Activité 1 : aperçu historique

Les mathématiques ne se découvrent (ou ne se créent) que très lentement. Parfois, c'est en cherchant sur un certain type de problèmes que l'on découvre ou crée des mathématiques assez éloignées du problème initial. C'est le cas des nombres complexes.

Ici, le problème initial est la résolution d'équations du troisième degré.

Il faut noter que les résolutions de problèmes du premier degré et du second degré sont connues dès l'Antiquité. Au IX$^{\text{ème}}$ siècle , Al-Khwarizmi, mathématicien travaillant à Bagdad, écrit le *Précis sur le calcul de al-jabr et al-muqabala*, qui peut être considéré comme le traité de base d'algèbre en langue arabe et qui a fortement influencé la science occidentale du Moyen Age. On assiste là à l'acte de naissance de l'algèbre, qui va se développer et devenir une discipline théorique (voir à ce sujet au CDI : *Routes et dédales : une histoire des mathématiques*). Le problème général de la résolution des équations algébriques ne prendra fin qu'au XIX$^{\text{ème}}$ siècle avec Evariste Galois.

Voici la règle proposée par Cardan pour déterminer la solution positive de l'équation

$x^3 + px = q$ $(p > 0\ ;\ q > 0)$ (*Ars Magna* 1545).

Vocabulaire : q est le « nombre de l'équation ».

L'inconnue est « la chose ».

p est le « nombre de la chose ».

Dans la colonne de droite, vous complèterez la traduction avec des notations modernes.

Rappel : $\sqrt[3]{a}$ désigne le nombre, qui, élevé au cube, donne a (exemple : $\sqrt[3]{-8} = -2$).

Le tiers du nombre de la chose au cube étant obtenu, on y ajoute le carré de la moitié du nombre de l'équation et du tout, on extrait la racine carrée que l'on met de côté.	$\left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right)^2$ $\sqrt{\left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right)^2}$
Le demi-nombre que l'on a élevé au carré, tu ajoutes ou tu enlèves à l'autre : tu as le binôme avec son apotome.	
En extrayant la racine cubique de l'apotome et celle de son binôme, le résidu de leurs différences est la valeur de la racine.	

Remarquons :

- Que le symbolisme algébrique à l'époque de Cardan est à l'état embryonnaire ; ainsi, pour écrire $2x^2 - 5x = 23$, Cardan écrit : « Duo quad. $\overline{\text{m}}$ quinque reb. aequalis 23 ».
- Que Cardan ne s'intéresse qu'aux solutions positives.

Exercice 1.

1. Déterminer une solution de l'équation $x^3 + 24x = 56$ en suivant la procédure de Cardan.

2. Vérifier que le nombre trouvé à la question 1 est solution de l'équation.

Après ce type d'équations, Cardan s'intéresse à l'équation $x^3 = px + q$ $(p > 0 \,;\, q > 0)$ pour laquelle il donne une procédure équivalente à la formule :

$$\sqrt[3]{\frac{q}{2} + \sqrt{-\left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right)^2}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{-\left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right)^2}} \; .$$

Cardan énonce l'algorithme de résolution sous forme rhétorique, comme on l'a vu plus haut. Il démontre sa validité par une méthode géométrique.

Exercice 2.

1. Appliquer la formule de Cardan pour résoudre l'équation : $x^3 = 6x + 6$ (en appliquant la procédure pas à pas comme dans l'exercice 1).
2. Etablir le tableau de variations (complet) de la fonction f définie sur R par : $f(x) = x^3 - 6x - 6$. En déduire l'allure de la courbe représentative de cette fonction dans un repère orthonormé, puis déterminer graphiquement le nombre de solutions de l'équation de la question 1.
3. Faire un travail analogue (les deux questions) pour l'équation : $x^3 = 15x + 4$.

Exercice 3 : comment peut-on trouver les formules de Cardan ?

1. Soit un trinôme ax^2+bx+c (avec $a \neq 0$) possédant deux racines. Rappeler l'expression de la somme et du produit des racines en fonction des coefficients du trinôme.
2. S et P sont des nombres donnés. Montrer que : « x et y sont solutions du système $\begin{cases} x + y = S \\ xy = P \end{cases}$ » équivaut à « x et y sont les solutions de l'équation d'inconnue X : $X^2 - SX + P = 0$ ». On pourra démontrer cette équivalence en démontrant deux implications.

