels pour illustrer notre propos.

IV-2-1. Cours d'algèbre de la classe de mathématique élémentaire de H. Neveu (1908)

Ce cours comprend trente cinq leçons

- Les huit premières sont consacrées aux nombres, aux polynômes, aux fractions rationnelles
- Les leçons 9 à 14 traitent des problèmes du premier degré : équations, systèmes d'équation, problèmes qui y conduisent
- Les leçons 15 à 22 traitent des problèmes du second degré
- Les leçons 23 à 27 sont consacrées à l'étude des fonctions au programme
- Les leçons 28 à 31 traitent de la dérivation et de ses applications à l'étude des fonctions et aux calculs de surfaces et de volumes
- Les leçons 32 à 35 traitent des suites arithmétiques et géométriques et à leurs applications aux mathématiques financières

L'étude du signe d'une expression occupe une place importante dans l'ouvrage, 13% du volume de l'ouvrage y est directement consacrée, 20% du volume si l'on ajoute les études faites sur la factorisation des polynômes et sur les fractions rationnelles pour pouvoir en étudier le signe.

Les études de signe sont constamment utilisées pour les études de fonctions qui sont conduites de deux manières (pour les mêmes fonctions) :

- Directement dans les chapitres 23 à 27
- A l'aide des dérivées dans les chapitres 28 à 31

Ce fait laisse penser que l'étude des variations à l'aide des dérivées semblait exotique à l'époque (cf. supra). L'autre méthode utilisée nous renseigne sur les traditions didactiques qui vont s'instaurer et perdurer des décennies durant. Cette méthode est mise en place à l'aide d'exemples traités.

Exemple :

Etudier les variations de la fraction **Erreur !**

Posons **Erreur !** $= y$ d'où $(3-y)x^2 - 4x + 3-y = 0$

Pour que cette équation en x ait des racines, il faut que l'on ait :

$4 - (3-y)^2 \geq 0$ ou $(5-y)(-1+y) \geq 0$. Dans cette expression, le coefficient de y^2 est négatif : donc y devra varier entre les racines qui sont 5 et 1. 5 sera le maximum ; nous le désignerons par M, et 1 sera le minimum nous le désignerons par m.

Les valeurs correspondantes de x sont : **Erreur !**

A $y = 5$ correspond $x = -1$

A $y = 1$ correspond $x = 1$

Le numérateur et le dénominateur ne s'annulent jamais ; donc ils sont toujours positifs, et par suite, la fonction est toujours positive.

On obtient sans difficulté le tableau suivant :

Valeurs de x	$-\infty$	Croît	-1	Croît	0	Croît	+1	Croît	$+\infty$
Valeurs de y	3	Croît	$M=5$	Décroît	3	Décroît	$m=1$	Croît	3
Signe de y	Fonction toujours positive								

La méthode pour obtenir le tableau de variation repose sur quatre points

1. Détermination des valeurs que peut prendre la fonction lorsque la variable décrit le domaine de définition, ce qui conduit à résoudre des équations du premier ou du second degré¹¹
2. Calculs des limites de la fonction aux bornes du domaine de définition
3. Continuité de la fonction
4. Signe du trinôme du second degré

Les variations s'obtiennent alors sur des bases implicites appartenant dans la logique de l'ouvrage au champ de l'intuition : ***tout changement dans les variations de la fonction sur un intervalle équivaut à l'existence d'un maximum ou d'un minimum pour la fonction sur cet intervalle. En conséquence sur tout intervalle sur lequel il n'y a ni maximum, ni minimum, ni discontinuité la fonction est monotone.***

Ce type de méthode occupe une place importante dans l'économie générale de l'ouvrage. Tous les exemples et exercices font appel à **des études de signes liées à des équations du second degré avec paramètres** qui trouvent ici un champ d'application qui peut paraître naturel. Toutes les fonctions au programme sont étudiées de cette manière, puis ensuite à l'aide de la dérivée. Vue la difficulté de la méthode par rapport à celle liée au calcul des dérivées, on peut supposer qu'il ne s'agit que d'une pure création didactique visant à procurer un champ d'application aux développements faits sur le second degré qui forment l'essentiel du programme d'algèbre.

