Concours ADVANCE ESME–EPITA–IPSA

3 mai 2014 – Calculatrice interdite

ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

• L'épreuve de Mathématiques se déroule sur 1h30 et est constituée de 6 questions obligatoires et de 6 questions à choisir parmi les questions numérotées de 7 à 14.
• Chaque question comporte cinq propositions : A, B, C, D, E.
• Pour chaque question :
  — Vous cochez la (ou les) case(s) V de la fiche optique correspondant à toute proposition que vous jugez vraie.
  — Vous cochez la (ou les) case(s) F de la fiche optique correspondant à toute proposition que vous jugez fausse.
  — Les cinq propositions peuvent être toutes vraies ou toutes fausses
• Toute case correctement remplie entraîne une bonification. Toute erreur est pénalisée.
Il est donc préféré une absence de réponse à une réponse inexacte.

Questions obligatoires

---

1. À l'auberge « l'hirondelle heureuse », le prix de la fricassée de moustiques coûte 2 becos en 2012. En 2013 le prix de la fricassée a baissé de 30 %, puis a augmenté de 50 % l'année suivante. Depuis 2010, tout client ayant une carte de fidélité a une réduction de 10 % sur la fricassée et tout client ayant une carte bonus a une fricassée gratuite pour 10 achetées.

Alors :

(A) En 2013, la fricassée coûte 0,60 becos.

(B) Entre 2012 et 2014, le prix de la fricassée a augmenté de 20 %.

(C) Un client ayant une carte de fidélité depuis 2010 paye sa fricassée en 2014 au même prix qu'en 2012.

(D) En 2014, la fricassée coûte 2,10 becos.

(E) En 2014, il est financièrement plus intéressant d'avoir une carte bonus qu'une carte de fidélité lorsqu'on achète 11 fricassées par an.

---

2. (A) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{x} = 1$

(B) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln\left(1+x^2\right)}{x} = 0$

(C) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln\left(1+x^2\right)}{x^2} = 1$

(D) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{x^2} = \dfrac{1}{2}$

(E) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln\left(1+x^2\right)}{\ln(1+x)} = 1$

3. Soit f une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ dont le tableau de variations est :

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	4	$\searrow$	-1	$\nearrow$	5

(A) $f(4) = 0$

(B) Pour tout x de $\mathbb{R}$, $f(x) \leqslant 5$.

(C) L'équation $f(x) = 0$ admet exactement 2 solutions.

(D) L'équation $f(x) = 4$ admet exactement 2 solutions.

(E) Les données ne permettent pas de connaître le signe de $f(1)f(3)$.

---

4. Soit f la fonction définie sur $]-3\,;3[$ par $f(x) = \ln\left(\dfrac{3-x}{3+x}\right)$.

Alors :

(A) $f(0) = 0$

(B) Pour tout $x \in\,]-3\,;3[$, $f(-x) = -f(x)$.

(C) Pour tout $x \in\,]-3\,;3[$, $f'(x) = \dfrac{1}{3-x} - \dfrac{1}{3+x}$.

(D) f est croissante sur $]0\,;3[$.

(E) f est décroissante sur $]-3\,;0[$.

---

5. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x\mathrm{e}^{-2x}$.

Alors :

(A) Pour tout x de $\mathbb{R}$, $f'(x) + 2f(x) = \mathrm{e}^{-2x}$

(B) $\displaystyle\int_0^1 -\mathrm{e}^{-2x}\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^{-2} - 1$

(C) $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left[f(0) - f(1) + \int_0^1 \mathrm{e}^{-2x}\,\mathrm{d}x\right]$

(D) $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1-2\mathrm{e}^{-2}}{2}$

(E) $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_0^1 \mathrm{e}^{-2x}\,\mathrm{d}x$

6. Soit (u_n) une suite géométrique de raison $q > 1$ et de premeir terme $u_1 = 2$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $S_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$.
Alors :

(A) $u_{16} = q^{10} u_6$

(B) $u_5 u_7 = u_3 u_9$

(C) Si $q = 2$ alors $S_3 = 14$.

(D) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, S_n est un entier naturel pair.

(E) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_{2n} = \left(1 + q^n\right) S_n$.

Questions à choisir

(6 questions à choisir parmi les suivantes)

---

7. Soit $m \in \mathbb{R}$ et f_m la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f_m(x) = x^2 + 2mx + 9$.

(A) $f_5(x) = (x+1)(x+9)$

(B) Pour tout $m \in \mathbb{R}$, la courbe de f_m passe par le point I $(0\,;9)$.

(C) Pour tout $m \in \mathbb{R}$, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f_m(x) \geqslant 0$.

(D) Pour tout $m \in \mathbb{R}$, l'équation $f'(x) = 0$ admet une seule solution.

(E) Pour tout $m \in \mathbb{R}$, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f_{m+1}(x) \geqslant f_m(x)$.

---

8. Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$, de valeur moyenne 4 sur $[-2\,;2]$.
Alors on peut affirmer que :

(A) $\displaystyle\int_{-2}^{2} f(x)\,\mathrm{d}x = 2$

(B) Pour tout $x \in [-2\,;2]$, $f(x) \geqslant 0$.

(C) f n'est pas une fonction impaire.