Ainsi, on sait trouver deux nombres connaissant leur somme et leur produit. A l'époque de Cardan, une méthode habituelle pour résoudre des problèmes est de se ramener à la recherche de deux nombres connaissant leur somme et leur produit. Pour résoudre l'équation $x^3 = px + q$, une idée possible est de poser $x = a + b$ et de chercher a^3 et b^3.

3. On donne l'identité remarquable :

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a + b) \; .$$

Dans l'équation $x^3 = px + q$, on pose $x = a + b$. Comment choisir le produit ab pour que l'équation se réduise à : $a^3 + b^3 = q$? Ainsi, on est ramené à résoudre le système :

$$\begin{cases} a^3 + b^3 = q \\ ab = \dfrac{p}{3} \end{cases}$$

équivalent au système :

$$\begin{cases} a^3 + b^3 = q \\ a^3b^3 = \dfrac{p^3}{27} \end{cases}$$

4. Résolvez ce dernier système (en utilisant la question 2.) et retrouvez les formules de Cardan.

Activité 2 : l'audace de Bombelli

Bombelli, dans son ouvrage *L'Algebra*, paru en 1572, se penche plus particulièrement sur le cas irréductible de l'équation du troisième degré. A l'occasion de la résolution de l'équation : $x^3 = 15x + 4$ dans *R*, il invente « quelque chose » dont le carré est –1. Il nomme cette chose « plus de moins » (più di meno). Voici un extrait de son livre :

J'ai trouvé une autre sorte de R.c très différente des autres, qui paraît au chapitre sur le cube égal à une quantité et à un nombre quand le cube du tiers de la quantité est plus grand que le carré de la moitié du nombre comme il a été démontré dans ce chapitre. Cette sorte de R.q a pour son algorithme, des opérations différentes des autres et a un nom différent ; car lorsque le cube du tiers de la quantité est plus grand que le carré de la moitié du nombre, l'excès ne peut être appelé ni plus ni moins, mais il peut être appelé plus de moins quand il a été ajouté et quand il a été retranché, il sera appelé moins de moins et cette opération est encore nécessaire pour l'autre R.c dans le chapitre sur la puissance de la puissance accompagnée du cube de la quantité […] où les cas d'égalité faisant apparaître cette sorte de racine carrée sont beaucoup plus importants que les autres. Ceci peut paraître sophistique mais, en réalité j'avais d'abord eu une telle opinion tant que je n'en avais pas trouvé la démonstration au moyen des lignes (comme ceci a été démontré dans la démonstration du chapitre sur les aires planes) et d'abord je traiterai de la multiplication en donnant les règles pour plus et moins :

Più via più di meno fa più di meno
Meno via più di meno fa meno di meno
Più via meno di meno fa meno di meno
Meno via meno di meno fa più di meno
Più di meno via più di meno fa meno
Più di meno via men di meno fa più
Meno di meno via più di meno fa più
Meno di meno via meno di meno fa meno

Par facilité, et commettant ainsi un anachronisme, nous allons appeler cette « chose » *i*. Nous allons calculer avec *i*, comme Bombelli, comme avec n'importe quel autre nombre, en utilisant le fait que $i^2 = -1$.

1°) Recopier et compléter :

$i \times i =$ $\quad i \times (-i) =$ $\quad (-i) \times i =$ $\quad (-i) \times (-i) =$

$i^3 =$ $\quad (1 + i)^2 =$ $\quad (1 - i)^2 =$

$(2 + i)^3 =$ $\quad (-2 + i)^3 =$ $\quad -121 = -(11)^2 = (\ldots)^2$

2°) Reprendre la résolution de l'équation $x^3 = 15x + 4$ et, au moment où vous êtes bloqués par l'extraction de la racine carrée d'un nombre négatif, remplacez cette racine carrée par $11i$ (attention ! on n'utilise **<u>jamais</u>** le symbole √ avec des nombres négatifs).

Quelques exercices de calcul

L'ensemble des nombres complexes est l'ensemble des nombres de la forme $a + bi$, où a ert b sont des nombres réels et $i^2 = -1$.

Définition : $a + bi$ s'appelle « forme algébrique » du nombre complexe.