Les équations du second degré avec paramètres vont très longtemps continuer à occuper une place importante dans les manuels du secondaire¹², bien longtemps après qu'elles aient perdu tout champ d'application, le calcul des dérivées étant l'unique méthode préconisée dans les programmes ultérieurs pour l'étude des variations des fonctions.¹³

IV-2-2 Cours de R. Maillard (1962). Classe de troisième

L'étude du signe d'une expression apparaît dans le chapitre consacré à l'étude des inéquations à une inconnue.

Résolution d'inéquations du premier degré à une inconnue

Exemples d'autres inéquations :

Polynômes du premier degré

Inéquations irrationnelles

Inéquations simultanées

Une technique « dominée » (elle ne sera pas reprise par d'autres auteurs) apparaît.

Celle-ci est présentée dans toute sa généralité puis illustrée sur des exemples

La procédure indiquée pour résoudre une inéquation produit est la suivante :

1. Le problème est ramené à l'étude du signe d'une expression de la forme $P(x) = A(x-a)(x-b) \dots$ (après élimination des facteurs carrés ...)
2. On range les valeurs qui annulent P dans l'ordre croissant
3. On déduit le signe de P sur chacun des intervalles ainsi obtenus en utilisant le fait qu'à chaque fois que l'on change d'intervalle, seul un facteur change de signe et que donc P change de signe .
Les intervalles sont représentés sur une droite, on détermine le signe de P sur le premier intervalle en donnant une valeur à x , puis on alterne les signes
4. On récapitule les résultats et on conclut.

Extrait du manuel :

Résoudre l'inéquation $(x-5)(x-1)(x-2)(x+3) > 0$

Les facteurs successifs s'annulent respectivement pour les valeurs 5 ; -1 ; 2 ; -3. Nous rangeons ces valeurs par ordre croissant : -3 ; -1 ; 2 ; 5.

¹¹ Vues les fonctions au programme

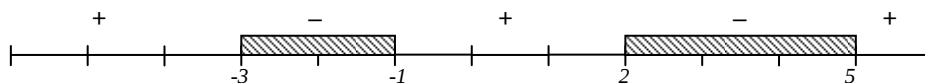
¹² jusqu'au début des années 1970

¹³ Y. Chevillard parle du vieillissement des praxéologies (cf infra)

D'après ce qui précède, nous pouvons conclure que pour $x > 5$ tous les facteurs sont positifs et l'inéquation est vérifiée.

Si maintenant x prend une valeur comprise entre 2 et 5, seul le facteur $x-5$ change de signe et le produit change de signe. Le produit est donc négatif pour $2 < x < 5$. Et le raisonnement se poursuit.../...

Le schéma indique les changements de signe du produit :



IV-2-3 Riche (1970) Première CDE

La méthode donnée s'applique à l'étude du signe de toute fonction polynôme ou rationnelle. Elle repose sur un résultat d'algèbre qui est admis.

Extrait du manuel

- Nous admettrons que si le corps utilisé est $\mathbb{R}$, tout polynôme de degré supérieur à 2 peut être mis sous forme d'un produit de polynômes du premier degré et du second degré à discriminant négatif.

- Si $P(x) = 5(x-1)(x+2)^2(x^2+x+1)$

L'équation $x^2 + x + 1 = 0$ n'a pas de racine quel que soit x : $x^2 + x + 1 > 0$

Le polynôme P admet 1 comme zéro simple, -2 comme zéro double

Quel que soit x distinct de -2 et de 1 $P(x)$ a le signe de $(x-1)$

- Remarquons que la valeur d'un polynôme du premier degré change de signe quand x « traverse » son zéro. La valeur d'un polynôme du second degré change de signe si x « traverse » un zéro simple du polynôme, mais elle ne change pas de signe si x « traverse » un zéro double.

Ce résultat est général ; la valeur d'un polynôme P ne peut changer de signe que si x « traverse » un zéro du polynôme P , si x « traverse » un zéro simple (d'ordre 1) ou triple (d'ordre 3), la valeur de $P(x)$ changera de signe ; si x « traverse » un zéro double (d'ordre 2) ou un zéro quadruple (d'ordre 4), la valeur de $P(x)$ ne changera pas de signe.

