Concours ADVANCE ESME–EPITA–IPSA

mai 2011 – Calculatrice interdite

ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

- L'épreuve de Mathématiques se déroule sur 1 h 30 et est constituée de 8 questions obligatoires et de 4 questions à choisir parmi les questions numérotées de 9 à 16.
- Chaque question comporte cinq propositions : A, B, C, D, E.
- Pour chaque question :
  - — Vous cochez la (ou les) case(s) V de la fiche optique correspondant à toute proposition que vous jugez vraie.
  - — Vous cochez la (ou les) case(s) F de la fiche optique correspondant à toute proposition que vous jugez fausse.
  - — Les cinq propositions peuvent être toutes vraies ou toutes fausses
- Toute case correctement remplie entraîne une bonification. Toute erreur est pénalisée.

Il est donc préféré une absence de réponse à une réponse inexacte.

Questions obligatoires

1.

Soit P l'énoncé : « Pour qu'un pion soit blanc **faut** qu'il soit en bois ».

Alors P signifie :

(A) « Tout pion blanc est en bois »

(B) « Tout pion en bois est blanc »

(C) « Si un pion est blanc alors il est en bois »

(D) « Si un pion est en bois alors il est blanc »

(E) « Pour qu'un pion soit en bois il suffit qu'il soit blanc »

2.

(A) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1-x)}{x} = 1$

(B) $\lim\limits_{x\to 0} x\sin\left(\dfrac{1}{x}\right) = 0$

(C) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2x^2+x-3}{x^2+x+1} = 2$

(D) $\lim\limits_{x\to 0} \mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}} = 0$

(E) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\mathrm{e}^{x^2}-1}{x} = 1$

3. Soit f une fonction définie et dérivable sur $]1\ ;\ +\infty[$ dont le tableau de variations est :

x	1		3		5		$+\infty$
$f'(x)$	$\Vert$	$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$\Vert\ +\infty$	$\searrow$	-3	$\nearrow$	-1	$\searrow$	-2

On note C sa courbe représentative dans un repère orthonormal $\left(\text{O}\ ;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$. Alors :

(A) $f'(4) < 0$

(B) C admet une asymptote verticale

(C) C admet une asymptote horizontale

(D) L'équation $f(x) = 0$ n'admet pas de solution dans $[3\ ;\ +\infty[$

(E) L'équation $f(x) = -1$ admet deux solutions dans $]1\ ;\ +\infty[$

---

4. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}\backslash\{1\}$ par : $f(x) = \dfrac{x^2 - x + 1}{x - 1}$.

On note C la courbe représentative de f dans un repère orthonormal.

(A) La droite d'équation $x = 1$ est une asymptote verticale de C

(B) $\displaystyle\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$

(C) La droite d'équation $y = x$ est asymptote à C en $-\infty$

(D) f est croissante sur $]1\ ;\ +\infty[$

(E) f est décroissante sur $]0\ ;\ 1[$

---

5. Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\left\{\begin{array}{lcll} f(x) & = & 1 - x^2 & \text{si} \quad x < 0 \\ f(x) & = & x^2 + 2 & \text{si} \quad x \geqslant 0 \end{array}\right.$$

Alors :

(A) f n'admet pas de limite en 0

(B) f est dérivable en 0

(C) f est croissante sur $\mathbb{R}$

(D) L'équation $f(x) = 0$ admet une et une seule solution dans $\mathbb{R}$

(E) f admet une fonction réciproque définie sur $\mathbb{R}$

6.

(A) $\displaystyle\int_0^1 (t-1)^2\,\mathrm{d}t = \frac{1}{3}$

(B) $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t = \ln 4$

(C) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{t+1}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}$

(D) $\displaystyle\int_0^{\pi} t\cos t\,\mathrm{d}t = -2$

(E) $\displaystyle\int_0^1 t\sin t\,\mathrm{d}t = -2$

---

7. Soit f la fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = (x+1)\mathrm{e}^{-2x}$. On a :

(A) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = (x+2)\mathrm{e}^{-2x}$

(B) f est croissante sur $\left]-\infty\,;\,-\dfrac{1}{2}\right[$

(C) La tangente à la courbe de f au point d'abscisse 0 a pour équation $y = -x+1$

(D) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$

(E) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$

---

8. Soit f la fonction définie sur $D =]-2\,;\,0[\cup]0\,;\,+\infty[$ par : $f(x) = -3x+2+\dfrac{\ln(x+2)}{x}$

On note C sa courbe représentative dans un repère orthonormal $\left(\mathrm{O}\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath}\right)$ et Δ la droite d'équation $y = -3x+2$

Alors :

(A) Δ est asymptote à C en $+\infty$

(B) Le point $\mathrm{M}(-1\,;\,5)$ appartient à l'intersection de Δ et C

(C) $\displaystyle\lim_{x\to 0} f(x) = 2$

(D) C admet deux asymptotes verticales

(E) Il existe $a > 0$ tel que f soit décroissante sur $]a\,;\,+\infty[$

Questions à choisir (4 questions à choisir parmi les suivantes)

---

9. Soit (u_n) une suite géométrique réelle de premier terme $u_0 = 36$ et de raison q.

Alors :

(A) Si $u_3 = \dfrac{4}{3}$ alors $q = \dfrac{1}{3}$

(B) Si $\dfrac{u_2}{u_4} = 4$ alors $q = 2$

(C) Si $q < \dfrac{1}{3}$ alors $u_4 < 1$

(D) S'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $u_n = 1$ alors $q = \dfrac{1}{6}$

(E) Si $\lim\limits_{n \to +\infty} (u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_n) = 30$ alors $q = -\dfrac{1}{5}$.