- Faire les exercices 1, 2, 3, 4, 5 page 190 du livre.
- On appelle j le nombre complexe égal à $-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$. Calculer j^2, $1 + j + j^2$, j^3. Le nombre j a-t-il un inverse ? Si oui, donner sa forme algébrique.
- Calculer (2 + i)(2 – i) ; déterminer le nombre complexe $a + bi$ tel que $(2+i)(a+bi)=1$. Le nombre complexe 2 + i a-t-il un inverse ? Donner sa forme algébrique.
- Calculer $(a + bi)(a - bi)$. Le nombre complexe $a + bi$ a-t-il un inverse ? Si oui, donner sa forme algébrique.

Résultat : si $(a,b) \neq (0 , 0)$, le nombre complexe $z = a + bi$ a un inverse noté $\frac{1}{a+bi}$. Pour connaître la forme algébrique de $\frac{1}{a+bi}$, on multiplie numérateur et dénominateur par le nombre $a – bi$, appelé « nombre conjugué » de $z = a + bi$ et noté $\bar{z}$.

- Faire les exercices 9, 10, 11 page 190 du livre.

Rappel : pour résoudre une équation du premier degré dans *R*, on commence par rassembler, d'une part les termes contenant l'inconnue, d'autre part les termes constants, pour aboutir à une équation de la forme : $ax = b$. Lorsque a est non nul, on multiplie alors chaque membre par l'inverse de a. **La méthode est la même dans l'ensemble des nombres complexes (noté *C*).**

Exemple : résoudre dans *C* l'équation : $(3 + i)z = 2z + 3 – i$.

Pour tout z de *C* :

$$\begin{aligned}(3+i)z = 2z + 3 - i &\Leftrightarrow (3+i)z - 2z = 3 - i \\ &\Leftrightarrow (1+i)z = 3 - i \\ &\Leftrightarrow z = \frac{3-i}{1+i} \\ &\Leftrightarrow z = \frac{(3-i)(1-i)}{(1+i)(1-i)} = \frac{2-4i}{2} = 1 - 2i\end{aligned}$$

6. Faire les exercices 58, 59, 60 page 193 du livre.

Descartes *La Géométrie* 1637 (livre III)

Sachez donc qu'en chaque équation, autant que la quantité inconnue a de dimensions, autant peut il y avoir de diverses racines, c'est-à-dire de valeurs de cette quantité. Car par exemple si on suppose x égal à 2, ou bien $x-2$ égal à rien ; & derechef $x \infty 3$ ou bien $x-3 \infty 0$; en multipliant ces deux équations $x-2 \infty 0$ & $x-3 \infty 0$, l'une par l'autre, on aura $xx-5x+6 \infty 0$ ou bien $xx \infty 5x-6$, qui est une équation en laquelle la quantité x vaut 2 & tout ensemble vaut 3. Que si derechef on fait $x-4 \infty 0$, & qu'on multiplie cette somme par $xx-5x+6 \infty 0$, on aura $x^3-9xx+26x-24 \infty 0$, qui est une autre équation en laquelle x ayant trois dimensions a aussi trois valeurs, qui sont 2, 3, & 4.

Mais souvent il arrive, que quelques-unes de ces racines sont fausses, ou moindres que rien, comme si on suppose que x désigne aussi le défaut d'une quantité, qui soit 5, on a aussi $x+5 \infty 0$, qui étant multipliée par $x^3-9xx+26x-24 \infty 0$ fait $x^4-4x^3-19xx+106x-120 \infty 0$ pour une équation en laquelle il y a quatre racines, à savoir trois vraies qui sont 2, 3, 4 & une fausse qui est 5.

…

Au reste tant les vraies racines que les fausses ne sont pas toujours réelles ; mais quelquefois seulement imaginaires ; c'est-à-dire qu'on peut bien toujours en imaginer autant que j'ai dit en chaque équation ; mais qu'il n'y a quelquefois aucune quantité, qui corresponde à celle qu'on imagine, comme encore qu'on en puisse imaginer trois en celle-ci, $x^3-6xx+13x-10 \infty 0$, il n'y en a toutefois qu'une réelle, qui est 2, & pour les deux autres, quoiqu'on les augmente, ou diminue, ou multiplie en la façon que je viens d'expliquer, on ne aurait les rendre autres qu'imaginaires.

