Concours Accès 2011

MATHÉMATIQUES

durée de l'épreuve : 3 h

Exercices n° 1 à 6 : Raisonnement logique

1. Un fleuriste a en stock 1 000 fleurs réparties en trois variétés (roses, tulipes et marguerites) et trois couleurs (blanc, rouge et jaune). Il y a autant de fleurs rouges que de fleurs jaunes. Un quart des fleurs blanches sont des roses et 30 % des fleurs blanches sont des tulipes. Il y a 180 marguerites blanches parmi les 500 marguerites.

20 % des roses sont rouges et sont au nombre de 60. On dénombre le même nombre de tulipes rouges que de tulipes jaunes.

À partir de ces informations, on peut conclure que :

A. Il y a 400 fleurs rouges.

B. Il y a autant de marguerites jaunes que de tulipes blanches.

C. Il y a 300 roses.

D. Le nombre de fleurs jaunes est inférieur au nombre de fleurs blanches.

2. Antoine et Bernard jouent à un jeu de dés. Le jeu consiste, à tour de rôle, à lancer un dé parfaitement équilibré à 6 faces différentes (portant les numéros 1, 2, 3, 4, 5 et 6) et à noter le chiffre obtenu sur une feuille de papier, au fur et à mesure que la partie continue.

Préalablement, ils ont décidé de former 3 groupes de chiffres : le groupe A constitué des chiffres 1 et 2, le groupe B constitué des chiffres 3 et 4, et le groupe C constitué des chiffres 5 et 6.

La partie s'arrête dès qu'on arrive à l'une des 2 situations suivantes :

— on a noté sur la feuille de papier un chiffre du groupe A, un chiffre du groupe B et un chiffre du groupe **C.** Dans ce cas précis c'est Antoine qui est déclaré gagnant ;

— on a noté sur la feuille de papier 3 chiffres d'un même groupe. Dans ce cas précis c'est Bernard qui est le gagnant.

À partir de ces informations, on peut conclure que :

A. Une même partie comporte au minimum 4 lancers.

B. Une même partie comporte au maximum 5 lancers.

C. La probabilité que la partie se poursuive au delà du 3^{e} lancer est égale à 1/9.

D. Une même partie peut ne pas s'arrêter.

3. Dans une entreprise de n salariés, un test est réalisé sur la dextérité de la main-d'oeuvre, sur une période de x heures. Chaque femme produit en moyenne 30 pièces par heure. D'autre part, les hommes deux fois plus nombreux que les femmes, ont réalisé y pièces au total.

À partir de ces informations, on peut conclure que :

A. Le nombre total de pièces réalisées par les femmes est égal à $30x$.

B. En moyenne, chaque salarié a produit : $\dfrac{y+10nx}{n}$ pièces sur cette période.

C. Le rendement horaire moyen des hommes est égal à $\dfrac{3y}{2n}$.

D. Si les rendements moyens des hommes et femmes sont égaux et de 30 pièces par heure et si 4 500 pièces au total sont produites en 30 minutes, les femmes sont au nombre de 100.

4. Deux automobilistes Jean et Luc, partent respectivement, à la même heure, de deux villes reliées par une route nationale. Ils doivent se rencontrer pour échanger une mallette. Jean roule à la vitesse moyenne de x km/h et Luc, 10 km/h moins vite. Ils se rencontrent au bout d'une heure.

   À partir de ces informations, on peut conclure que :

   A. Si les 2 villes sont séparées de 110 km alors Luc roulait à 50 km/h.

   B. La distance qui sépare les 2 villes est de $(2x+10)$ km.

   C. Si Jean roule à 50 km/h alors il parcourra $\dfrac{5}{9}$ de la distance entre les 2 villes.

   D. Si Jean pouvait rouler 2 fois plus vite et Luc 10 km/h moins vite que lui alors ils mettraient 2 fois moins de temps pour se retrouver.

5. Pour un âge donné (moins de 100 ans) : on note x le chiffre des dizaines, y le chiffre des unités et $(x-y)$ la différence des deux chiffres de l'âge.

   Un mari affirme que si on additionne son âge, le produit des deux chiffres de son âge, la somme des 2 chiffres de son âge et la différence des deux chiffres de son âge, il obtient le nombre 100.

   Il ajoute que c'est aussi le cas de l'âge de son épouse, qui est par ailleurs plus jeune que lui.

   Une voisine du couple affirme que si on enlève la différence des deux chiffres à la somme composée de son âge, du produit des deux chiffres de son âge et de leur somme elle trouve également le nombre 100.

   À partir de ces informations, on peut conclure que :

   A. Concernant l'âge du mari, on a $(x+1)(y+12)-12=100$

   B. Concernant l'âge de la voisine, on a $(x+3)(y+10)-30=100$.

   C. Le mari est âgé de 72 ans.

   D. On ne peut pas connaître l'âge de l'épouse.

6. Une liasse de billets de banque vient d'être dérobée par l'un des 4 membres du personnel d'une agence de banque, présents le jour du vol. Le directeur de cette agence interroge les 4 membres du service soupçonnés du vol : Antoine, Bernard, Christine et Dominique. Dominique accuse Bernard. Bernard accuse Christine. Antoine dit être innocent. Christine affirme que Bernard est un menteur.

