De l'Aire et d'autres Grandeurs géométriques

François COLMEZ

(Ancien directeur de l'IREM de Paris VII Denis Diderot et ancien président de l'APMEP)

Sommaire

De l'Aire et d'autres Grandeurs

Une étude récente[1] a mis en évidence que, pour la majorité des élèves français sortant du Collège, les connaissances sur les aires et leurs mesures se résument à l'utilisation de quelques formules le plus souvent entachée d'erreurs. Au contraire, pour les élèves italiens, la notion d'aire prend un sens indépendamment des calculs suscités par les formules.

La raison principale de cette différence de compétences est que la grandeur aire est, en Italie, progressivement construite pour les polygones au moyen de découpages et de réassemblages conduisant à la notion d'équidécomposabilité. Le théorème suivant est admis : deux polygones ont la même aire si et seulement s'il est possible de découper le premier en polygones dont le réassemblage reconstitue le second. C'est la condition suffisante dont la pratique est constitutive du concept d'aire.

Cet article veut montrer comment des démarches analogues président aux constructions des différents types de grandeurs élémentaires. Il traitera aussi de relations entre ces grandeurs.

Considérations générales

L'enseignement d'une grandeur conduit à introduire successivement trois sortes de choses : des objets, des grandeurs et des nombres.

La comparaison des objets selon un protocole expérimental, qui se précise au cours de l'activité, amène aux grandeurs dont l'ensemble est doté progressivement d'un ordre et d'une structure algébrique. Puis le choix arbitraire d'un étalon permet la mise en correspondance bijective des grandeurs avec des nombres. Une problématique d'encadrement et de précision, naturelle dans ce contexte, oblige à l'enrichissement de l'ensemble de nombres. Il est alors temps d'utiliser les étalons usuels et les notations des unités correspondantes.

La comparaison des objets porte sur ce que j'appelle ici, d'une manière générale, "l'encombrement". Elle repose sur le postulat suivant :
Les manipulations que l'on fait n'altèrent pas l'encombrement ; ce qui veut dire :

- l'encombrement d'un objet ne varie pas pendant la manipulation, ou du moins cette variation n'est pas du domaine du sensible ;
- l'encombrement d'un objet partagé en plusieurs morceaux se répartit entre ces morceaux ; si ces morceaux sont réorganisés d'une nouvelle manière, le nouvel assemblage a toujours le même encombrement.

Bien évidemment, pour chaque type de grandeur, on précise par un vocabulaire adapté le type d'encombrement.

- Ainsi pour la longueur, on cherche à déterminer si tel objet "est moins long" (ou "est plus long" ou "est aussi long") que tel autre.
- Pour l'aire, je propose, reprenant un terme ancien : "est moins étendu" ; ou : "occupe moins de place".
- Pour le volume, selon l'aspect retenu, soit "est moins volumineux", soit "contient moins" (de liquide, de sable, …).
- Pour la masse : "est moins lourd".

En fait, ces différents liens verbaux désignent des relations de préordre et les grandeurs sont les classes d'équivalences de la relation d'équivalence associée.
Comme on a pu le constater naguère[2], l'ensemble quotient n'est pas accessible aux élèves du Collège ; mais on peut le remplacer par un changement de vocables en introduisant les substantifs longueurs, aires, volumes ou capacités.

Je vais d'abord développer les différentes étapes d'une construction de la grandeur Aire[3], en me référant à mon expérience et à celle de Marie-Jeanne Perrin et Régine Douady[4] ; puis je parlerai plus brièvement de la Longueur, du Volume et des Angles.

---

[1] Thèse de Valentina Celi
[2] du temps des "Maths Modernes"
[3] Voir plus loin la justification de la majuscule et du singulier
[4] Relatée dans une brochure de l'IREM de Paris 7

L'Aire

La grandeur Aire a deux aspects : c'est une grandeur en soi, mais c'est aussi une grandeur produit. L'enseignement passe souvent trop vite sur le premier aspect (ou même l'ignore) pour se consacrer principalement aux relations entre Aire et Longueur. Cela induit beaucoup d'incertitudes ou d'erreurs chez les élèves.

Parmi les erreur les plus fréquentes, on trouve :

- Confusion entre longueur du bord d'une surface et aire de cette surface, ou du moins l'idée que ces deux grandeurs varient dans le même sens.
- Remplacement, dans une formule, d'un produit par une somme.
- Dans un agrandissement multiplication de l'aire par le rapport d'agrandissement.
- L'aire d'un parallélogramme comme produit des longueurs de deux côtés consécutifs.

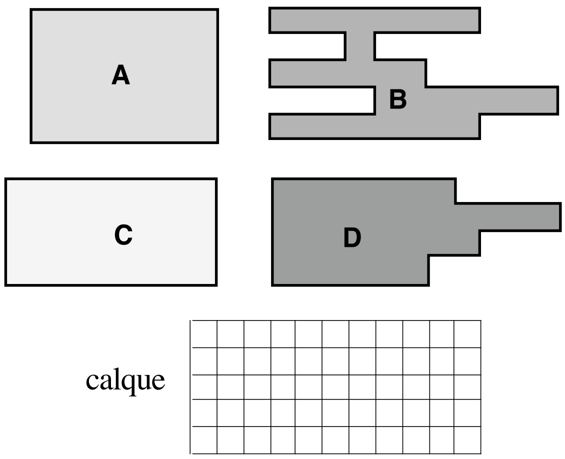
Dans les séquences proposées ci-après, la plupart des activités prennent la forme d'un travail en groupe complété par des moments de mise en commun.

Principe et protocole de la comparaison

Remarque : Tous les dessins de cet article sont fortement réduits. Ainsi, pour le premier lot il est souhaitable que les mailles du quadrillage aient un côté de l'ordre de deux centimètres.

Différents lots de surfaces permettent de préciser l'enjeu des activités : Comparer ces surfaces deux à deux en tentant de déterminer celle qui est la moins étendue, qui occupe le moins de place sur la feuille ; à moins qu'elles ne soient également étendue : elles ont alors la même aire.

Le premier lot comprend, outre les surfaces A, B, C, D dessinées à titre d'exemples, des rectangles ou autres polygones dont la comparaison peut se faire directement par inclusion.



Les élèves sont invités à reproduire ces surfaces sur une feuille comportant un quadrillage approprié et à les découper. Un calque quadrillé de la même façon peut faciliter le travail.

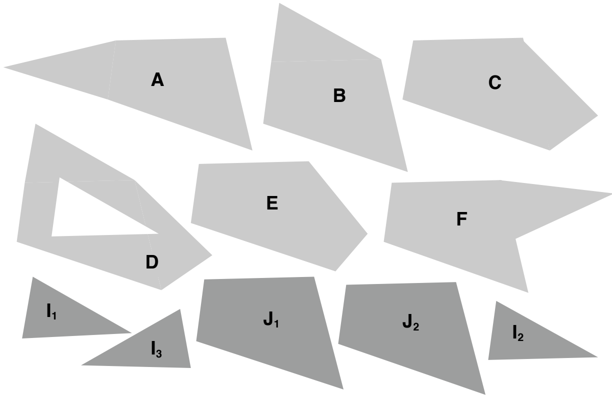
Après avoir contrôlé par superposition que les surfaces découpées étaient conformes aux originaux, les élèves peuvent les modifier par découpage et recollage (ou par le dessin) de façon à faire des comparaisons par inclusion. Le décompte des carreaux sert de contrôle.

Remarque : Les résultats ne sont pas ceux que les élèves prévoient généralement a priori (car ils sont leurrés par le phénomène de l'enveloppe convexe).

Institutionnalisation

- Si une surface A est contenue dans une surface B, A est moins étendue que B.
- Deux surfaces superposables (en particulier une surface donnée et sa reproduction soignée) ont la même aire.
- En découpant une surface A et en réassemblant les pièces sans chevauchement, on obtient une surface B de forme différente mais de même aire : deux surfaces de même aire ne sont pas nécessairement superposables.

Dans **le deuxième lot,** on découpe les diverses surfaces I et J (superposables) qui permettent par assemblage de reconstituer les autres surfaces (sauf E).
Ce lot procure l'occasion de mettre en pratique les règles énoncées.

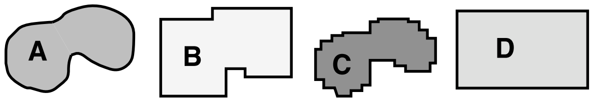


Institutionnalisation

Introduction de noms pour les aires et écritures de relations entre ces aires :

En notant a l'Aire de A, b l'aire de B, etc. on peut écrire, par exemples :
$a = i + j$; $b = i + j$; … ; $a = b$; … ;
$d = b + i - i$ (car I comble le trou) ;
$e = j + h$, avec $h < i$

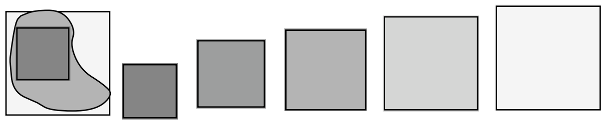
Le troisième lot permet de poser le problème de la comparaison avec des surfaces dont le bord est une courbe, en particulier un cercle.
Dans l'exemple on a : $c < a < b < d$.

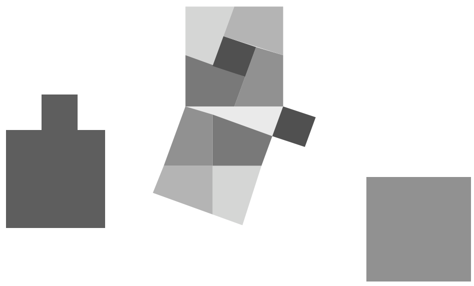


Attente

• La question de trouver un rectangle, voire un carré, de même aire qu'une surface donnée peut se poser à cette occasion.
À propos du deuxième exemple, beaucoup d'élèves pensent que c'est obligé car en augmentant la taille d'un carré, son aire augmente ; entre un carré contenu dans la surface et un carré qui la contient, il doit bien se trouver un carré de la même aire que celle de la surface.

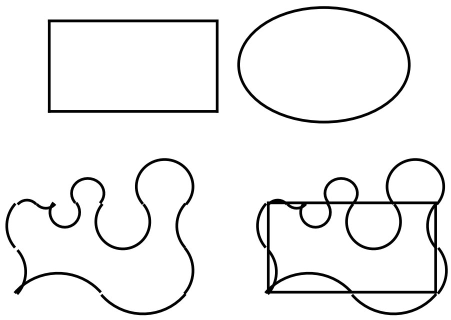
• On ne peut que laisser cette question en suspens ; elle sera résolue plus tard pour l'assemblage de deux carrés (Pythagore).





Aire et masse

Si on dispose du matériel nécessaire, la question précédente peut aussi être abordée par l'utilisation d'une balance et de surfaces découpées dans deux matériaux différents (carton, planche mince, …). L'ensemble de formes est le même pour les deux matériaux et comporte au moins une forme arrondie, un polygone visiblement réductible à un rectangle et quelques rectangles comparables par inclusion ; l'un des rectangles a la même aire que le polygone et un autre la même aire que la forme arrondie. L'enseignant peut les réaliser par le calcul (ellipse, dont l'aire est πab), le dessin (comme ci-contre), ou même le tâtonnement avec la balance.



Institutionnalisation

• la comparaison des masses donne les mêmes résultats que la comparaison des aires, si et seulement si les objets sont dans le même matériaux ; cela permet de distinguer masse et aire.
• Il doit être possible de trouver un rectangle de même aire qu'une surface donnée.