Descartes *La Géométrie* 1637 (livre III)

Sachez donc qu'en chaque équation, autant que la quantité inconnue a de dimensions, autant peut il y avoir de diverses racines, c'est-à-dire de valeurs de cette quantité. Car par exemple si on suppose x égal à 2, ou bien $x-2$ égal à rien ; & derechef $x \infty 3$ ou bien $x-3 \infty 0$; en multipliant ces deux équations $x-2 \infty 0$ & $x-3 \infty 0$, l'une par l'autre, on aura $xx-5x+6 \infty 0$ ou bien $xx \infty 5x-6$, qui est une équation en laquelle la quantité x vaut 2 & tout ensemble vaut 3. Que si derechef on fait $x-4 \infty 0$, & qu'on multiplie cette somme par $xx-5x+6 \infty 0$, on aura $x^3-9xx+26x-24 \infty 0$, qui est une autre équation en laquelle x ayant trois dimensions a aussi trois valeurs, qui sont 2, 3, & 4.

Mais souvent il arrive, que quelques-unes de ces racines sont fausses, ou moindres que rien, comme si on suppose que x désigne aussi le défaut d'une quantité, qui soit 5, on a aussi $x+5 \infty 0$, qui étant multipliée par $x^3-9xx+26x-24 \infty 0$ fait $x^4-4x^3-19xx+106x-120 \infty 0$ pour une équation en laquelle il y a quatre racines, à savoir trois vraies qui sont 2, 3, 4 & une fausse qui est 5.

…

Au reste tant les vraies racines que les fausses ne sont pas toujours réelles ; mais quelquefois seulement imaginaires ; c'est-à-dire qu'on peut bien toujours en imaginer autant que j'ai dit en chaque équation ; mais qu'il n'y a quelquefois aucune quantité, qui corresponde à celle qu'on imagine, comme encore qu'on en puisse imaginer trois en celle-ci, $x^3-6xx+13x-10 \infty 0$, il n'y en a toutefois qu'une réelle, qui est 2, & pour les deux autres, quoiqu'on les augmente, ou diminue, ou multiplie en la façon que je viens d'expliquer, on ne aurait les rendre autres qu'imaginaires.

On cherche à déterminer le nombre de solutions dans R de l'équation $x^3 - 6x^2 + 13x - 10 = 0$.

I. Méthode par étude de fonction.

On définit la fonction f sur R par $f(x) = x^3 - 6x^2 + 13x - 10$.

1. Etudier les variations de la fonction f.
2. Vérifier que $f(2) = 0$, puis déduire de la première question le signe de $f(x)$ sur R.
3. Justifier que l'équation $x^3 - 6x^2 + 13x - 10 = 0$ a une unique solution réelle.

II. Méthode algébrique.

1. Déterminer les réels a, b et c tels que, pour tout x réel, on a : $x^3 - 6x^2 + 13x - 10 = (x-2)(ax + bx^2 + c)$.
2. Résoudre dans R l'équation $x^3 - 6x^2 + 13x - 10 = 0$.

On cherche à déterminer le nombre de solutions dans R de l'équation $x^3 - 6x^2 + 13x - 10 = 0$.

I. Méthode par étude de fonction.

On définit la fonction f sur R par $f(x) = x^3 - 6x^2 + 13x - 10$.

1. Etudier les variations de la fonction f.
2. Vérifier que $f(2) = 0$, puis déduire de la première question le signe de $f(x)$ sur R.
3. Justifier que l'équation $x^3 - 6x^2 + 13x - 10 = 0$ a une unique solution réelle.

II. Méthode algébrique.

1. Déterminer les réels a, b et c tels que, pour tout x réel, on a : $x^3 - 6x^2 + 13x - 10 = (x-2)(ax + bx^2 + c)$.
2. Résoudre dans R l'équation $x^3 - 6x^2 + 13x - 10 = 0$.

On cherche à déterminer le nombre de solutions dans R de l'équation $x^3 - 6x^2 + 13x - 10 = 0$.

I. Méthode par étude de fonction.

On définit la fonction f sur R par $f(x) = x^3 - 6x^2 + 13x - 10$.