Considérons, par exemple, le polynôme $P(x) = 63(x+2)^2(x-1)(x-3)^3(x-5)$. P est un polynôme du 7^{ième} degré. Il admet -2 comme zéro double, 1 comme zéro simple, 3 comme zéro triple, 5 comme zéro simple. Sur chacun des intervalles $]-\infty, -2[$, $]-2, 1[$, $]1, 3[$, $]3, 5[$, $]5, +\infty[$, $P(x)$ conserve un signe constant. Calculons la valeur de $P(x)$ pour x appartenant à l'un de ces intervalles. Par exemple $P(0)$, $P(0) < 0$; $P(x)$ est donc négatif lorsque x décrit $]-2, 1[$. D'où le tableau :

x	$-\infty$	-2	1	3	5	$+\infty$
$P(x)$		-	-	+	-	+

Cette méthode repose sur la possibilité de factoriser les fonctions polynômes dans $\mathbb{I}$, $\mathbb{R}$ « tout polynôme de degré supérieur à 2 peut être mis sous forme d'un produit de polynômes du premier degré et du second degré à discriminant négatif. » et sur des connaissances à propos du trinôme du second degré.

Comme la méthode exposée par Maillard, cette méthode est une alternative aux tableaux de signes qui sont utilisés dans les manuels contemporains.

IV-2-4 Les mises en œuvre du programme de 2000

Rappelons que :

- la **notion de tableaux de signes** ne figure jamais explicitement dans les programmes antérieurs à ceux de l'année 2000, mais qu'elle était néanmoins introduite, dans certains manuels, comme technique de résolutions des équations algébriques en concurrence avec d'autres (cf. supra).
- Le tableau de signes est une pure création didactique.
- Le tableau de signes est objet explicite d'enseignement dans le programme de 2000.

Le commentaire du programme précise : « Pour un même problème, on combinera les apports des différents modes de résolution graphique et algébrique. On précisera les avantages et les limites de ces différents modes de résolution.

On pourra utiliser les graphiques des fonctions de référence et leurs positions relatives.

On ne s'interdira pas de donner un ou deux exemples conduisant à une équation qu'on ne sait pas résoudre algébriquement et dont on cherchera des solutions approchées »

La technique de résolution est imposée – le tableau de signes - ainsi que le jeu de cadres¹⁴ entre l'algébrique, le fonctionnel et le graphique. Les commentaires du programme précisent à ce propos : « *Les activités de calcul doivent être l'occasion de raisonner On évitera une activité trop mécanique et on s'efforcera de développer Des stratégies s'appuyant sur l'observation, l'anticipation et l'intelligence du calcul* »

Le signe du trinôme figure dans le programme de première.

Par rapport à ce qui se faisait précédemment, on peut noter une évolution très lente des pratiques proposées dans les manuels. Si quelques manuels traitent du signe d'une expression dans un chapitre sur les fonctions, d'autres continuent à le traiter dans un chapitre d'algèbre sans référence au fonctionnel.

La référence au cadre fonctionnel ou graphique est le plus souvent utilisée pour illustrer les résultats du calcul, rarement pour anticiper, conjecturer ou vérifier, comme le suggère les commentaires du programme.

V- Conclusions

Cette étude a été menée à l'aide d'outils fournis par la théorie de l'analyse anthropologique. Aussi nous semble-t-il important de donner nos conclusions sur l'étude du tableau de signes en référence à cette théorie.

La recherche des niches et habitats de « l'étude du signe d'une expression polynomiale » nous a conduit à une étude historique qui montre que le problème important et premier en mathématiques est la résolution des équations. L'étude du signe d'une fonction lui est subordonnée. Dès que l'on connaît les zéros de la fonction, et leur ordre de multiplicité, on en connaît le signe. D'autre part, la localisation des racines amène à étudier les changements de signe de la fonction (ou de certaines expressions qui lui sont associées). Dans ce cas, l'objet de l'étude n'est pas le signe de la fonction, mais la recherche de ses zéros.

Dans les programmes de seconde, l'objet de l'étude est le signe d'une expression polynomiale factorisée. Cette forme nous donne donc immédiatement les zéros de la fonction, avec leur multiplicité.