A l'issue de chacune des activités évoquées les surfaces sont découpées (sans oublier les trous) et l'enseignant les répartit dans des enveloppes en rassemblant les surfaces de même aire.

Le stock d'enveloppes est encore augmenté par l'activité suivante.

Découpage de rectangles

Chaque groupe d'élèves reçoit plusieurs exemplaires d'un même rectangle et en conserve un comme témoin ; les rectangles des différents groupes sont comparables par inclusion. Jusqu'à épuisement du stock de rectangles, chaque élève du groupe découpe un rectangle et réassemble les morceaux pour obtenir une surface de forme différente mais de même aire que le rectangle initial. Toutes les surfaces d'un groupe reçoivent un même symbole distinctif, permettant de les repérer.

L'enseignant ramasse les productions et en redistribue une partie dans les groupes. Chaque groupe a pour tâche de classer les surfaces reçues selon leurs aires. Les élèves doivent s'organiser pour récupérer les informations simples et utiles : c'est-à-dire une copie du rectangle de même aire que la surface concernée ou, du moins ses dimensions.

Institutionnalisation

- Les rectangles sont les surfaces les plus faciles à comparer.

Cette activité peut-être complétée par l'organisation de l'ensemble des enveloppes en écrivant un symbole sur chacune d'elle pour désigner l'aire correspondante et en dressant un tableau des résultats de comparaison : on obtient une liste ordonnée et quelques enveloppes qu'on ne peut pas classer, à reprendre éventuellement plus tard.

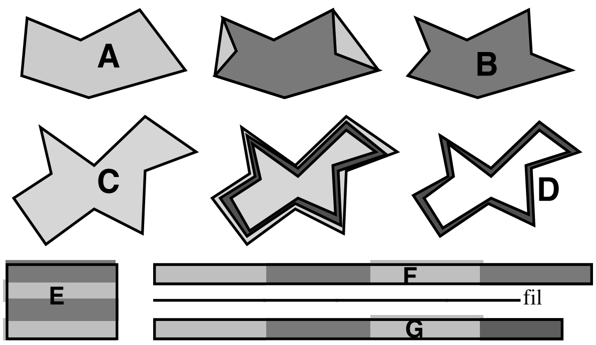
Aires et périmètres

L'enseignant distribue à chaque groupe des surfaces de formes différentes et de même aire. Il s'agit de comparer les longueurs des bords de ces surfaces (y compris les trous éventuels).
Deux techniques sont envisageables.
• Dans le cas des polygones, reporter au compas, bout à bout, les longueurs des différents côtés.
• Dans tous les cas, disposer un fil le long du bord.
Dans la pratique, la deuxième technique, plus générale, n'apporte pas plus d'imprécision que la première et permet plus facilement la comparaison des périmètres des surfaces, à l'intérieur d'un groupe et d'un groupe à l'autre.

Institutionnalisation

- Des surfaces de même aire peuvent avoir des périmètres différents
- On peut trouver deux surfaces telles que l'aire de la première soit inférieure à l'aire de la seconde tandis que le périmètre de la première est supérieur au périmètre des la seconde.

Les élèves doivent ensuite dessiner une surface puis une autre dont l'aire est plus petite et le périmètre plus grand.
Voici trois exemples de réalisation :
b < a ; les triangles retirés diminuent l'aire et augmentent le périmètre sans qu'il soit nécessaire de contrôler avec le fil ;
d < c ; et le périmètre de D est « presque deux fois plus long que celui de C » ;
g < f = e ; le fil entourant E est plus court qu'un des côtés de G.

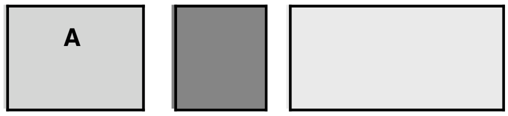


Cependant ce qui précède ne garantit pas que les élèves ne restent pas enclins à penser que, pour les rectangles, aire et périmètre varient ensemble ; en effet, les exemples produits sont un peu exotiques par rapport aux rectangles "fréquentés", voisins du rectangle d'or et sensiblement de même forme.
Il importe d'élargir le champ des formes rectangulaires.

Dans les activités qui suivent, les manipulations peuvent être le plus souvent modélisées par des isométries (glissements et symétries centrales) et donner lieu à des démonstrations, à condition d'admettre qu'une isométrie conserve l'aire.

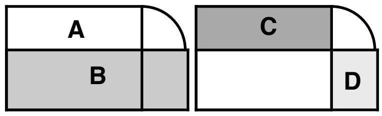
Rectangles dont une dimension est donnée

Le rectangle A est donné ; dessiner des rectangles dont le côté vertical est le même que celui de A ; comparer les aires et les périmètres. les résultats permettent d'exprimer l'idée préconçue que l'aire et le périmètre varient dans le même sens. Ce qui facilitera sa réfutation.



Rectangles de périmètre donné

A partir du même rectangle A construire un rectangle B de même périmètre que A, mais plus long et comparer les aires. Cela peut se faire par tâtonnement, avec un fil ; mais les élèves peuvent aussi faire une construction et justifier, en utilisant ce qui précède, que : d < c et donc que : b < a.



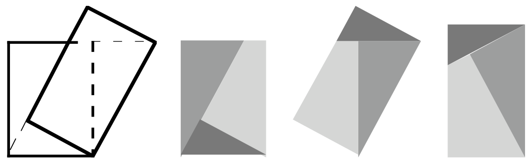
Institutionnalisation

- Il est possible d'avoir des rectangles de périmètre donné et d'aire très petite.

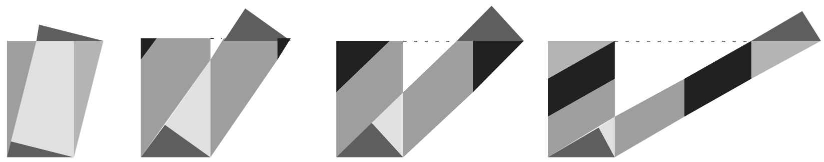
Remarques : L'aire nulle est exclue de fait, car un segment n'est pas considéré comme un rectangle.
Le problème du rectangle d'aire maximale n'est pas d'actualité. Il peut être traité plus tard dans le cadre numérique.

Rectangles de même aire : Puzzles

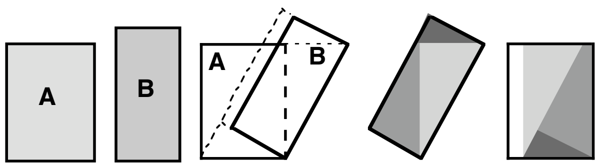
Il n'est pas envisageable de faire découvrir aux élèves la construction présentée ci-contre. Mais la construction étant réalisée, ils peuvent justifier, par des glissements, le fait que les deux rectangles ont la même aire.



Quand la longueur du second rectangle augmente, le nombre de pièces du puzzle augmente. On peut demander aux élèves, en recherche à la maison, d'adapter la construction.



Cette méthode permet également de comparer des rectangles d'aires différentes.
Dans cet exemple, les éléments du puzzle dessiné dans le rectangle B ne recouvrent qu'une partie de la surface du rectangle A ; donc b < a.



Remarque : Le puzzle n'est pas un instrument adapté à la comparaison des périmètres de rectangles de même aire. Le problème peut être étudié, plus tard, dans le cadre numérique.

Rectangles et parallélogrammes de même aire

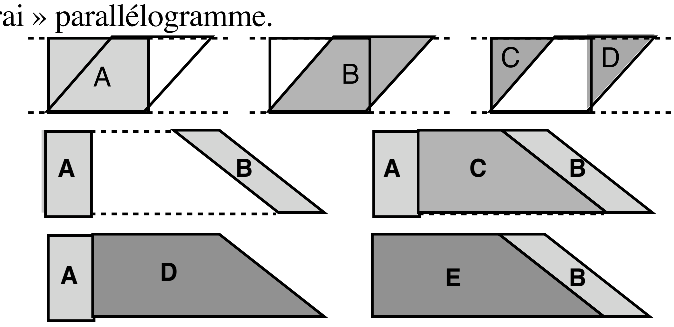
Il s'agit d'étudier les figures bordées par deux droites parallèles et tels que les côtés de ces quadrilatères portés par ces droites sont tous de même longueur.

On commence par montrer que deux tels quadrilatères de même forme ont la même aire, car on passe de l'un à l'autre par glissement.

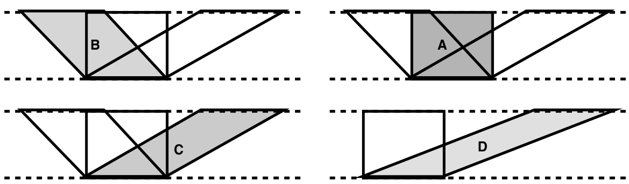
Comparaison d'un rectangle et d'un « vrai » parallélogramme.

Dans le cas particulier ci-contre, c = d car on passe de C à D par glissement.

Ce cas particulier permet de guider les élèves pour le cas général ; on passe de D à E par un glissement (qu'il est possible de matérialiser par un découpage) ; par suite :
d = e ; d = c + b ; e = c + a ; donc a = b.



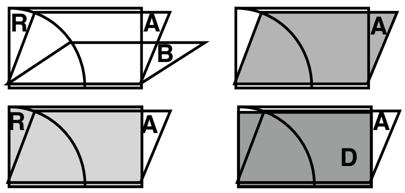
Institutionnalisation



- Tous les parallélogrammes ayant un côté commun, et dont le côté opposé est porté par une parallèle à ce côté, ont la même aire.
- Le périmètre d'un tel parallélogramme est d'autant plus long que les autres côtés sont plus obliques.
- Parmi tous ces parallélogramme, celui dont le périmètre est le plus court est le rectangle.

Rectangles et parallélogrammes de même périmètre et d'aires différentes

Ce qui précède n'empêche pas de nombreux élèves de penser qu'en déformant un rectangle, tout en conservant les longueurs des côtés, on obtient un parallélogramme de même aire que le rectangle.

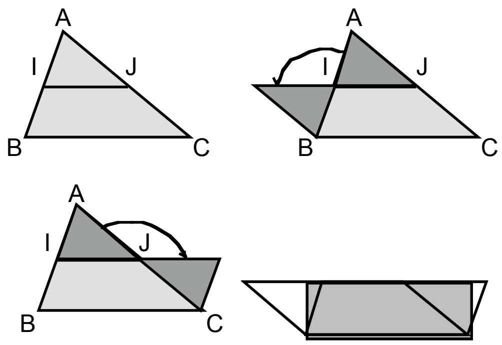


Ainsi, pour eux : r = a ; par contre il est visible que : b < r.
La question « à partir de quel aplatissement l'aire du parallélogramme devient plus petite que celle du rectangle ? » déstabilise un peu leur conviction ; mais, pour trancher le débat, une démonstration s'impose, en construisant le rectangle D tel que d = a et d < r.

Institutionnalisation

- L'aire d'un parallélogramme non rectangle est inférieure à l'aire du rectangle ayant les mêmes longueurs de côté.

Triangles et parallélogrammes



Dans le triangle ABC les points I et J sont les milieux des côtés [AB] et [AC]. On retrouve la figure de la droite des milieux.