1. Etudier les variations de la fonction f.
2. Vérifier que $f(2) = 0$, puis déduire de la première question le signe de $f(x)$ sur R.
3. Justifier que l'équation $x^3 - 6x^2 + 13x - 10 = 0$ a une unique solution réelle.

II. Méthode algébrique.

1. Déterminer les réels a, b et c tels que, pour tout x réel, on a : $x^3 - 6x^2 + 13x - 10 = (x-2)(ax + bx^2 + c)$.
2. Résoudre dans R l'équation $x^3 - 6x^2 + 13x - 10 = 0$.

ESSAI
SUR
UNE MANIERE DE REPRESENTER
LES QUANTITES IMAGINAIRES
DANS LES CONSTRUCTIONS GEOMETRIQUES,

PAR R. ARGAND.

2[e] EDITION PRÉCÉDÉE D'UNE PRÉFACE PAR M.J. HOUEL
ET SUIVIE D'UNE APPENDICE CONTENANT
DES EXTRAITS DES ANNALES DE GERGONNE
RELATIFS À LA QUESTION DES IMAGINAIRES.

PARIS, 1874.

1. Soit a une grandeur prise à volonté. Si à cette grandeur on en ajoute une seconde qui lui soit égale, pour ne former qu'un seul tout, on aura une nouvelle grandeur qui sera exprimée par $2a$. Faisant sur cette dernière grandeur une pareille opération, le résultat sera exprimé par $3a$, et ainsi de suite. On obtiendra ainsi une suite de grandeurs

$$a,\ 2a,\ 3a,\ 4a,\ \ldots,$$

dont chaque terme naît du précédent, par une opération qui est la même pour tous les termes, et qui peut être répétée indéfiniment.

Considérons cette même suite à rebours, savoir :

$$\ldots,\ 4a,\ 3a,\ 2a,\ a.$$

On peut encore concevoir, dans cette nouvelle suite, chaque terme comme déduit du précédent, par une opération inverse de celle qui sert à la formation de la première suite ; mais il existe une différence notable entre les deux suites : la première peut être poussée aussi loin qu'on voudra ; il n'en est pas de même de la seconde. Après le terme a, on trouvera le terme 0 ; mais, pour aller plus loin, il faut que la nature de la grandeur a soit telle, qu'on puisse opérer à l'égard de 0 comme on l'a fait à l'égard des termes ..., $4a$, $3a$, $2a$, a. Or c'est ce qui n'est pas toujours possible.

Si a, par exemple, désigne un poids matériel, comme le *gramme*, la suite des quantités ..., $4a$, $3a$, $2a$, a, 0 ne peut être continuée au delà de 0 ; car on ôte bien 1 gramme de 3, de 2 ou de 1 gramme, mais on ne saurait l'ôter de 0. Ainsi les termes qui devraient suivre 0 ne peuvent avoir d'existence que dans l'imagination ; ils peuvent, par cela même, être appelés *imaginaires*.

Mais, au lieu d'une suite de poids matériels, considérons les divers degrés de pesanteur qui agissent sur le bassin A d'une balance qui contient des poids dans ses deux bassins, et supposons, pour donner plus d'appui à nos idées, que les mouvements des bras de cette balance soient proportionnels aux poids ajoutés ou retranchés, effet qui aurait lieu, par exemple, au moyen d'un ressort adapté à l'axe. Si l'addition du poids n dans le bassin A fait varier de la quantité n' l'extrémité du bras A, l'addition des poids $2n$, $3n$, $4n$, ... occasionnera, sur cette même extrémité, des variations $2n'$, $3n'$, $4n'$, ..., et ces variations pourront être prises pour mesure de la pesanteur agissant sur le bassin A : cette pesanteur est 0 pour le cas d'égalité entre les deux bassins. On pourra, en ajoutant dans le bassin A des poids n, $2n$, $3n$, ..., obtenir les pesanteurs n', $2n'$, $3n'$, ..., ou, en partant de la pesanteur $3n'$, obtenir, en retranchant des poids, les pesanteurs $2n'$, n', 0. Mais ces divers degrés peuvent être produits non-seulement en enlevant des poids au bassin A, mais aussi en en ajoutant au bassin B. Or l'addition de poids sur le bassin B peut être répétée indéfiniment ; ainsi, en la continuant, on formera de nouveaux degrés de pesanteur exprimés par $-n'$, $-2n'$, $-3n'$, ..., et ces termes, appelés *négatifs*, exprimeront des quantités aussi réelles que les termes positifs. On voit donc aussi que, si deux termes, de signes différents, ont le même nombre pour coefficient, comme $3n'$, $-3n'$, ils exprimeront deux états du levier tels, que l'extrémité qui marque les degrés de pesanteur sera, dans l'un et dans l'autre, également éloignée du point 0. On peut considérer cet éloignement en faisant abstraction du *sens* dans lequel il a lieu, et lui donner alors le nom d'*absolu*.