A partir de là deux choix sont possibles :

Rester dans le cadre algébrique, et utiliser l'outil algébrique qu'est le signe d'un produit de facteurs. Dès que le nombre de facteurs dépasse trois, le tableau de signes apparaît comme une technique commode. Sa pratique répétée, en particulier dans le cas de racines simples, pourrait amener à introduire une technique plus expéditive qui, à partir de la liste ordonnée des zéros et du signe de la fonction pour une valeur de la variable, permet de donner le signe de la fonction dans chaque intervalle : changement de signe autour d'une racine simple (ou multiple d'ordre impair), permanence autour d'une racine double (ou multiple d'ordre pair). C'est cette technique que nous avons trouvée dans certains ouvrages (Neveu) et qui est en usage dans d'autres pays.

Changer de cadre, comme les programmes actuels nous y incitent, et utiliser le cadre graphique pour faire le lien entre signe de la fonction et zéros de la fonction. Dans ce cadre on ne peut éviter, évidemment, les problèmes de continuité, qui sont de toute façon omniprésents, ne serait-ce que pour représenter graphiquement des fonctions. Mais la détermination des points de contact de la courbe et de l'axe des abscisses permet de mettre au point une technique qui, comme précédemment, à partir de la liste ordonnée des zéros, permet de donner le signe de la fonction dans chacun des intervalles déterminés : il suffit de calculer une valeur de la fonction dans chaque cas.

Cette démarche pose problème à de nombreux enseignants car elle conduit à des théorèmes en acte : ainsi pour trouver le signe d'une dérivée, des élèves cherchent les zéros de la dérivée, puis déterminent le signe entre deux zéros à l'aide d'un exemple numérique voire avec le graphique de la calculatrice. Cette technique ne repose sur aucune technologie et a cependant un domaine de validité important. Cela montre l'importance d'une réflexion sur les éléments technologiques qui valident une technique : quel statut leur donne-t-on ? Qu'institutionnalise-t-on ? Comment formule-t-on la technique ? Quelle place cette formulation fait-elle aux conditions d'utilisation ?

Les éléments de l'enquête historique que nous avons menée et les outils de l'analyse anthropologique nous amènent à jeter un regard critique sur le choix de faire du tableau de signes un objet d'enseignement.

Nous n'avons jamais trouvé l'objet "tableau de signes" dans le savoir savant (il n'a aucune niche.)

Ce "tableau de signes" basé sur une technologie algébrique (le signe d'un produit) peut être remplacé par une technique qui donne directement le résultat et qui est basée sur des éléments théoriques d'analyse (zéros d'une fonction, continuité, théorème des valeurs intermédiaires, signe constant sur un intervalle entre deux zéros consécutifs).

L'objet "tableau de signes" a un habitat restreint : il ne peut vivre que dans le domaine des fonctions polynômes, factorisées ou factorisables, et des fractions rationnelles dont les numérateur et dénominateur sont de ce type,

¹⁴ C'est la grande nouveauté du programme sur cette partie ; l'objectif semble être d'inciter à développer les phases heuristiques, génératrices de sens, dans l'enseignement élémentaires des mathématiques.

domaine qui peut s'élargir à des fonctions produit ou quotient. Il fait vivre la factorisation, mais du même coup conduit à des exercices didactiques avec des fonctions présentées sous forme ad hoc. D'ailleurs, dans de nombreux manuels de seconde, il est souvent utilisé pour donner le signe d'une expression du second degré, et va donc perdre de son intérêt en première concurrencé par le signe du trinôme : son habitat va encore se réduire. Une seule niche : le signe d'un produit de facteurs du premier degré.

Bachelard dit que toute connaissance est réponse à une question. Si on y regarde de près, l'enseignement des mathématiques n'est-il pas conçu de manière à donner aux élèves des réponses avant qu'ils ne se posent des questions ? L'étude que nous avons menée montre que derrière l'enseignement d'une notion il y a de vraies questions mathématiques. La détermination des solutions d'une équation en est une. Le signe d'une expression algébrique est un outil. Le tableau de signes n'est qu'une technique qui peut être commode. L'analyse anthropologique - qui nous a guidés pour notre étude - nous révèle que la technique est devenue l'objet principal de notre enseignement et que nous avons perdu de vue les problèmes essentiels en amont.