En faisant pivoter (demi-tour) le triangle AIJ soit autour de I, soit autour de J, on obtient deux parallélogrammes de même aire, celle du triangle ABC. C'est aussi l'aire du rectangle dont un côté est BC et dont le côté opposé est porté par la droite (IJ). La longueur des autres côtés est la moitié de la hauteur du triangle

Institutionnalisation

- L'aire d'un triangle ne change pas si on le transforme en faisant glisser l'un des sommets sur une droite parallèle au côté opposé[5].
- Même chose si un sommet est fixé et si la base opposée glisse sur une droite en conservant sa longueur.

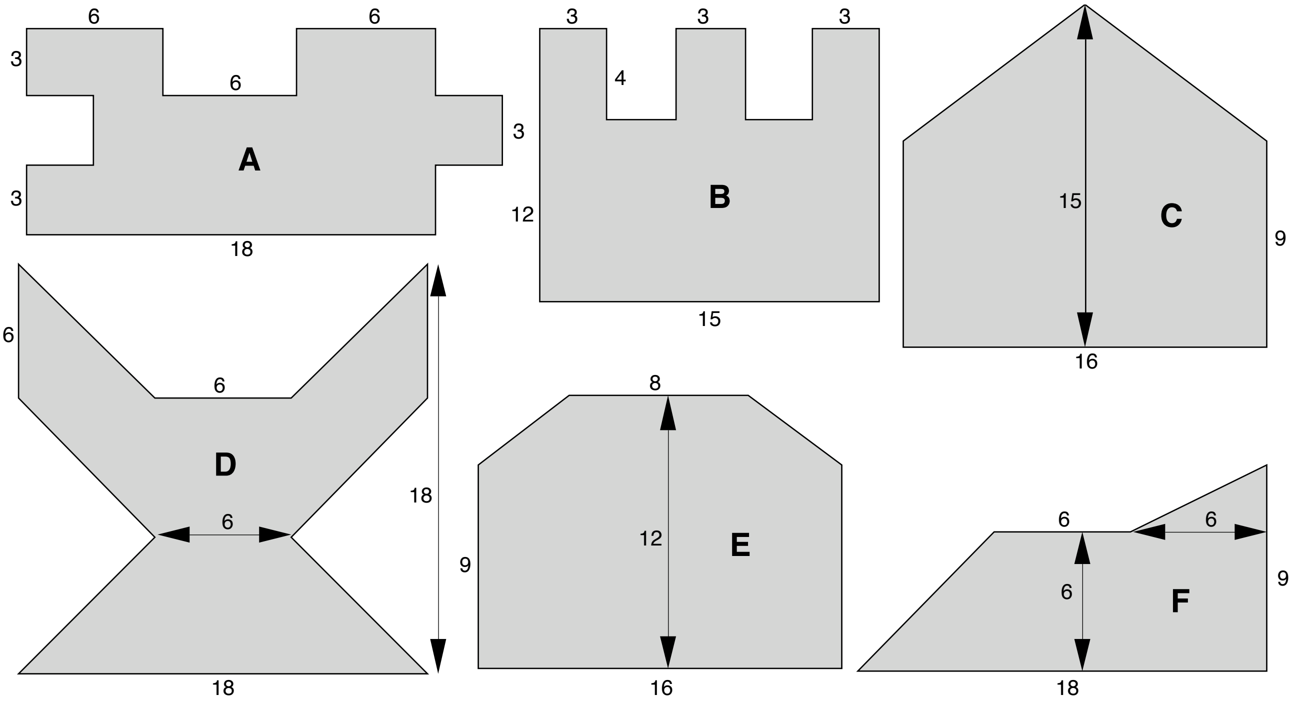
Toutes les activités précédentes concernaient la grandeur Aire. Celles qui suivent conduisent à la mesure.

[5] C'est la propriété sur laquelle s'appuie Euclide pour démontrer le théorème dit "de Thalès".

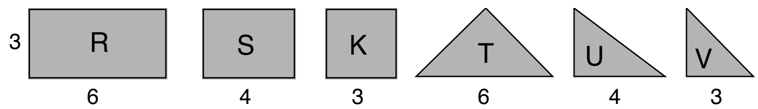
Pavages avec plusieurs sortes de carreaux

Les six surfaces à paver et les six sortes de carreaux sont réalisées en papier uni, en utilisant un quadrillage dont la maille est de l'ordre du centimètre.

Les six surfaces :



Les six carreaux :



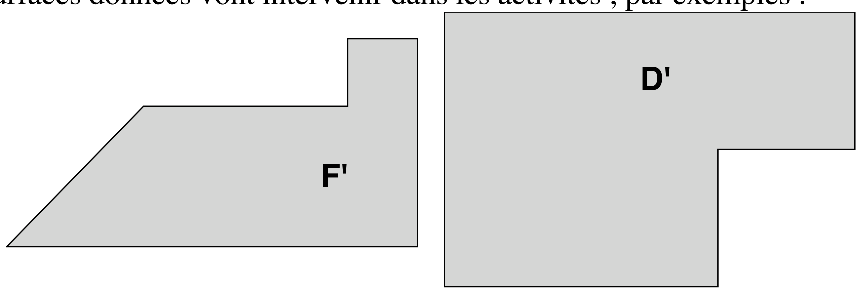
Précisions sur les surfaces

- Les surfaces B, C, D, E ont un axe de symétrie.
- On peut comparer directement par inclusion les surfaces E et C.
- Les cinq premières surfaces sont pavables avec des carreaux tous de même forme ; mais on peut aussi utiliser des carreaux de formes différentes.
- Par contre la surface F n'est pas pavable directement : il faut couper en deux un carreau C pour la paver.

Certaines transformations des surfaces données vont intervenir dans les activités ; par exemples :

- La surface F', de même aire que F est pavable.

- De même, pour paver la surface D', de même aire que D, on peut utiliser des formes de carreaux plus diverses que pour D.



En dénombrant les carreaux utilisés pour paver ces surfaces, on obtient des relations sur les aires ; en voici quelques unes :
a = 32v = 8r = 6r + 3k + 2v = … ; b = 13s = … ; c = 32u = 12s + 6u = … ; d = 40v = … ; e = 30u.

Ces relations correspondent à des pavages effectifs des surfaces.
Par contre, d = d' = 10r correspond à un pavage de D' mais pas à un pavage de D ;
il en est de même pour f = f' = k + 4r + 2t ; mais la transformation de F en F' ne viendra qu'à la fin.

Activités

1 Les élèves, par groupe, reçoivent plusieurs exemplaires des surfaces et des feuilles de carreaux, qu'ils doivent d'abord découper ; ils auront à noter les résultats de leurs manipulation dans un tableau.

nom de la surface	R	S	K	T	U	V

Consignes
a- Essayer de paver chaque surface avec des carreaux, si possible tous de la même sorte. Il peut y avoir plusieurs façons de le faire. Noter pour chaque pavage le nombre de carreaux utilisés dans le tableau.
b- Essayer de transformer (par découpage et recollement) les surfaces données en surfaces de même aire pour trouver des pavages avec de nouveaux carreaux.
Les démarches des élèves
- Certains élèves ont des difficultés pour paver C car ils pensent que le coin au faîte de C est droit ; en réalité il faut utiliser deux carreaux U pour remplir ce coin.
- Les élèves utilisent de fait certaines des relations entre les aires des carreaux pour trouver de nouveaux pavages.

2 Dans une récapitulation collective, ces relations sont explicitées.
Il y a deux chaînes de relations : $r = 2k = 2t = 4v$ et $s = 2u$.
On peut aussi les écrire, en utilisant des fractions simples, par exemple : $v = 1/2t$
Les résultats donnés par les pavages sont contrôlés et les incohérences sont rectifiées.
Les résultats sont alors mis sous forme d'égalités d'aires, comme il est indiqué plus haut.
Les aires a et d peuvent s'exprimer avec les aires r , k, t et v ; les aires b, c et e avec les aires s et u.
La surface F n'est pas encore prise en compte car elle n'est pas directement pavable et la plupart des élèves n'ont pas pensé à la transformer en F'.
Par un travail de substitution[6] utilisant les relations entre les aires des carreaux on obtient un classement partiel des surfaces selon leur aire : $a < d$, d'une part et $b < e < c$, d'autre part.

Institutionnalisation
- Les aires des carreaux sont des unités ; les carreaux eux-mêmes sont des étalons. La même unité peut être obtenue à partir de plusieurs étalons (exemple : c = t).
- Si le pavage d'une surface (ou de deux surfaces de même aire) est possible avec deux sortes de carreaux de formes différentes, le nombre de carreaux est le même dans les deux cas.

Remarque : les expressions des aires de C, D et E retenues pour l'activité suivante, comportent chacune plusieurs unités.

3 Les élèves doivent, dans un premier temps, exprimer l'aire de chaque surface avec une seule unité, à partir de l'expression de référence établie auparavant.
Puis, dans un deuxième temps, ils doivent compléter le tableau en exprimant chaque aire avec chaque unité.

	r	s	c ou t	
a = 16c			a = 16c a = 16t	

Ils disposent de tout leur matériel.
Le passage d'une unité à une autre de la même chaîne se ramène à une multiplication ou une division.
Par contre, pour le passage de k à s, par exemple, la plupart des élèves recommencent le pavage et découpent des carreaux pour boucher les trous ; beaucoup de résultats sont erronés.
Quelques élèves peuvent penser à établir des relations entre unités, telles que : $3s = 2r = 4k$. Sinon il faut poser la question. Des bilans intermédiaires permettent de faire partager ces découvertes.
Elles conduisent à utiliser des fractions simples dans l'expression des aires.
Le cas de la surface F se traite sur la lancée.

Institutionnalisation
- La connaissance de relations entre unités permet de procéder par substitution et cette méthode est plus économique que le repavage.

Pavages de rectangles avec des rectangles

Les élèves ont le droit d'utiliser leur règle graduée ; c'est une activité de communication.
Chaque élève dispose de trois sortes de carreaux rectangulaires dont les dimensions sont, par exemples, (1cm,2cm) (2cm,5cm) (3cm,4cm). L'essentiel est que le plus petit puisse paver les autres, lesquels sont d'aires différentes mais proches. Ces carreaux ne sont pas nommés.
Dans un premier temps chaque élève choisit une sorte de carreau et dessine sur une feuille blanche un rectangle pavable avec ces carreaux.
Il doit ensuite écrire un message permettant à un camarade de dessiner le même (superposable) rectangle. Ce message ne comporte aucun dessin.
Après échange des messages, chaque récepteur dessine le rectangle indiqué et le pave avec les carreaux de son choix (qui ne sont pas nécessairement les mêmes que ceux de l'émetteur).

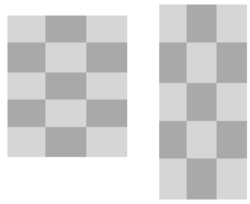
---
[6] les substitutions sont à la base de tout calcul

La situation est très riche car beaucoup de difficultés seront à prendre en compte au moment du bilan, comme :

- la désignation des carreaux du pavage initial
- les dimensions du rectangle dessiné exprimées en utilisant les carreaux (l'orientation peut intervenir, voir ci-contre l'exemple d'un rectangle 3 ; 5).

etc.

En fait la méthode la plus simple est de donner les dimensions en les mesurant avec la règle graduée. Mais, heureusement, peu d'élèves y pensent.



Institutionnalisation

- Si le carreau étalon choisi a pour dimensions les longueurs u et v et si l'unité d'aire correspondante est notée a, les dimensions du rectangle sont de la forme p u et q v (p et q naturels) et l'aire est p∞q a.
- Les mesures des côtés du rectangle sont respectivement p avec l'unité u et q avec l'unité v ; la mesure de l'aire du rectangle avec l'unité a est p∞q.
- On peut choisir un étalon carré, avec u = v.