Considérons encore dans une autre espèce de grandeurs la génération des quantités négatives. Si, pour compter une somme d'argent, on adopte pour unité le *franc* matériel, on pourra opérer des diminutions successives sur cette somme, et la réduire à zéro par la soustraction d'un certain nombre de francs. Arrivé à ce terme, on voit que la soustraction cesse d'être praticable, et que, par conséquent, −1 franc, −2 francs,... sont des quantités imaginaires.

Prenons maintenant le franc de compte pour unité, à dessein d'évaluer la fortune d'un individu, laquelle se compose de valeurs actives et de valeurs passives. Ce que nous appelons *diminution* dans cette fortune pourra avoir lieu soit par le retranchement d'un nombre de francs à l'actif, soit par l'addition d'un nombre de francs au passif, et, en poussant à un certain terme cette diminution par l'un de ces deux moyens, on parviendra à une fortune négative, telle que −100 francs, −200 francs...Ces expressions signifieront que le nombre de francs des valeurs passives, considéré abstraitement, est plus grand de 100, de 200,... que celui des valeurs actives. Ainsi −100 francs, −200 francs,..., qui n'exprimaient dans le premier cas que des quantités imaginaires, représentent ici des quantités aussi réelles que celles que désignent les expressions positives.

2. Ces notions sont très-élémentaires ; néanmoins il n'est pas si aisé qu'il pourrait le paraître d'abord de les établir d'une manière bien lumineuse, et d'y donner cette généralité que demande leur application aux calculs. On ne peut d'ailleurs douter de la difficulté du sujet, si l'on réfléchit que les sciences exactes avaient été cultivées pendant un grand nombre de siècles, et qu'elles avaient fait de très-grands progrès avant qu'on eût acquis les véritables notions des quantités négatives, et qu'on eût conçu la manière générale de les employer.

Au reste, on ne s'est nullement proposé de donner ici des principes plus rigoureux ou plus évidents que ceux qu'on trouve dans les Ouvrages qui traitent ce sujet ; on a eu simplement pour but de faire deux remarques sur les quantités négatives. La première est que, selon l'espèce de grandeurs à laquelle on applique la numération, la quantité négative est réelle ou imaginaire[(*)] [1] ; la seconde est que, deux quantités d'une espèce susceptible de fournir des valeurs négatives étant comparées entre elles, l'idée de leur rapport est complexe. Elle comprend : 1° l'idée du rapport numérique dépendant de leurs grandeurs respectives considérées *absolument* ; 2° l'idée du rapport des *directions* ou *sens* auxquels elles appartiennent, rapport qui en est l'identité ou l'opposition.

3. Maintenant, si, faisant abstraction du rapport des grandeurs absolues, on considère les différents cas que peut présenter le rapport des directions, on trouvera qu'ils se réduisent à ceux qu'offrent les deux proportions suivantes :

[(*)] Le sens dans lequel on prend ces mots est suffisamment déterminé par ce qui précède : l'extension qu'on donne ici à leur signification ordinaire paraît permise, et d'ailleurs n'est pas absolument nouvelle. Ce qu'on appelle, en Optique, foyer imaginaire, par opposition au foyer réel, est le point de rencontre de rayons qui n'ont pas une existence physique, et qui peuvent, en quelque sorte, être considérés comme des rayons négatifs.

[1] Les notes signalées par des étoiles font partie du texte d'Argand.

$$+1:+1::-1:-1,$$
$$+1:-1::-1:+1.$$

L’inspection de ces proportions et de celles qu’on formerait par le renversement des termes montre que les termes moyens sont de signes semblables ou différents, suivant que les extrêmes sont eux-mêmes de signes semblables ou différents.