---

10. La suite réelle (u_n) est convergente :

(A) $u_n = \dfrac{n\sqrt{n+1}}{n^2+1}$

(B) $u_n = \dfrac{1+(-1)^n\sqrt{n}}{n+1}$

(C) $u_n = \dfrac{\cos n}{n+1}$

(D) $u_n = \dfrac{(-1)^n\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}}$

(E) $u_n = \dfrac{\ln\left(\mathrm{e}^n+1\right)}{\sqrt{n+1}}$

---

11. Un service de recrutement reçoit 15 dossiers dont 6 comportent un avis favorable et les 9 autres un avis défavorable. Les 15 dossiers sont classés au hasard.

La probabilité de l'évènement

(A) le premier dossier est favorable et le deuxième défavorable est $\dfrac{9}{35}$

(B) les deux premiers dossiers sont favorables est $\dfrac{1}{7}$

(C) les deux premiers dossiers sont défavorables est $\dfrac{6}{7}$

(D) au moins un des deux premiers dossiers est défavorable est $\dfrac{6}{7}$

(E) le deuxième dossier est favorable sachant que le premier est défavorable est $\dfrac{3}{7}$

12. On lance deux dés dont les faces sont numérotées de 1 à 6. Pour chaque dé, les probabilités d'obtenir une des six faces sont égales. On note S la somme des points des faces supérieures.
Si $2 \leqslant S \leqslant 3$ on gagne 20 points, si $3 < S \leqslant 5$ on gagne 10 points, si $5 < S < 10$ on gagne 5 points et si $10 \leqslant S \leqslant 12$ on gagne 1 point.
On note X la variable aléatoire donnant le nombre de points par lancer.

(A) $P(X = 20) = P(X = 1)$
(B) $P(X = 5) = \dfrac{5}{9}$
(C) $P(X \leqslant 5) = \dfrac{13}{18}$
(D) $P(X \geqslant 10) = \dfrac{5}{18}$
(E) L'espérance de X est $\dfrac{64}{9}$

---

13. Soit $m \in \mathbb{R}$. Dans l'espace rapporté à un repère orthonormal $\left(\text{O}\,;\,\overrightarrow{\imath},\,\overrightarrow{\jmath},\,\overrightarrow{k}\right)$, on considère les plans P et Q :

$$P\colon\ x - y + 2z + 3 = 0 \qquad Q\colon\ x + my + 2z + 1 = 0$$

Alors :

(A) Pour que P et Q soient sécants il faut que $m \neq -1$
(B) Si $m = -1$ alors P et Q sont parallèles
(C) Si $m = -1$ alors la droite de vecteur directeur $\overrightarrow{u}\,(1\,;\,-1\,;\,2)$ et passant par le point I$(3\,;\,0\,;\,-3)$ est perpendiculaire à Q
(D) Si $m = 5$ alors P et Q sont perpendiculaires
(E) Si $m = 5$ alors l'intersection de P et Q est une droite de vecteur directeur $\overrightarrow{v}\,(-2\,;\,0\,;\,1)$

---

14. Soit ω un réel strictement positif et $z = \dfrac{1 + \mathrm{i}\omega}{1 - \mathrm{i}\omega}$
Alors :

(A) La partie réelle de z est égale à 1
(B) La partie imaginaire de z est égale à 2ω
(C) Le module de z est égal à 1
(D) Le module de $\dfrac{(1 + \mathrm{i}\omega)^2}{1 - \mathrm{i}\omega}$ est égal à $\sqrt{1 + \omega^2}$
(E) Le module de $\dfrac{1 + \mathrm{i}\omega}{(1 - \mathrm{i}\omega)^2}$ est égal au module de $\dfrac{(1 + \mathrm{i}\omega)^2}{1 - \mathrm{i}\omega}$.

15. Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormal, on considère les points P, Q, R et S d'affixe respective z, z', $\overline{z}$, $\overline{z'}$ où $z = -\sqrt{3} + \text{i}$ et $z' = -\sqrt{2} + +\text{i}\sqrt{2}$.

Alors :

(A) $|z| = \left|z'\right|$

(B) OP = OS

(C) Les droites (PR) et (QS) sont parallèles

(D) Le triangle POR est isocèle

(E) Les points P, Q, R et S sont sur le cercle de centre O et de rayon 2

16. Soit f une fonction définie et dérivable sur $[1~;~+\infty[$. On note C la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $\left(\text{O}~;~\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$. Alors :

(A) Si $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$ alors $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} [f(x) - x] = 0$

(B) Si $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$ alors la droite d'équation $y = x$ est asymptote à C en $+\infty$

(C) Si $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{\ln x} = 1$ alors $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$

(D) Si la droite d'équation $y = x$ est asymptote à C en $+\infty$ alors $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{\ln x} = 0$

(E) Si la droite d'équation $y = x$ est asymptote à C en $+\infty$ alors $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{\text{e}^x} = 0$