Bidimensionnalité et rapport d'agrandissement

La règle graduée n'est plus utilisée ; un étalon est fixé : rectangle dont les longueurs des côtés sont u et v (de l'ordre du centimètre) ; son aire a est l'unité. L'activité peut se faire sous forme de jeux successifs ; les élèves marquent un point quand ils ont un bon résultat. Les résultats sont consignés dans un tableau

* *Procédure par multiplication*. Dans du papier quadrillé (dont la maille est l'étalon) sont découpées des bandes de largeur ku (k, naturel variant de 4 à 9). Chaque équipe de deux (ou trois) élèves reçoit une des bandes. A tour de rôle, un élève choisit la mesure de la deuxième dimension pv d'un rectangle dont la première est toujours ku ; il communique la mesure p à l'(aux)autre(s) ; tous doivent chercher la mesure du rectangle avec l'unité a. Le premier élève peut utiliser le matériel.

* *Procédure par division*. L'enseignant dispose de bandes de papier quadrillées, de largeurs différentes ; à chaque équipe est affectée une largeur. Il annonce successivement les aires na des surfaces à réaliser (de plus en plus grandes). Chaque équipe doit décider de la longueur pv du rectangle (de largeur ku imposée) dans lequel elle pourra découper une surface ayant l'aire demandée, avec le minimum de chute ; l'enseignant lui découpe le rectangle demandé. Le bon choix est évidemment p tel que k∞(p-1) ≤ n < k∞p

* A titre de renforcement, ce jeu est repris à l'intérieur de chaque équipe, avec k fixé. Un élève choisit n, un autre calcule p, puis ils vérifient.

* *Procédure par multiplications multiples*. Chaque équipe de deux (ou trois) dispose de feuilles quadrillées. Elle choisit deux naturels c et d et dessine un rectangle de dimensions x = cu et y = dv. A tour de rôle un élève tire au hasard (avec un dé) deux nombres i et j ; il doit calculer la mesure, avec a pour unité, du rectangle de dimensions ix et jy. L'(les)autre(s) vérifient par le dessin.

Institutionnalisation

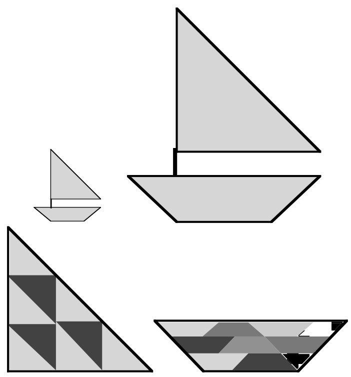
- L'aire d'un rectangle est proportionnelle à chacune de ses dimensions.
- Si on passe du rectangle A au rectangle B par un agrandissement ou une réduction de rapport r, l'aire de B est égale à l'aire de A multipliée par r^2.

Agrandissement et réduction

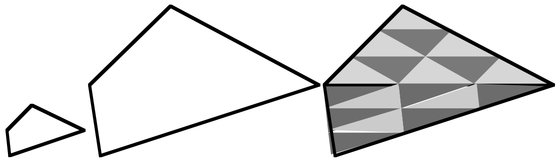
Il ne suffit pas de connaître la propriété précédente pour les rectangles ; il faut aussi penser à l'appliquer à n'importe quel polygone et même à toute surface.

Les dessins ci-contre proviennent d'une classe de CM1. Au cours d'une activité d'agrandissement (de rapport 3) sur papier quadrillé, un élève a demandé le nombre de petites voiles entrant dans la voile agrandie. Ses camarades, à leur grand étonnement, n'ont trouvé ni trois ni six, mais neuf. Même chose ensuite pour les coques ; mais il a fallu couper une petite coque pour boucher les trous.

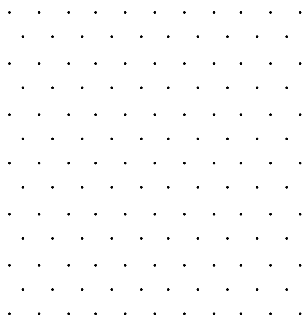
Au collège, une telle activité, selon le moment où elle intervient, peut être une motivation ou une application pour le théorème de Thalès



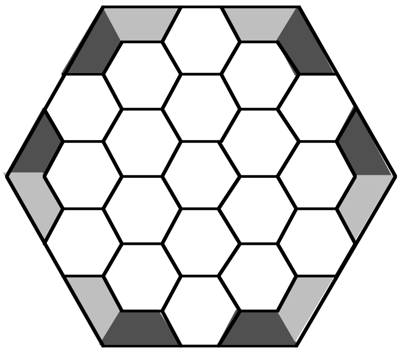
Pour des quadrilatères ou des polygones de forme quelconque un pavage direct avec le petit polygone n'est pas possible. Il faut commencer par trianguler les polygones.



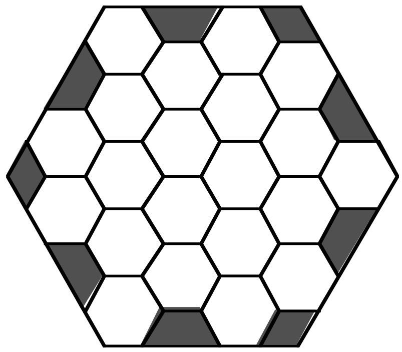
Pour des hexagones réguliers le pavage est réalisable, sur un papier à points, "triangulaire".
Dans l'exemple suivant le rapport d'agrandissement est 5.



papier à points "triangulaire



19 hexagones et 12 demi-hexagones



21 hexagones, 6 demis et 3 tiers

Institutionnalisation

- Dans un agrandissement ou une réduction de rapport r, l'aire est multipliée par r^2.

Enrichissement de l'ensemble des nombres

Jusqu'à présent les nombres intervenant dans les expressions d'aires étaient des naturels, et à l'occasion des inverses de naturels ou des fractions simples.
Un rectangle étalon de dimensions u et v et d'aire a est donné. Le problème est de trouver la mesure avec l'unité a d'un rectangle de dimensions $(4 + \frac{3}{5})$ u et $(2 + \frac{4}{7})$ v.

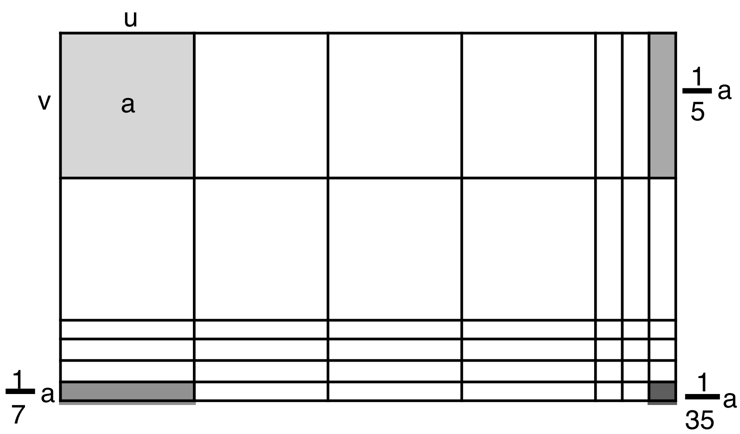
Le pavage donne :

$4 \infty 2$ rectangles d'aire a ;

$4 \infty 4$ rectangles d'aire $\frac{1}{7}$ a ;

$3 \infty 2$ rectangles d'aire $\frac{1}{5}$ a

et $3 \infty 4$ rectangles d'aire $\frac{1}{35}$ a



Par le calcul ou par regroupement sur le dessin on peut écrire l'aire du rectangle :

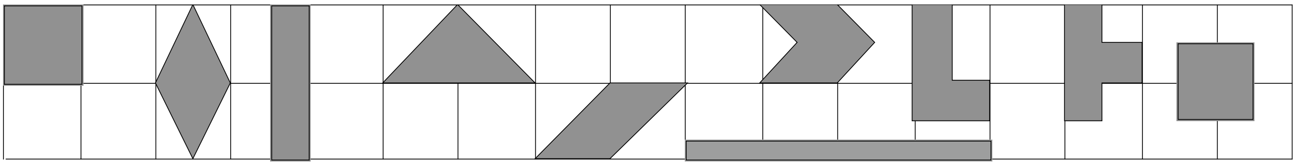
$8\ a + 2\ a + 2 \infty \frac{1}{7}a + a + \frac{1}{5}a + 12 \infty \frac{1}{35}a$

La mesure, avec l'unité a, de l'aire du rectangle est : $11 + \frac{2}{7} + \frac{1}{5} + \frac{12}{35}$.

Ce genre d'exercice constitue un bon entraînement pour le calcul sur les fractions, mais il me semble plus important de continuer avec des fractions décimales, en liaison avec les unités usuelles.

Unités usuelles

Les élèves doivent dessiner sur un quadrillage au centimètre des surfaces dont l'aire est celle d'un carreau. Voici quelques exemples des productions des élèves.



Institutionnalisation

- L'aire commune de tous ces étalons est appelée centimètre carré et notée cm^2.

Remarque : contrairement à l'usage, l'appellation centimètre-carré serait plus pertinente

- Exemple : un rectangle dont les dimensions sont 3 cm et 4 cm a une aire de 12 cm^2.
- Un rectangle, dont les mesures des côtés en centimètre sont 3 et 4, a une aire dont la mesure en centimètre carré est 12
- On peut écrire : 3 cm ∞ 4 cm = 12 cm^2.

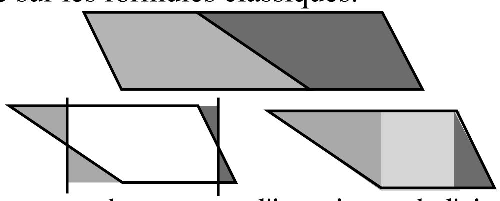
Avant d'introduire les autres unités usuelles d'aire (décimètre carré, mètre carré, kilomètre carré, millimètre carré) et leurs relations, il est important de vérifier ce que les élèves entendent par « demi centimètre carré ».

En effet beaucoup pensent que : 1/2 cm^2 = 1/2 cm x 1/2 cm. Cette erreur est moins fréquente pour un demi mètre carré. Oralement, on peut rappeler la signification en marquant une pose dans l'énonciation : « un demi … centimètre carré ».

Formules

La reprise, avec les unités usuelles, des activités de comparaison des aires de rectangles avec les aires de parallélogrammes ou de triangles vues plus haut débouche sur les formules classiques.

Pour le trapèze, il y a plusieurs manières de procéder conduisant à des raisonnements, des calculs et des formules différents, qu'il est intéressant de comparer.



Les élèves appliquent ces formules à différentes figures. Cela permet de retrouver l'invariance de l'aire par les transformations vues précédemment et de manipuler des rapports d'agrandissement (ou réduction) autres que les naturels (et leurs inverses).

Institutionnalisation

- Les formules
- Par agrandissement ou réduction de rapport k l'aire est multipliée par k^2.