Ainsi il paraît essentiel que les professeurs aient l'occasion de réfléchir à travers quelques exemples à l'origine des notions et techniques qu'ils enseignent, afin de mieux en cerner l'intérêt et donc de déterminer l'importance à leur accorder. L'histoire, l'analyse épistémologique et les différents outils d'analyse didactique sont les instruments de cette réflexion¹⁵.

Comme on l'a vu précédemment l'étude du signe des expressions algébriques apparaît dans les cursus de l'enseignement secondaire comme intimement liée à l'étude des variations des fonctions. D'où il résulte que les types de fonctions étudiées conditionnent les techniques mises en place (exemple : les équations paramétriques du second degré).

Cela conduit à dégager deux axes de réflexion :

- L'un sur les créations didactiques liées à la mise en scène des notions au programme : quelles sont elles ? Quelle importance leur accorde-t-on ?
- L'autre sur les traditions didactiques qui s'instaurent et qui perdurent. Peut-on les repérer ? Sont-elles toujours fondées si ce n'est autrement que par la coutume ?

¹⁵ On a privilégié dans cette étude les outils de l'analyse anthropologique qui nous ont paru bien adaptés pour formuler notre questionnement

Annexe : Le théorème de Sturm

Ce théorème permet de déterminer le nombre de racines réelles d'un polynôme dans un intervalle donné. Montrons sur un cas particulier (polynôme sans racine double), le théorème de Sturm.

On considère :

- Un polynôme P à coefficients réels sans racine réelle multiple.
- Deux réels a et b avec $a < b$.

On définit une suite de polynômes de la façon suivante :

On pose $P_0 = P$ et $P_1 = P'$ et pour $n > 0$, $P_{n-1} = P_n Q_n - P_{n+1}$ avec $\deg(P_{n+1}) < \deg(P_n)$

On note P_r le dernier polynôme non nul de cette suite.

Pour tout réel x , on désigne par $w(x)$ le nombre de « variations » qui se trouvent dans la suite des signes des réels: $P_0(x), P_1(x), P_2(x), \dots, P_n(x), \dots, P_r(x)$ (l'apparition d'un zéro ne compte pas pour un changement de signe).

Alors, le nombre de racines réelles de P comprises entre les réels a et b est égal à la différence $w(a) - w(b)$.

Remarques :

- 1- On utilise une méthode qui ressemble à l'algorithme d'Euclide. En effet P_{n+1} est, au signe près, le quotient euclidien de P_{n-1} par P_n .
- 2- P_r est le PGCD des polynômes P et P' , il n'a donc pas de racine réelle puisque P n'a pas de racine réelle multiple.
- 3- Si un réel x annule l'un des polynômes P_n de la suite, alors il ne peut annuler son suivant P_{n+1} (sinon, par récurrence, il annulerait P_r ce qui contredit la remarque précédente).

Schéma de la démonstration :

On utilise les notations suivantes :

E : ensemble des racines réelles des polynômes $P_0, P_1, \dots, P_n, \dots, P_r$. Cet ensemble est fini.

Pour tout x de E , $]x^- ; x^+ [$ désigne un intervalle réel contenant seulement x comme élément de E .

Pour chaque polynôme de la suite :

Soit il s'annule une seule fois sur $]x^- ; x^+ [$, soit il est de signe constant sur $]x^- ; x^+ [$

1- Pour tout élément x de E :

- Si x annule l'un des polynômes P_n mais pas P_0 , alors $w(x^-) - w(x^+) = 0$.

En effet :

$P_n(x) = 0$ donc $P_{n-1}(x) \neq 0$ et $P_{n+1}(x) \neq 0$. Ainsi, P_{n-1} et P_{n+1} ont des signes constants sur $]x^- ; x^+ [$. Et comme $P_{n-1}(x) = -P_{n+1}(x)$, P_{n-1} et P_{n+1} ont des signes contraires sur $]x^- ; x^+ [$.