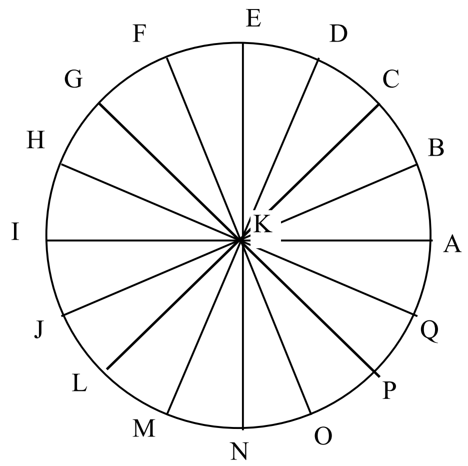
Qu’on se propose actuellement de déterminer la moyenne proportionnelle géométrique entre deux quantités de signes différents, c’est-à-dire la quantité x qui satisfait à la proportion

$$+1:+x::+x:-1.$$

On est arrêté ici comme on l’a été en voulant continuer au delà de 0 la progression arithmétique décroissante, car on ne peut égaler x à aucun nombre positif ou négatif ; mais, puisqu’on a trouvé plus haut que la quantité négative, imaginaire lorsque la numération était appliquée à de certaines espèces de grandeurs, devenait réelle lorsque l’on combinait d’une certaine manière l’idée de *grandeur absolue* avec l’idée de *direction,* ne serait-il pas possible d’obtenir le même succès relativement à la quantité dont il s’agit, quantité réputée imaginaire par l’impossibilité où l’on est de lui assigner une place dans l’échelle des quantités positives ou négatives?

En y réfléchissant, il a paru qu’on parviendrait à ce but si l’on pouvait trouver un genre de grandeurs auquel pût s’allier l’idée de direction, de manière que, étant adoptées deux directions opposées, l’une pour les valeurs positives, l’autre pour les valeurs négatives, il en existât une troisième telle, que la direction positive fût à celle dont il s’agit comme celle-ci est à la direction négative.

Fig. I



4. Or, si l’on prend un point fixe K (*fig.* I) et qu’on adopte pour unité positive la ligne KA considérée comme ayant sa direction de K en A, ce qu’on pourra désigner par $\overline{KA}$, pour distinguer cette quantité de la ligne KA dans laquelle on ne considère ici que la grandeur absolue, l’unité négative sera $\overline{KI}$, le trait supérieur ayant la même destination que celui qui est placé sur $\overline{KA}$, et la condition à laquelle il s’agit de satisfaire sera remplie par la ligne KE, perpendiculaire aux précédentes et considérée comme ayant sa direction de K en E, et qu’on exprimera également par $\overline{KE}$. En effet, la direction de $\overline{KA}$ est, à l’égard de la direction de $\overline{KE}$, ce que cette dernière est à l’égard de la direction de $\overline{KI}$. De plus, on voit que cette même condition est aussi bien remplie par $\overline{KN}$ que par $\overline{KE}$, ces deux dernières quantités étant entre elles comme +1 et −1, ainsi que cela doit être. Elles sont donc ce qu’on exprime ordinairement par $+\sqrt{-1}$, $-\sqrt{-1}$.

5. [...]

6. En conséquence de ces réflexions, on pourra généraliser le sens des expressions de la forme $\overline{AB}$, $\overline{CD}$, $\overline{KP}$,..., et toute expression pareille désignera, par la suite, une ligne d'une certaine longueur, parallèle à une certaine direction, prise dans un sens déterminé entre les deux sens opposés que présente cette direction, et dont l'origine est à un point quelconque, ces lignes pouvant elles-mêmes être l'expression de grandeurs d'une autre espèce.

Comme elles doivent être le sujet des recherches qui vont suivre, il est à propos de leur appliquer une dénomination particulière. On les appellera *lignes en direction* ou, plus simplement, *lignes dirigées*. Elles seront ainsi distinguées des lignes *absolues*, dans lesquelles on ne considère que la longueur, sans aucun égard à la direction(*).

(*) L'expression de *lignes en direction* n'est qu'une abréviation de cette phrase : *lignes considérées comme appartenant à une certaine direction.* Cette remarque indique qu'on ne prétend pas fonder de nouvelles dénominations, mais qu'on emploie cette façon de s'exprimer soit pour éviter la confusion, soit pour abréger le discours.