Commentaires

Une formule d'aire fait intervenir un produit. Les deux facteurs peuvent être

- soit tous les deux des longueurs et le produit est une aire ; exemple : 2 cm ∞ 3 m = 6 dm^2.
- Soit tous les deux des mesures ; exemple 2 ∞ 3 = 6. Mais, pour donner un sens aux expressions, il faut connaître l'unité de chacune des mesures. De plus il faut que ces unités soient cohérentes ; ce qui veut dire que si les longueurs u et v sont les unités utilisées pour les deux premières mesures, l'unité d'aire a doit être l'aire d'un rectangle de dimensions u et v. Dans la pratique la cohérence est assurée en choisissant la même unité légale pour les deux mesures de longueur ; l'unité d'aire est alors l'aire du carré ayant pour longueur de côté l'unité de longueur choisie.
- Je pense que la première manière de faire est à la fois plus souple (voir ci-dessous les changements d'unité) et beaucoup plus sûre. Quitte à effectuer à part les calculs sur les nombres. La disposition de mon enfance en deux colonnes, solution d'une part et calculs numériques d'autre part, avait du bon.
- Nous avons pris l'habitude d'associer à une longueur donnée l'aire du carré dont le côté a cette longueur, car nous sommes très habiles pour construire des carrés. Mais les abeilles pourraient préférer l'hexagone régulier et décider qu'au centimètre carré elles associent l'aire de l'hexagone dont le côté a pour longueur le centimètre.

Elles auraient alors[7] comme formule de l'aire d'un rectangle : $\frac{2}{3\sqrt{3}}$ l x L. Mais n'écoutons pas les abeilles ; elles sont dangereuses pour les enfants.

Changements d'unités

Il tombe sous le sens que pour un gâteau donné, plus les parts sont grosses moins il y en a. Pour toute grandeur, si l'unité est multipliée par k la mesure correspondante est divisée par k.

Contrairement aux unités légales de longueur, qui, d'un préfixe au suivant, varient d'un facteur 10, les unités d'aire, avec les mêmes préfixes, varient d'un facteur 100.

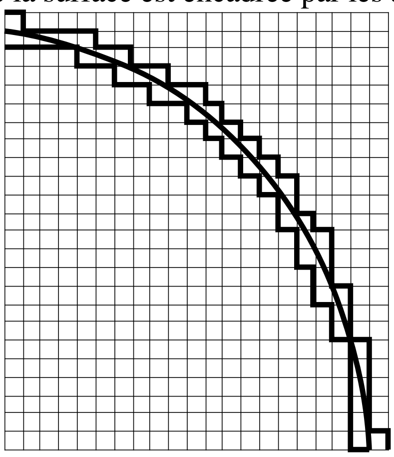
Pour se le rappeler et procéder par substitution dans une expression d'aire, il est utile de remplacer, par exemple, 1 m^2 par 1 m x 1 m ou par 10 dm x 10 dm, c'est-à-dire par 100 dm^2 etc.

Les unités légales d'aire sont les aires de carrés. Cependant il existe d'autres unités usuelles, comme, par exemple, l'aire d'une feuille de format A4. Si on note f cette aire on a par convention : 16 f = 1 m^2. Cela donne pour dimensions du format A4 : 21,02 cm et 29,73 cm (approchées par défaut au dixième de millimètre).
Cela permet de savoir qu'une feuille A4 en papier de grammage 80 a une masse de 5g ; ce qui est utile pour dénombrer rapidement une pile de tracts avec une balance sensible au gramme (situation vécue personnellement à chaque élection municipale) ou de connaître la masse, et donc le coût d'envoi, d'une brochure IREM.

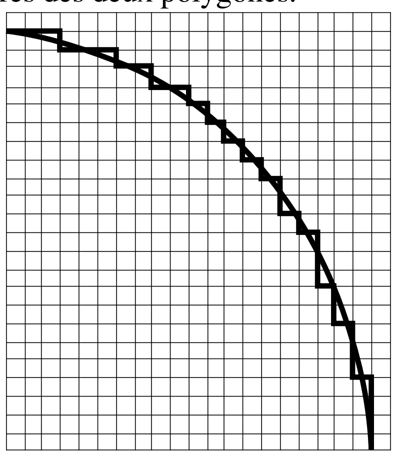
Aire d'une surface quelconque par encadrement ou approximation

Pour une surface dont le bord n'est pas un polygone, il n'y a pas d'autres moyens (en général) que de procéder par encadrement. C'est-à-dire de dessiner deux polygones, l'un contenu dans la surface, l'autre la contenant ; l'aire de la surface est encadrée par les aires des deux polygones.

Si les polygones sont dessinés sur un quadrillage, l'encadrement est très mauvais, mais précis.



On obtient une meilleure approximation en dessinant un polygone « à cheval » sur le bord en compensant, à l'oeil, les parties en défaut avec les parties en excès. Mais on ne maîtrise pas l'erreur commise.



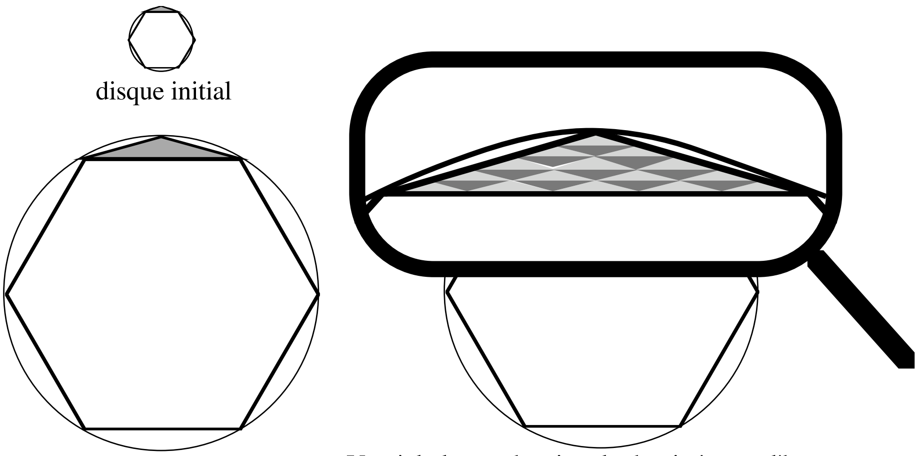
Une autre manière de faire est de dessiner des polygones sans s'astreindre à suivre un quadrillage. Cela permet de s'approcher mieux du bord de la surface.

Le disque

Sans prétendre évaluer ainsi l'aire d'un disque, on peut convaincre les élèves que, par un agrandissement de rapport r, l'aire d'un disque est multipliée par r^2. Dans l'exemple qui suit, r = 5.
Il a déjà été vu que, par un agrandissement de rapport 5, l'aire d'un hexagone est multipliée par 25.
Les élèves dessinent deux disques, l'un de rayon R (2 cm, environ) et l'autre de rayon de rayon 5R ; puis construisent un hexagone inscrit dans chacun de ces disques. Le rapport des aires de ces hexagones est 25.

[7] voir MOTS VI p.96

Sur chacune des deux figures ils font ensuite la construction suivante : marquer le milieu de chacun des arcs et dessiner les dodécagones réguliers. Le dodécagone est obtenu par adjonction à l'hexagone de six triangles isocèles. On montre, par pavage s'il le faut, que l'aire du triangle de la grande figure est égale à l'aire du triangle de la petite multipliée par 25.



disque initial

disque agrandi dans le rapport 5

Vue à la loupe du triangle dessiné entre l'hexagone et le cercle : il contient 25 triangles correspondants de la figure initiale.

Par suite, l'aire du grand dodécagone est égale à l'aire du petit multipliée par 25.
Quand on propose aux élèves de recommencer pour obtenir des polygones réguliers à 24 côtés, ils protestent généralement en disant qu'ils ont compris, que ça peut continuer longtemps et que, à chaque étape, l'aire sera toujours multipliée par 25, si bien que l'aire du grand disque est l'aire du petit multipliée par 25.

Institutionnalisation

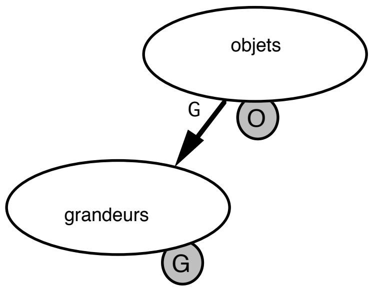
- Par un agrandissement ou une réduction de rapport r l'aire d'un disque est multipliée par r^2.
- Si on note π la mesure de l'aire d'un disque dont le rayon a pour longueur l'unité, l'aire d'un disque de rayon de longueur R est : πR^2.

Commentaire
Différentes activités classiques montrent que le π qui vient d'être introduit est bien le même que celui qui intervient dans la longueur du cercle.

Modèle mathématique

Grandeur

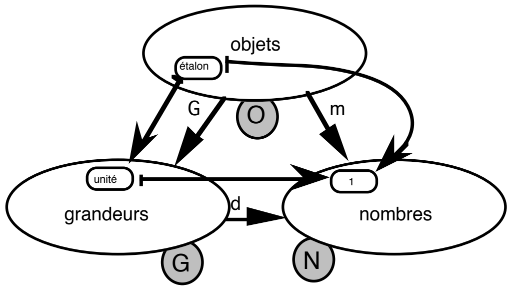
Par le protocole de comparaison on construit une application G d'un ensemble d'objets dans l'ensemble, également en construction, des grandeurs. Le protocole permet de savoir quand deux objets ont la même image ou quand l'un est plus petit que l'autre.



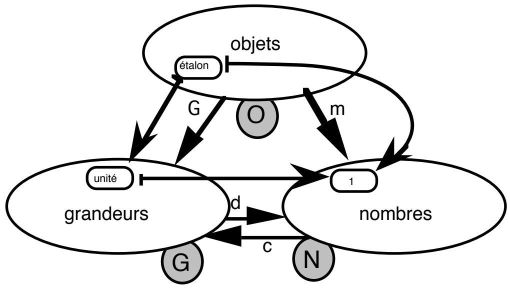
L'application G est compatible par construction avec ce préordre, ce qui permet de définir un ordre sur les grandeurs.
Elle transforme l'assemblage des objets en sommes sur les grandeurs.
L'addition et l'ordre ainsi construit sur G sont compatibles.

Premier problème de vocabulaire. Le même mot « grandeur » désigne à la fois :
* l'entité dont on s'occupe ; je mets une majuscule : la Grandeur Aire, par exemple
* l'application G ; pour l'Aire on peut l'appeler A
* les éléments de l'ensemble G ; je mets une minuscule : l'image d'un objet o par G est la grandeur g ; pour l'aire on pourrait écrire A (o) = a. On retrouve la difficulté classique de distinguer une fonction d'une « valeur prise » par cette fonction, aggravée par l'absence de vocable spécifique.

Mesure



Le protocole permet de définir le rapport de deux grandeurs, indépendant des objets ayant ces grandeurs pour image. Les rapports sont d'abord des naturels, puis des rationnels.
Le choix d'un étalon, donc d'une unité, permet d'associer à toute aire son rapport à l'unité. On définit ainsi une application d de G vers un ensemble de nombres N (les rationnels positifs).
Cette application dépend de l'unité choisie.
Elle est compatible avec les ordres et les additions sur les ensembles G et N. Elle préserve aussi le rapport.
De plus elle est bijective ; en fait c'est un isomorphisme pour les structures citées. J'ai noté c l'isomorphisme inverse.

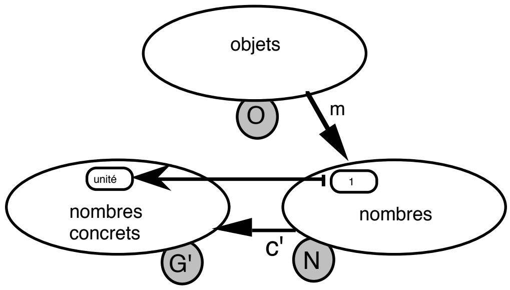


L'application m de O vers N est la composée des applications G et d ; $m = d \circ G$. Elle dépend aussi de l'unité choisie.
L'application G est la composée des applications m et c ;
$G = c \circ m$. Elle ne dépend pas de l'unité choisie.
Cela suggère une autre approche du problème des Grandeurs, que je discute plus bas.

