Concours ADVANCE ESME–EPITA–IPSA

mai 2010 – Calculatrice interdite

ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

- L'épreuve de Mathématiques se déroule sur 1 h 30 et est constituée de 8 questions obligatoires et de 4 questions à choisir parmi les questions numérotées de 9 à 16.
- Chaque question comporte cinq propositions : A, B, C, D, E.
- Pour chaque question :
  - — Vous cochez la (ou les) case(s) V de la fiche optique correspondant à toute proposition que vous jugez vraie.
  - — Vous cochez la (ou les) case(s) F de la fiche optique correspondant à toute proposition que vous jugez fausse.
  - — Les cinq propositions peuvent être toutes vraies ou toutes fausses
- Toute case correctement remplie entraîne une bonification. Toute erreur est pénalisée.

Il est donc préféré une absence de réponse à une réponse inexacte.

Questions obligatoires

---

1. On considère trois entiers naturels x, y et z. Soit la proposition :

$$(P) : « \text{ « si } x = 3 \text{ alors } \quad y = 5 \text{ et } z = 1 \text{ »}$$

Alors :

(A) (P) est équivalente à : « si $y = 5$ et $z = 1$ alors $x = 3$ »

(B) (P) est équivalente à : « si $y \neq 5$ ou $z \neq 1$ alors $x \neq 3$ »

(C) (P) est équivalente à : « si $x \neq 3$ alors $y \neq 5$ ou $z \neq 1$ »

(D) La négation de (P) est : « $x = 3$ et $y \neq 5$ et $z \neq 1$ »

(E) La négation de (P) est : « si $x = 3$ alors $y \neq 5$ ou $z \neq 1$ »

---

2. Pour tous entiers naturels strictement positifs n et p, on a :

(A) n^2 est pair si et seulement si n est pair

(B) $(n+p)^2$ est pair si et seulement si $(n-p)^2$ est pair

(C) Si np est impair alors $n+p$ est pair

(D) Si $n^2 + np + p^2$ est pair alors np est pair

(E) Si $n^2 + np + p^2$ est pair alors n et p sont pairs

---

3. Pour tous réels non nuls a, b, c et d on a :

(A) Si $a < b$ alors $a^2 < b^2$

(B) Si $|b| > a$ alors $b > a$

(C) Si $a < b$ et $c < d$ alors $ac < bd$

(D) Si $a < 0 < b$ alors $\dfrac{1}{b} < \dfrac{1}{a}$

(E) Si $ac < bd$ alors $\dfrac{c}{b} < \dfrac{d}{a}$

---

4. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}\backslash\{1\}$ par : $f(x) = \dfrac{x^2 - x + 4}{x - 1}$.

On note C la courbe représentative de f dans un repère orthonormal.

(A) La droite d'équation $x = 1$ est une asymptote verticale de C

(B) $\displaystyle\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$

(C) $\displaystyle\lim_{x \to 0} f(x) = 0$

(D) f est croissante sur $]1~;~+\infty[$

(E) f est décroissante sur $]-\infty~;~-1[$

5.

(A) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 x\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{4}$

(B) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^2 x\,\mathrm{d}x = \frac{5}{4} - \frac{\pi}{8}$

(C) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^2 x\,\mathrm{d}x = 1 - \frac{\pi}{4}$

(D) $\displaystyle\int_{-1}^{1} \left(x^3 + x\right)\,\mathrm{d}x = 0$

(E) $\displaystyle\int_{-1}^{1} \left(x^4 + x^2\right)\,\mathrm{d}x = 0$

---

6. Soit pour tout x de $\mathbb{R}$, $f(x) = \ln\left(x^2 + 1\right) + x$ alors :

(A) Pour tout x de $\mathbb{R}$, $f'(x) = \dfrac{1}{x^2 + 1} + 1$

(B) f est croissante sur $\mathbb{R}$

(C) $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

(D) $\displaystyle\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$

(E) Il existe un unique a de $\mathbb{R}$ tel que $f(a) = 0$

---

7. Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ dont le tableau de variations est :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

Alors l'expression de f peut être :

(A) $f(x) = |x| + 1$

(B) $f(x) = x\cos^2 x$

(C) $f(x) = \sqrt{x^2+1}$

(D) $f(x) = \ln\left(x^2+1\right) + 1$

(E) $f(x) = \mathrm{e}^x - x$

---

8. Soit f la fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, par : $f(x) = x^2\mathrm{e}^{-2x}$

Alors :

(A) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

(B) La courbe représentative de f admet une asymptote horizontale

(C) $f'(0) = 0$

(D) f est croissante sur $]0\ ;\ +\infty[$

(E) La courbe représentative de f admet un maximum au point d'abscisse $x = 1$

Questions à choisir (4 questions à choisir parmi les suivantes)

---

9. Pour toute suite numérique (u_n) on a :

(A) Si pour tout n de $\mathbb{N}$, $0 \leqslant u_n \leqslant 3$ alors (u_n) est convergente