(D) Il existe $\alpha \in [-2\,;2]$, $f(\alpha) = 4$.

(E) La valeur moyenne de f^2 $\left(f^2 : x \longmapsto f(x)^2\right)$ sur $[-2\,;2]$ est 16.

---

9. Soit f la fonction définie sur $[-1\,;1]$ par $f(x) = x^3 - 3x + 2$.
Alors :

(A) f est croissante sur $[-1\,;1]$.

(B) Pour tout $x \in [-1\,;1]$, $f(x) \geqslant 0$.

(C) Pour tout $\alpha \in [0\,;4]$, l'équation $f(x) = \alpha$ admet une unique solution sur $[-1\,;1]$.

(D) Pour tout $x \in [-1\,;1]$, si $f(x) \leqslant 2$ alors $x \leqslant 0$.

(E) Pour tout $x \in [-1\,;1]$, si $x \geqslant -\dfrac{1}{2}$ alors $f(x) \leqslant \dfrac{27}{8}$.

10. On appelle octet une liste de 8 éléments pris dans l'ensemble $\{0,1\}$ (exemple d'octet : 00110011). Alors il y a :

(A) $\binom{4}{2}$ octets se terminant par 1000

(B) 2^5 octets se terminant par 100

(C) $\binom{5}{2}$ octets commençant par 100

(D) $(5!)\left(2^5\right)$ octets contenant 100 (remarque : 10101111 ne contient pas 100)

(E) 4! octets contenant exactement quatre 0

---

11. Dans un jeu, on lance une bille dans un appareil comportant 6 portes de sortie numérotées de 1 à 6. La probabilité que la bille sorte par la porte 2 est 1/6.

La règle du jeu est : un joueur mise 1 €, il reçoit 3 € si la bille sort par la porte 2, sinon il ne reçoit rien.

Yves fait 6 parties consécutives. X est la variable aléatoire représentant le nombre de parties gagnées par Yves.

Alors :

(A) $P(X=2)=\dfrac{1}{3}$

(B) $P(X \geqslant 1)=1-\left(\dfrac{5}{6}\right)^5$

(C) La probabilité qu'Yves ne perde pas d'argent est $P(X \geqslant 2)$.

(D) Yves peut gagner au plus 12 €.

(E) La probabilité qu'Yves gagne de l'argent est égale à celle qu'il en perde.

---

12. Dans le repère $\left(\text{O}\,;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath},\ \vec{k}\right)$, on considère le plan $\mathscr{P}$ d'équation $x-y+2z-4=0$ et Δ la droite passant par I $(1\,;\,1\,;\,b)$ et de vecteur directeur $\vec{u}\,(-1\,;\,a\,;\,1)$ où a et b sont des réels.

Alors :

(A) Si $a \neq 1$ alors pour tout $b \in \mathbb{R}$ l'intersection de Δ et $\mathscr{P}$ est un point.

(B) Si $b=2$ alors pour tout $a \in \mathbb{R}$ l'intersection de Δ et $\mathscr{P}$ est un point.

(C) Si $b \neq 2$ alors pour tout $a \in \mathbb{R}$ $\Delta \cap \mathscr{P} = \emptyset$

(D) Si $a=1$ et $b=2$ alors $\Delta \cap \mathscr{P} = \emptyset$

(E) Si $a=1$ et $b \neq 2$ alors $\Delta \cap \mathscr{P} = \emptyset$

13. Pour tout nombre complexe z,

(A) $|z^2+1| \geqslant |z+1|$

(B) $|z+1| \geqslant |z-2|$

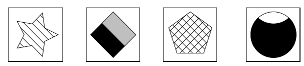
(C) Si $|z+1| = 2$ alors il existe $\theta \in [0\,;2\pi[$, $z = \mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\theta}+1$

(D) S'il existe $\theta \in [0\,;2\pi[$, $z = -5\,\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\theta}+1$ alors $|z| = 4$.

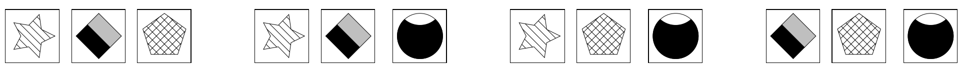
(E) Si $|z| = 2$ alors $|z-1| = 1$

---

14. On dispose de 4 cartes



Chaque carte vaut un nombre entier strictement positif de points. On donne ci-dessous la somme des points des 3 cartes :



200 150 100 n

Alors :

(A) Il est impossible que $n = 50$.

(B) $n \geqslant 150$

(C) n est un multiple de 3.

(D) Si $n = 210$ alors une des cartes vaut 10 points.

(E) Si $n = 210$ alors une des cartes vaut 30 points.

CORRIGÉ DU SUJET OFFICIEL DE L'ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

	A	B	C	D	E
1	F	F	F	V	F
2	V	V	V	F	F
3	F	V	F	V	V
4	V	V	F	F	V
5	V	V	V	F	F
6	V	V	V	F	V
7	V	V	F	V	F
8	F	F	V	V	F
9	F	V	V	F	V
10	F	V	F	F	F
11	F	V	V	V	F
12	V	F	F	F	V
13	F	F	F	F	F
14	V	V	V	V	F