Deuxième problème de vocabulaire. Le mot « mesure » est encore plus polysémique que le mot « grandeur » ; il peut désigner :
* l'entité dont on s'occupe : le problème de la Mesure des Grandeurs
* l'application d
* l'application m
* le nombre image de quelque chose par l'une ou l'autre de ces applications
* et même parfois, une grandeur : ce champ mesure 3 ha.

Le dernier emploi est franchement fautif, car si « mesure » (avec une minuscule) peut, comme dans l'emploi précédent désigner un nombre, 3 ha est une grandeur et non un nombre.
La désignation par le même mot des deux applications d et m est consacrée par l'usage ; pour une surface s donnée (et une unité choisie) les deux expressions « la mesure de s » ou « la mesure de l'aire de s » désignent le même nombre.
On peut tout de même remarquer que le mot « mesure » est passe-partout, car il s'applique à toutes les Grandeurs. Il est moins ambigu et tout aussi efficace de parler de longueur, d'aire, etc. C'est presque toujours possible sans aucune contorsion.
Enfin il faut noter que le mot « mesure » désigne aussi bien l'action par laquelle on détermine le résultat que ce résultat.

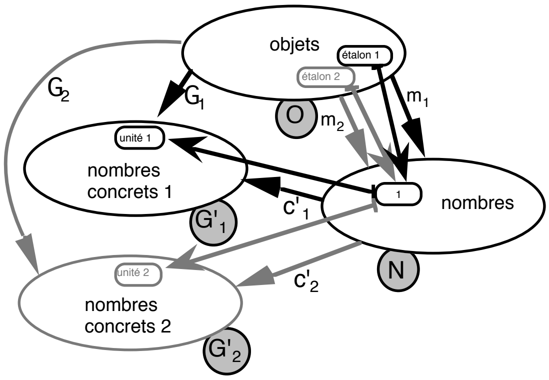
Machines « automatiques »



On trouve de plus en plus de machines à mesurer automatiques qui réalisent directement l'application m.
Plus précisément l'écran affiche un nombre à la suite duquel est écrit un nom, u, d'unité fixé une fois pour toutes. L'étalon correspondant n'apparaît pas ; la machine l'a digéré.
Peut-on dire que la machine affiche une grandeur ? Je ne le pense pas. Pour un objet o la boîte noire détermine le nombre p égal à m(o) ; puis l'écran, au nombre p fait correspondre p u. L'écran définit ainsi une application c' de N vers l'ensemble G' = N ∞ {u}.
Mais G' n'est pas G. Il n'a pas ses structures ; l'ordre à la rigueur, mais l'addition, avec toutes ses subtilités, n'apparaît pas dans l'utilisation de la machine. On ne peut donc pas dire que la composée $c' \circ m$ soit l'application G. Les éléments de G' sont les « nombres concrets », utilisés pendant un temps dans l'Enseignement Elémentaire.

Instruments

L'opacité de la boîte noire n'est pas le problème principal. L'approche d'une Grandeur par l'intermédiaire d'un instrument de mesure, qui, lui, montre l'étalon, présente tout de même des inconvénients.
* Le fait que l'ensemble G' est construit par bijection avec l'ensemble N incite souvent à confondre dans les écritures : nombre et nombre concret ; pourquoi écrire 2 cm, par exemple, quand on ne voit pas bien la différence avec 2 ? Autant simplifier.
* Les structures de G' sont obtenues par transport des structures de N. Pour l'ordre et l'addition, il n'y pas de problème majeur, sauf pour les Angles ; mais pour la multiplication, que de contorsions !
Je n'ai jamais compris pourquoi, à propos du doublement de la longueur 3 cm, l'une des deux écritures 2 x 3 cm et 3 cm x 2 était licite et l'autre interdite[8].
* Le problème principal est le changement d'unité.



Deux instruments différents, correspondants à deux étalons différents, déterminent deux ensembles différents G'_1 et G'_2 de nombres concrets et deux applications G_1 et G_2, par composition des applications m_i et c'_i (schéma ci-contre).
Pour obtenir l'ensemble des grandeurs il faut identifier G'_1 et G'_2. On ne peut le faire qu'en décidant que deux nombres concrets sont deux écritures de la même grandeur, s'ils sont les images d'un même objet. Encore faudrait-il contrôler que cette identification ne dépend pas de l'objet.
Si on le fait, on reprend une partie des manipulations décrites plus haut pour le cas de l'Aire.
Si on ne le fait pas, on reste dans une manipulation abstraite sur les ensembles, plus subtile encore que le passage au quotient.
Les relations entre les unités s'obtiennent en identifiant les écritures correspondant aux étalons :

G_1 (étalon 1) = G_2 (étalon 1) et G_1 (étalon 2) = G_2 (étalon 2).

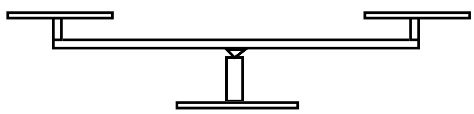
Par exemple, dans le cas de la Longueur, si les étalons 1 et 2 ont pour longueurs respectives 1 cm et 1 m, cela donne : 1 cm = 0,01 m et 100 cm = 1 m.

Conclusion

L'approche des Grandeurs par les instruments de mesure me semble plus complexe et plus abstraite que la construction directe, ainsi que le montre les schémas mis en jeu dans les modélisations.

Les Grandeurs unidimensionnelles : Longueur, Masse, Capacité

La construction de ces trois Grandeurs suit le même processus ; ces Grandeurs se différencient par le protocole de comparaison. À l'École Élémentaire, il est intéressant de les traiter simultanément[9] en organisant dans la classe trois ateliers, comportant chacun deux équipes. Au passage d'une activité à une autre, les élèves permutent entre les ateliers (globalement ou seulement une équipe)
Le matériel est présenté aux élèves.
Pour la Longueur : des petites baguettes rectilignes et des bandes étroites de papier fort (toutes de même largeur).
Pour la Masse : des objets hétéroclites et des paquets fermés, de tailles variées, dont les contenus ont été préparés pour que la masse ne soit pas croissante avec la taille et pour que certaines masses présentent entre elles des rapports simples ; deux balances Roberval (qui, à défaut, peuvent être remplacées par des trébuchets fabriqués en bois, avec des tasseaux et des planchettes). Le moment venu, des boîtes de clous fourniront des étalons.



Il est important que les deux bras du fléau soient de la même longueur.
Si besoin est, on l'équilibre en fixant à demeure une petite masse sur l'un des bras.

[8] Près de soixante ans plus tard, je me pose toujours la question.
[9] Ces activités en classe ont fait le sujet de deux émissions de la télévision scolaire, du temps où la télévision (une seule chaine sans couleurs) était un service public, média de formation (années 70…).

Pour la Capacité : des récipients variés, dont la capacité n'excède pas deux litres, parmi lesquels des bouteilles présentant entre elles des capacités de rapports simples ; un entonnoir et un seau d'eau. Pour ne pas se mouiller, on peut remplacer l'eau par du sable fin, bien sec, ou de la semoule. Le moment venu, des récipient transparents cylindrique ou évasé destinés à être gradués.

Dans chacun des ateliers, chacun des objets est désigné par une lettre majuscule.

Comparaison - première phase

Les élèves doivent d'abord déterminer de ce que veut dire « comparer » pour les différentes catégories d'objets. Puis ils sont répartis entre les trois ateliers. Dans chaque atelier les deux équipes se partagent les objets, et les comparent séparément (par juxtaposition pour la Longueur, par pesée pour la Masse et par transvasement pour la Capacité). Chaque équipe consigne ses résultats.

Au cours d'un premier bilan, les élèves présentent le classement obtenu sous la forme :

$A < B < \ldots < \begin{matrix} C \\ D \end{matrix} < \ldots < E \ldots$ qu'ils énoncent en utilisant les adjectifs « petit » et « pareil ».

Cela montre l'analogie des trois activités.
La discussion sur « pareil » permet d'introduire et d'institutionnaliser la distinction entre objet et grandeur.
Les « Longueur » seraient prêts à écrire C = D ; mais les « Masse » ne sont pas d'accord car, pour eux, les deux paquets C et D sont très différents.

Institutionnalisation

- On décide alors de dire que les deux objets ont la même grandeur (longueur, masse ou capacité).
- Il est licite d'écrire des (in)égalités entre grandeurs. Pour chaque objet on note sa grandeur, par la minuscule correspondant à son nom. On écrit ainsi : $a < b <\ldots< c = d <\ldots< e$

Par ailleurs, les élèves expliquent qu'il n'est pas nécessaire de faire toutes les comparaisons, surtout si on a fait des estimations a priori qui sont confirmées par les comparaisons (affirmation de la transitivité).

Comparaison - deuxième phase

Il s'agit maintenant d'obtenir un classement complet de toutes les grandeurs de chaque atelier.
Chaque équipe emprunte un objet à son homologue, et doit intercaler la grandeur de cet objet dans sa liste ; puis les objets sont rendus et de nouveaux sont empruntés. À la fin de l'activité les deux équipes doivent avoir la même liste globale. En cas de litige, les élèves des deux équipes doivent décider en commun des contrôles à faire.
Remarque : les manipulations sur la Longueur sont plus rapides que les autres. Quand les équipes Longueur ont terminé, on distribue à chacune la même feuille polycopiée sur laquelle sont dessinés des segments. Chaque équipe utilise ses propres bandes pour classer les nouvelles longueurs ; les équipes doivent ensuite collaborer pour préciser les encadrements par l'ensemble des grandeurs initiales, sans nouvelle manipulation. Le même problème est posé dans les autres ateliers pour un seul objet.

Institutionnalisation

- Il est toujours possible de comparer une nouvelle grandeur aux grandeurs déjà classées.

Commentaire

C'est là une différence essentielle avec l'Aire, différence que je souligne par l'adjectif "unidimensionnel".

Somme de grandeurs

Pour chaque atelier les objets ont été préparés de façon qu'il soit possible d'obtenir quelques égalités de grandeurs telles que $a + b = c$; $d + e = g + h$ ou $a + a + a = f$.
L'enseignant indique aux élèves de l'atelier Longueur deux bandes qu'ils mettent bout à bout ; ils doivent alors chercher une bande dont la longueur est celle de l'assemblage. Cette manipulation est présentée à l'ensemble de la classe qui doit déterminer comment procéder pour les autres Grandeurs.
Les équipes Masse et Capacité commencent également par les deux objets que leur indique l'enseignant.
Les élèves, dans tous les ateliers, sont invités à faire le maximum d'essais et à noter les résultats de toutes les comparaisons, même quand ils ne trouvent pas la même grandeur ; ils doivent s'organiser pour le faire.

Les manipulations sont interrompues quand il se passe un fait intéressant dans un atelier, pour le faire connaître aux autres. C'est le cas en particulier dans l'atelier Capacité, quand les élèves remplissent un récipient en transvasant plusieurs fois le contenu d'un récipient plus petit.
Si les élèves présentent leurs résultats à la classe, sous la forme A + A + A + A il est temps de discuter cette écriture et d'introduire la notation multiplicative sur les grandeurs ; dans d'autres cas, ce n'est pas encore opportun.
Les Longueur et Masse, n'ont pas les mêmes possibilités de duplication ; pour qu'ils puissent dupliquer leurs objets, on leur propose : pour la Longueur, de grandes bandes de papier à découper, et pour la Masse, de la pâte à modeler.