Il n'y a que deux possibilités pour la suite des signes :

	En x^-	En x^+
P_0	Même signe	
P_{n-1}	-	-
P_n	$\pm$	$\pm$
P_{n+1}	+	+
	$w(x^-) = w(x^+)$	

En x^-	En x^+
Même signe	
+	+
$\pm$	$\pm$
-	-
$w(x^-) = w(x^+)$	

- Si x annule P_0 , alors $w(x^-) - w(x^+) = 1$.

En effet :

P_0 est continu et s'annule une seule fois sur $]x^- ; x^+ [$, donc :

- soit $P_0(x^-) < 0$ et $P_0(x^+) > 0$. Dans ce cas, P_1 est positif sur $]x^- ; x^+ [$ car $P_1 = P'$.
- soit $P_0(x^-) > 0$ et $P_0(x^+) < 0$. Dans ce cas, P_1 est négatif sur $]x^- ; x^+ [$ car $P_1 = P'$.

On a vu que si x annule l'un des P_n (pour $n > 1$), il n'y a pas de changement dans le nombre de variations en x^- et x^+ .

Là encore, il n'y a que deux possibilités pour la suite des signes :

	En x^-	En x^+
P_0	-	+
P_1	+	+
	$w(x^-) = 1 + w(x^+)$	

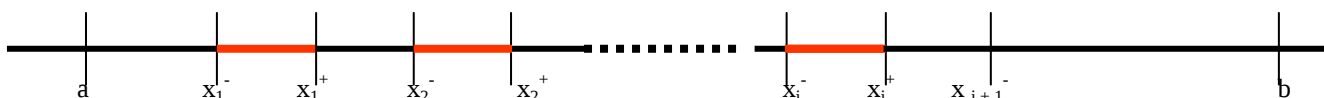
En x^-	En x^+
+	-
-	-
$w(x^-) = 1 + w(x^+)$	

2- Pour tous réels a et b ($a < b$) :

Si $]a ; b[$ ne contient aucune racine de P , alors $w(a) - w(b) = 0$.

Si $]a ; b[$ contient m racines de P , alors $w(a) - w(b) = m$.

Soit $x_1, x_2, \dots, x_p$ les éléments de E contenus dans $]a ; b[$.



	$w(a) - w(x_1^-)$	0
	$w(x_1^-) - w(x_1^+)$	0 ou 1 (selon que P s'annule ou non en x_1)
	$w(x_1^+) - w(x_2^-)$	0
	$w(x_i^-) - w(x_i^+)$	0 ou 1 (selon que P s'annule ou non en x_i)
	$w(x_i^+) - w(x_{i+1}^-)$	0
	$w(x_p^-) - w(x_p^+)$	0 ou 1 (selon que P s'annule ou non en x_p)
	$w(x_p^+) - w(b)$	0
Total	$w(a) - w(b)$	0 ou m

Exemple 1 : Résolution de $ax^2 + bx + c = 0$

	En $-\infty$	En $+\infty$
$P_0(x) = x^2 + \text{Erreur ! } x + \text{Erreur !}$	+	+
$P_1(x) = 2x + \text{Erreur !}$	-	+
$P_2(x) = \text{Erreur !}$	Signe de Δ	Signe de Δ

Suivant le signe de Δ on obtient 0 ou 2 racines si on exclut les racines doubles.

Exemple 2 : Résolution de $x^3 + px + q = 0$

	En $-\infty$	En $+\infty$
$P_0(x) = x^3 + px + q$	-	+
$P_1(x) = 3x^2 + p$	+	+
$P_2(x) = \text{Erreur ! } (-2px - q)$	Signe de p	Signe de $-p$
$P_3(x) = \text{Erreur ! } (-4p^3 - 27q^2)$	Signe de $(-4p^3 - 27q^2)$	Signe de $(-4p^3 - 27q^2)$

Cas où $4p^3 + 27q^2 > 0$

En $-\infty$	En $+\infty$
-	+
+	+
+ ou -	- ou +

Cas où $4p^3 + 27q^2 < 0$

En $-\infty$	En $+\infty$
-	+
+	+
-	+

Ainsi on obtient 1 ou 3 racines si on exclut les racines doubles.