(B) Si pour tout n de $\mathbb{N}$, $u_n = 3 + \dfrac{1}{n+1}$ alors (u_n) est une suite arithmétique

(C) Si pour tout n de $\mathbb{N}$, $u_n = \mathrm{e}^{-n}$ alors (u_n) est une suite géométrique

(D) Si (u_n) est une suite géométrique de raison $-\dfrac{1}{2}$ alors (u_n) converge

(E) Si (u_n) est une suite arithmétique de raison $-\dfrac{1}{2}$ alors (u_n) converge

---

10. Pour toute suite réelle (u_n) on a :

(A) Si (u_n) n'est pas minorée alors elle est majorée

(B) Si (u_n) prend un nombre fini de valeurs alors elle est convergente

(C) Si (u_n) est positive et strictement croissante alors $\lim\limits_{x\to+\infty} u_n = +\infty$

(D) Si (u_n) est bornée alors (u_n) converge

(E) Si (u_n) converge alors (u_n) prend un nombre fini de valeurs

---

11. Pour tout nombre complexe z, Re (z) désignant la partie réelle de z, on a :

(A) $|1+\text{i}z| = |1-\text{i}z| \Rightarrow z$ réel

(B) $|\text{i}+z| = |\text{i}-z| \Rightarrow z$ réel

(C) $|z| = |1-z| \Rightarrow \text{Re}(z) = \dfrac{1}{2}$

(D) $|1-z| = 1 \Rightarrow z = 0$

(E) $|1+z| = |1-z| \Rightarrow \text{Re}(z) = 0$

---

12. Soit $z_1 = 1+\text{i}\sqrt{3}$ et $z_2 = -1+\text{i}\sqrt{3}$.

Alors :

(A) $|z_1| = |z_2|$

(B) $z_2 = \overline{z_1}$

(C) $(z_1+z_2)^2$ est un réel positif

(D) $(z_1-z_2)^2$ est un réel positif

(E) $\arg(z_2) = \dfrac{\pi}{3} + \arg(z_1)$

---

13. Une urne contient les chiffres 1, 2, 3, 4 et 5.

Pour former un nombre de k chiffres, on tire **successivement et avec remise** k chiffres de l'urne. On désigne, par exemple, par $P(112)$ la probabilité d'obtenir le nombre 112.

Alors :

(A) $P(111) = P(123)$

(B) $P(11) < P(123)$

(C) $P(111) = P(1)^3$

(D) $P(1234) = P(1)P(234)$

(E) $P(1234) = P(12)P(34)$

---

14. Une usine fabrique des vis d'un pas de 3 cm de longueur. On note X la variable aléatoire ayant pour valeurs les longueurs des pas possibles exprimées en cm, p_i la probabilité qu'une vis ait un pas de longueur x_i c'est-à-dire $p_i = P(X = x_i)$.

On donne :

x_i	2,8	2,9	3	3,1	3,2
p_i	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{24}$

Alors :

(A) Si on prélève au hasard une vis, $P(X \leqslant 2{,}9) = \dfrac{1}{8}$

(B) Si on prélève au hasard une vis, $P(X \geqslant 3) = \dfrac{7}{8}$

On prélève **successivement et avec remise** 2 vis, la probabilité d'avoir

(C) exactement 2 vis de pas 3 cm est $\dfrac{9}{16}$

(D) aucune vis de pas 3 cm est $\dfrac{7}{16}$

(E) au moins une vis de pas égal à 3 cm est $\dfrac{15}{16}$

---

15. Pour tout $\theta \in \left]0\,;\,\dfrac{\pi}{4}\right[$, on a :

(A) $\cos\left(\dfrac{\pi}{2} + \theta\right) = \sin\theta$

(B) $\sin(\pi + \theta) = -\sin\theta$

(C) $\dfrac{1 + \cos 2\theta}{2} = \sin^2\theta$

(D) $\dfrac{2\tan\theta}{1 - \tan^2\theta} = \sin 2\theta$

(E) $\dfrac{1 - \tan^2\theta}{1 + \tan^2\theta} = \tan 2\theta$

---

16. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 4\sin^2 x - 3$.

Alors :

(A) Il suffit d'étudier f sur $[0\,;\,\pi]$

(B) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x - \pi) = f(x)$

(C) f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout x de $\mathbb{R}$, $f'(x) = -4\sin 2x$

(D) f est décroissante sur $\left[0\,;\,\dfrac{\pi}{2}\right]$

(E) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) \leqslant 1$

RÉPONSES

1	F	V	F	F	F
2	V	V	V	V	V
3	F	F	F	F	F
4	V	V	F	F	F
5	F	F	V	V	F
6	F	V	V	F	V
7	V	F	V	V	V
8	F	V	V	F	V
9	F	F	V	V	F
10	F	F	F	F	F
11	V	V	V	F	V
12	V	F	F	V	V
13	V	F	V	V	V
14	V	V	V	F	V
15	F	V	F	F	F
16	V	V	F	F	V