Institutionnalisation

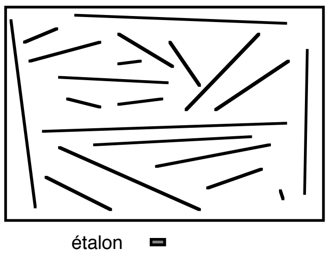
- Dans les manipulations, on peut remplacer tout objet par un objet de même grandeur.
- La grandeur de l'objet composé des objets A et B est notée a + b.
- Quand deux objets composés ont la même grandeur, on l'écrit par une égalité ; sinon on écrit une inégalité.
- Par substitution on peut obtenir de nouvelles relations.
- On écrit : 4 a au lieu de : a + a + a + a, etc.

Commentaires
Les résultats écrits peuvent faire apparaître des incohérences (surtout pour les capacités : erreurs de comptage) ; ces résultats permettent de savoir quels sont les comparaisons à contrôler pour rectifier.

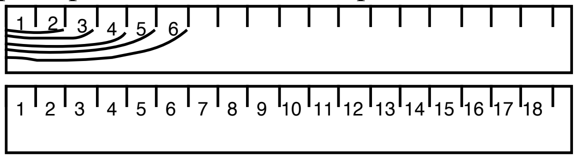
Etalons et unités

Chaque atelier reçoit un étalon.

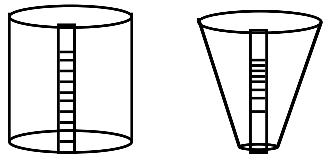
Pour la Longueur : une bande de papier d'environ un centimètre et demi. Le matériel à mesurer est entièrement nouveau : des segments tracés sur une feuille, avec interdiction d'écrire ou de dessiner sur cette feuille.
Les élèves disposent de bandes de papier qu'ils peuvent couper et sur lesquelles ils sont autorisée à écrire, mais sans dupliquer les segments.

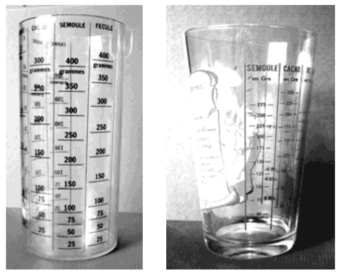


Pour la Masse : une boîte de clous de charpentier, dont la masse totale est inférieure aux paquets les plus lourds. Deux ou trois paquets, de mesure entière avec les clous, sont ajoutés au matériel précédent. Les élèves disposent de pâte à modeler[10], avec laquelle il n'ont pas le droit de dupliquer les paquets.
Pour la Capacité : un nouveau récipient, de capacité inférieure à celle de tous les autres, choisie de telle sorte que certains récipients antérieurs aient une mesure entière avec cette unité.
La consigne est la même pour tous les ateliers : Comparer tous les nouveaux objets à ce nouvel objet, appelé U, de grandeur u.
Les élèves sont autorisés à regarder ce qui se fait dans les autres ateliers.
Déroulement
Etant donné les contraintes, les élèves sont conduits à fabriquer de nouveaux étalons dont la grandeur est multiple de l'unité donnée.
L'idée d'un instrument de mesure intégrant plusieurs étalons vient généralement de l'atelier Longueur ; les élèves graduent régulièrement une bande de papier par report, en utilisant un ou plusieurs étalons.
Ils démarrent du bord de la bande ; ils commencent par tenter une première présentation indiquant les différents étalons (de longueurs u, 2 u, 3 u, etc.), qu'ils simplifient ensuite.



[10] Il faut se méfier de la pâte) modeler ; elle se déssèche et si la séquence se prolonge sur plusieurs jours, il faut vérifier leur masse à la reprise de l'activité.



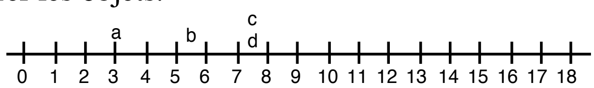


L'idée est reprise par l'atelier Capacité auquel on fournit deux récipients transparents, l'un cylindrique et l'autre évasé, sur lesquels on colle une bande de papier à graduer. Il se peut que, par souci d'économie, les élèves commencent par graduer avec le plus grand de leurs étalons ; puis ils complètent la graduation soit par transvasements effectifs à partir du plus petit étalon, soit en marquant directement de nouveaux traits régulièrement espacés.
Mais le second procédé n'est pas licite pour le récipient évasé, ce que pourrait montrer un contrôle par transvasement.
Comme l'imprécision des marquages est grande (phénomène de ménisque) ; c'est davantage par le raisonnement que les élèves arrivent à cette conclusion.
On peut alors leur montrer des verres gradués du commerce.

Les élèves de l'atelier Masse évoquent la possibilité de faire deux chaînes : l'une avec des clous et l'autre avec les boules de pâte à modeler, de façon à ne poser sur le plateau que les étalons nécessaires à l'équilibre. Mais la réalisation est impossible pratiquement.

Institutionnalisation

- Pour certains objets, "ça tombe juste" ; par exemple : a = 3 u ; pour d'autres, on a seulement un encadrement ; par exemples : 5 u < b < 6 u, 7 u < c < 8 u, 7 u < d < 8 u.
- On dit que la mesure de a avec l'unité u est égale à 3 ; celle de b est comprise entre 5 et 6, etc.
- Les mesures ne permettent pas toujours de séparer les objets.
- Pour les trois grandeurs, on peut présenter les résultats à l'aide d'une graduation régulière.



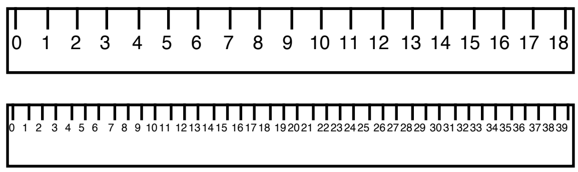
Pour ne pas faire d'erreur, il faut marquer le zéro.

Commentaires

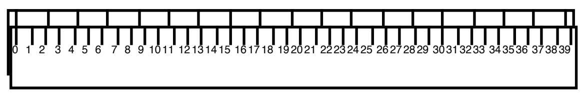
Au cours des manipulation précédentes les élèves Longueur réussissent à classer tous leurs segments soit en remarquant à l'oeil que par exemple c est plus près de 7 u et d plus près de 8 u, soit en utilisant la largeur de leur étalon comme étalon complémentaire. Au moment du bilan, ils sont frustrés par la perte de ces informations et souhaitent pouvoir utiliser une unité plus petite.

Deuxième étalon

À chaque atelier on fournit un deuxième étalon. L'atelier Masse reçoit une boîte de petits clous.
L'atelier Capacité reçoit un nouveau récipient ; les élèves doivent établir la graduation correspondante sur une bande de papier collée le long de la première.
Pour l'atelier Longueur le nouvel étalon est de longueur un peu inférieure à la moitié de u (par exemple 0,7 cm par rapport à 1,5 cm). Les élèves constatent immédiatement avec dépit que « ça ne tombe pas juste ». Chaque élève a un exemplaire de l'un ou l'autre étalon et doit d'abord dessiner soigneusement une graduation avec son unité, en marquant le zéro.



Puis les élèves passent au mesurage.
Dans les segments à mesurer, se trouvent un segment de longueur 7 u et un autre de longueur 14 u, qui ont donc pour mesure 15 et 30 avec la nouvelle unité.
Si, par suite d'imprécisions, les élèves ne s'en aperçoivent pas, on leur demande de comparer les graduations en les superposant.



La relation entre les unités est dans l'exemple 7 u = 15 v.
Les autres équipes, spontanément ou à la suite d'un bilan, cherchent également des relations entre leurs unités.

Remarque sur l'organisation de la classe

Il est très facile de modifier le matériel à mesurer dans le cas de la Longueur. C'est faisable pour la Masse, quasiment impossible pour la Capacité. La permutation des équipes permet d'effacer de la mémoire des élèves les résultats antérieurs qui pourraient parasiter la nouvelle activité.

Institutionnalisation

- On peut donner une expression d'une grandeur, ou un encadrement en utilisant plusieurs unités.
- Par substitution, en utilisant les relations entre unités, on peut mieux apprécier les encadrements.

Calcul sur les expressions de grandeurs

C'est un prolongement systématique des activités précédentes, sans manipulation effective, analogue à ce qui a été présenté pour l'Aire (introduction de fractions ou de décimaux).

Institutionnalisation

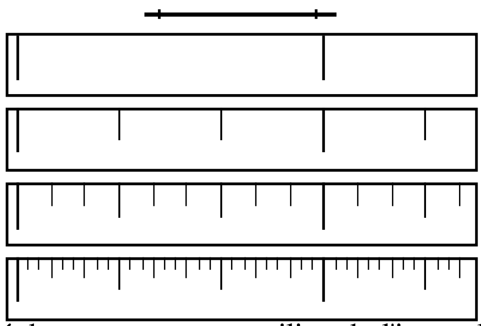
- Si on a, par exemple, la relation : 3 u = 4 v, on peut imaginer une nouvelle unité w telle que : u = 4 w et v = 3 w, même si on ne peut pas produire d'étalon correspondant.

Les unités légales

Pour la Longueur et la Masse, on peut introduire toutes les unités usuelles, avec la signification des préfixes déci, centi, milli, déca, hecto, kilo … et les relations entre les unités.
Pour la masse, il est souhaitable de montrer aux élèves des masses marquées et des bascules automatiques (pèse-bébé, par exemple) et d'étudier leur utilisation[11].
Pour la Capacité, l'unité est le litre (avec ses multiples et sous-multiples). Les activités précédentes ne préparent pas du tout à l'introduction des unités construites sur le mètre. Cela ne peut se faire que par l'étude du Volume en tant que Grandeur tridimensionnelle (voir ci-dessous). Cependant les conditionnements du lait fournissent plusieurs formes parallélépipédiques de capacité un litre et certains matériels pédagogiques du commerce comprennent un cube transparent dont l'arête intérieur est de dix centimètres ; les élèves sont généralement surpris que sa capacité soit de un litre.

La Longueur, Grandeur de référence

Dans les activités décrites, la présentation des résultats sur la Longueur a souvent servi de modèle à la présentation des résultats sur les autres Grandeurs. C'est en fait la droite réelle qui est en train de se construire, et l'isomorphisme de l'ensemble des réels positifs avec certaines Grandeurs.
C'est pourquoi il est important de compléter les activités sur la longueur.
Voici un exemple.



On distribue aux élèves une feuille comportant cinq bandes graduées (les deux dernières identiques), qu'ils devront découper. La feuille comporte aussi un segment à mesurer. La première graduation a pour unité u, double de la longueur l du segment. Les unités des autres graduations sont les sous-multiples u/3, u/9 et u/27. Les mesurages successifs donnent un encadrement ; le dernier est :

$$u/3 + u/9 + u/27 < l < u/3 + u/9 + 2u/27$$

On précise aux élèves que lors du premier mesurage l'extrémité du segment est au milieu de l'intervalle de la graduation, et on leur demande ce qui va se passer quand on continue à affiner les graduations, en partageant en trois à chaque fois. Ils peuvent réaliser le partage suivant sur la cinquième bande, voire le suivant encore.
Quelques élèves disent qu'au bout d'un certain temps, il n'y aura plus d'encadrement car les traits vont se chevaucher. Mais la plupart pensent que ça va toujours continuer « parce qu'il n'y aura jamais de trait au milieu ».
On demande aux élèves s'ils peuvent imaginer une longueur dont la mesure ne tombe jamais juste en utilisant le centimètre et ses sous-multiples. La plupart trouvent des algorithmes plus ou moins systématiques[12]

Institutionnalisation

- Quand on dessine ou qu'on mesure, on n'est jamais tout à fait sûr que « ça tombe juste » ; mais, dans la pratique, on peut le décider.

Le Volume, grandeur tridimensionnelle

* **Les activités concernant la tridimensionnalité** du Volume peuvent se calquer sur les activités concernant l'Aire, en remplaçant dans les pavages les rectangles par des parallélépipèdes

[11] On trouve encore sur certains marchés des commerçants qui utilisent des masses marquées ou une balance romaine.
[12] Un élève de CM2 m'a confié, qu'à son avis, il y avait beaucoup plus de longueurs pour lesquelles ça ne tombait jamais juste que de longueurs pour lesquelles ça tombait juste. Belle intuition !

rectangles. Je n'y reviens pas ; je signale simplement que parmi les matériels utilisables il y a les cubes en bois et le sucre en morceaux.
* **La comparaison directe** des objets par superposition n'est pas possible, même pour deux objets identiques, car il faudrait être plongé dans un espace de dimension quatre.
Pour les objets identiques de forme quelconque, il faut recourir au moule : deux objets sortant du même moule ont le même volume ; un objet qui, éventuellement après découpage, tient dans le moule d'un autre a un volume inférieur. Ce n'est pas commode, mais il y des moules adaptables, c'est-à-dire des récipients contenant un liquide, dans lequel on plonge les objets à comparer. Le niveau du liquide augmente d'autant plus que l'objet est plus volumineux.
Si le récipient a été gradué, cette méthode permet aussi, par différence, de mesurer le volume, en faisant le lien entre les deux aspects de cette Grandeur.
Une autre méthode peut être utilisée pour les objets de forme géométrique : la symétrie.
Exemple : Après avoir dessiné trois patrons identiques d'un tétraèdre quelconque, on plie les deux premiers patrons de la même façon et le troisième en marquant les plis à l'envers. Les deux premiers tétraèdres sont directement isométriques et symétriques du troisième par rapport à n'importe laquelle des quatre faces. L'utilisation du troisième tétraèdre comme intermédiaire dans la comparaison des deux premiers est, pour beaucoup d'élèves, plus convaincante que la comparaison directe en les plaçant côte à côte.
La méthode du liquide déplacé, qui n'a pas d'équivalent pour l'Aire, a des variantes comme, par exemple, retrouver le niveau, en ajoutant du liquide après avoir sorti le solide immergé. Si l'objet flotte, il faut le maintenir immergé.
Cette méthode permet, entre autres,
* de vérifier que le rapport de volumes est k^3 dans un agrandissement ou une réduction de rapport k ;
* de faire des manipulations conduisant aux formules usuelles.

Les Angles

C'est un concept qui est peu abordé à l'École. Au collège, dans les années 70, la distinction entre objet et grandeur était nette ; mais elle tournait ensuite à la caricature avec les cos et Cos. Actuellement, la confusion « officielle » entre objet et grandeur entretenue par l'utilisation du mot *angle* pour les deux, me semble extrêmement dommageable. On pourrait sans doute s'appuyer sur les considérations théoriques qui suivent pour bâtir une progression.

Les secteurs

Étant donné deux demi-droites [OA) et [OB), de même origine O, on peut leur associer deux secteurs : les deux parties du plan dont le bord est la réunion de ces deux demi-droites. À l'exception du cas où les demi-droites sont opposées, un seul des secteurs est une partie convexe du plan : c'est le secteur saillant ; l'autre est dit rentrant. Si les demi-droites sont opposées, chaque secteur est un demi-plan (partie convexe du plan) on dit alors que les secteurs sont plats. Si les deux demi-droites sont confondues, le secteur saillant est dit nul et le secteur rentrant est dit plein.[*]

Mesure des secteurs

Sur l'ensemble des secteurs de sommet O, nous allons définir une mesure, c'est-à-dire une application,m, de cet ensemble vers R telle que si s_1 et s_2 sont deux secteurs alors : $m(s_1) + m(s_2) = m(s_1 \approx s_2) + m(s_1 \leftrightarrow s_2)$. On dit que m est additive.

De plus, nous voulons que cette mesure soit invariante par isométries (rotations de centre O ou réflexions dont le miroir passe par 0) et que la mesure d'un secteur nul soit 0. Il en résulte que la mesure de deux secteurs adjacents est égale à la somme des mesures des deux secteurs.

[*] Comme le montre A.Gouteyron dans une brochure de l'IREM de Bordeaux, on pourrait se contenter des secteurs saillants.

figure 1

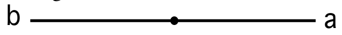


figure 2

Appelons M la mesure du secteur plein de bord a.

Alors la mesure des secteurs plats (isométriques) de bord a≈b est M/2 ;

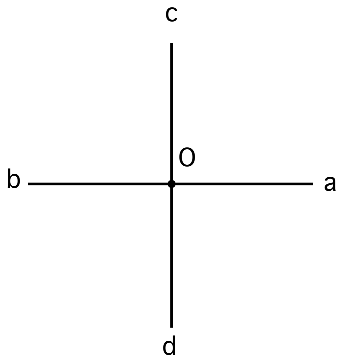


figure 3

puis la mesure des secteurs saillants (isométriques) de bords a≈c, c≈b, b≈d, d≈a est M/4 ;

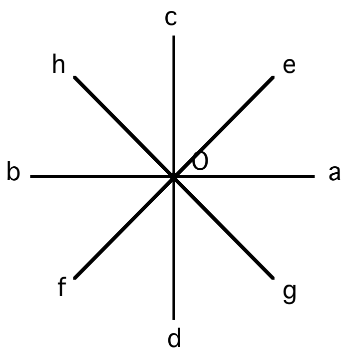


figure 4

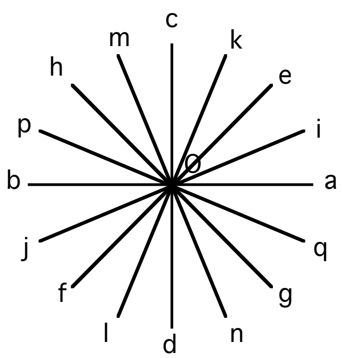


figure 5

la mesure des secteurs saillants de bords a≈e, e≈c … est M/8 ;

la mesure des secteurs saillants de bords a≈i, i≈e … est M/16 ;

etc…

Grâce à l'additivité, on peut définir la mesure de tout secteur dont le bord est constitué de deux des demi-droites construites ; par exemple : le secteur saillant de bord h≈i est 5M/16 et le secteur rentrant de même bord est 11M/16.

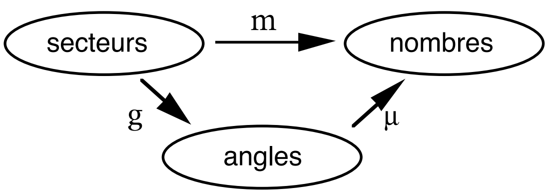
Plus généralement la mesure d'un secteur de cette sorte est de la forme $M.p/2^q$ (avec $p \leq 2^q$) ; ce sont les seuls secteurs dont on peut donner la mesure directement. Pour les autres secteurs on procède par encadrement et passage à la limite en utilisant une autre conséquence de l'additivité qui est la suivante :

$$\text{si } s_1 \supset s_2 \text{ , alors } m(s_1) \geq m(s_2)$$

On démontre que l'application ainsi construite a bien les propriétés demandées ; en particulier deux secteurs ont même image par m si et seulement si ils sont isométriques. Cette mesure est entièrement déterminée par le choix du nombre M pour le secteur plein. La mesure m' correspondant au nombre M' se déduit de m en multipliant chaque image par M'/M. Les nombres M les plus usités sont 1, 2π, 360 et 400.

Les angles-de-secteurs

On dit que deux secteurs sont de même angle s'ils ont même image par m, ou, ce qui revient au même, s'ils sont isométriques. On introduit ainsi un nouvel ensemble et une application g de l'ensemble des secteurs vers l'ensemble des nombres



Il existe alors, d'une manière automatique, une application μ de l'ensemble des angles vers l'ensemble des nombres telle que $m = \mu \circ g$; μ est définie ainsi : si a est l'angle du secteur s, $\mu(a) = m(s)$; cette application est définie sans ambiguïté car si s_1 et s_2 sont deux secteurs de même angle a : $m(s_1) = m(s_2)$.

L'application μ est une bijection, qui permet de transporter sur l'ensemble des angles l'addition et l'ordre de l'ensemble des nombres.

On montre qu'il est également possible de définir l'addition des angles par :

$$g(s_1) + g(s_2) = g(s_1 \approx s_2) \text{ (avec } s_1 \text{ et } s_2 \text{ adjacents et } m(s_1 \leftrightarrow s_2) = 0) \text{ ;}$$

et l'ordre par : $g(s_1) \geq g(s_2)$ ssi $s_1 \supseteq s_2$

Le plus petit angle est l'angle des secteurs nuls ; le plus grand est l'angle des secteurs pleins.

<u>Secteurs étalons ; angles unités</u>

Dans le diagramme précédent, l'ensemble des secteurs, l'ensemble des angles et l'application g ne dépendent pas du nombre M qui détermine m ; par contre, si on remplace M par M' = α.M, m et μ sont multpliées par α.

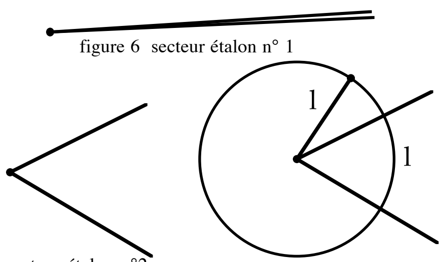


figure 6 secteur étalon n° 1

secteur étalon n°2

figure 7

Si on prend comme secteur étalon le secteur saillant n° 1, l'angle unité correspondant est le degré, noté °. La mesure d'un secteur plein est 360. L'angle plein est 360°

Si on prend comme secteur étalon le secteur n° 2, c'est à dire un secteur qui intercepte un arc de longueur l sur le cercle de rayon l centré au sommet du secteur, l'angle unité correspondant est le radian, noté rad. La mesure d'un secteur plein est 2π . L'angle plein est 2π rad.

On peut aussi prendre comme étalon un secteur plein ou un secteur saillant dont le bord est formé de deux demi-droites perpendiculaires ; les unités correspondantes sont le tour et l'angle droit que nous noterons respectivement T et D. Une dernière unité usitée est le grade (gr). Les relations entre ces différents angles sont données par les égalités :

$$1D = 1/4.T = 90° = 100gr = \pi/2rad.$$

De ces différents étalons, seul les secteurs pleins et droits sont constructibles à la règle et au compas, les autres s'obtiennent par des constructions approchées.

Conclusion

Il s'agit plutôt d'une question :

Comment se fait-il que, alors que les concepts sont de plus en plus délicats de la longueur au volume et à l'angle, l'enseignement accepte (voire revendique) de plus en plus de confusion ?

F. Colmez