   À partir de ces informations, on peut conclure que :

   A. Il y a au moins un menteur parmi les 4 membres soupçonnés.

   B. Si on sait qu'il n'y a qu'un seul menteur alors le voleur est Bernard.

   C. Si on sait qu'il y a 3 menteurs alors le voleur est Antoine.

   D. Si on connaît le nombre de menteurs on peut donner le nom du voleur.

Exercices n° 7 à 18 : Mathématiques

7. On considère les fonctions f et g définies pour tout x réel par $f(x)=4^x$ et $g(x)=(0,25)^x$ et l'on note f' et g' leurs dérivées respectives.

   A. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.

   B. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} g(x)=+\infty$.

   C. Pour tout réel x, $g(x)-f(-x)=0$.

   D. Pour tout réel x, $g'(x)-f'(-x)=0$.

8. On considère les fonctions f et g définies pour tout x réel par $f(x) = 2\sqrt{1+x^2}$ et $g(x) = \ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right) + x\sqrt{1+x^2}$.

A. La fonction g est impaire.

B. La fonction f est croissante.

C. La fonction g est une primitive de la fonction f.

D. La courbe représentative de f admet un centre de symétrie.

9. Pour toute fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vérifiant $\lim\limits_{x\to 2}(x) = 5$, on a :

A. $\lim\limits_{u\to -2} f(-u) = 5$.

B. $\lim\limits_{x\to 0} f(2-x) = -5$.

C. $\lim\limits_{t\to 2} f\left(\dfrac{t}{2}\right) = \dfrac{5}{2}$.

D. $\lim\limits_{z\to +\infty} f\left(2+\dfrac{1}{z}\right) = 5$.

10. On considère la fonction f définie sur l'intervalle $I =]-2\,;\,2[$ par $f(x) = \dfrac{1+x}{2+x}$, (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé et (D) la droite d'équation $y = x$, ainsi que la suite (u_n) définie par $u_0 = -1$ et la relation de récurrence $u_{n+1} = \dfrac{1+u_n}{2+u_n}$.

A. L'équation $x^2 + x - 1 = 0$ a au moins une solution dans l'intervalle I.

B. La droite (D) et la courbe (C) ont au moins un point commun.

C. La suite (u_n) est majorée par 1.

D. La suite (u_n) est croissante.

11. On considère le système (S) constitué de deux équations où x et y sont deux inconnues réelles et m un réel donné :

$$(S)\left\{\begin{array}{lcl} 4x^2+9y^2 & = & 36 \\ mx+y & = & 3 \end{array}\right.$$

A. Le système (S) admet au moins une solution quel que soit le réel m.

B. Si $m = \dfrac{\sqrt{5}}{3}$ alors le système (S) admet comme solution le couple $\left(\sqrt{5}\,;\,\dfrac{4}{3}\right)$.

C. Si $m = 1$, le système (S) admet deux solutions distinctes.

D. Le système (S) admet une solution unique pour deux valeurs de m.

12. L'unité étant le centimètre, on considère un demi-cercle X de diamètre [BC], A et D deux points de X tels que BC = 5, AB = 3, DC = 3. Les droites (AB) et (CD) sont sécantes en I. Dans le triangle ABC, H est le pied de la hauteur issue de A.

A. Les triangles ABC et DBC ont la même aire.

B. La longueur AH vaut $\dfrac{12}{5}$.

C. Le rapport $\dfrac{\text{CH}}{\text{BH}}$ vaut $\dfrac{1}{9}$.

D. Le triangle IBC est équilatéral.

13. Dans une urne, il y a trois boules indiscernables au toucher de couleurs différentes (bleue, blanche et rouge).

On tire une boule, on note sa couleur, on la remet et on recommence le tirage ; on tire donc cinq boules en tout avec remise,

A. La probabilité que la première et la dernière boule tirée soient de même couleur est $\dfrac{1}{3}$.

B. La probabilité d'avoir un tirage unicolore est $\dfrac{45}{243}$.

C. La probabilité d'avoir un tirage bicolore est $\dfrac{90}{243}$.

D. La probabilité d'avoir un tirage tricolore est $\dfrac{108}{243}$.

14. Soient a et b deux réels et $f_{a,\ b}$ la fonction définie par $f_{a,\ b} = \dfrac{ax^2-4}{x+b}$.

Pour tout $x \in \mathbb{R} - \{-b\}$, on note $C_{a,\ b}$ la courbe représentative de $f_{a,\ b}$ dans un repère orthonormé.

A. Il existe au moins une valeur de a telle que $C_{a,\ b}$ admette une asymptote horizontale.

B. Il existe au moins une valeur de a non nulle telle que $C_{a,\ b}$ admette une asymptote oblique.

C. Pour $(a,\ b) = (1,\ 1)$, $C_{a,\ b}$ est au-dessus de son asymptote quand tend x vers $+\infty$.

D. Pour toutes les valeurs de $(a,\ b)$, $C_{a,\ b}$, admet une asymptote verticale.

15. Soit $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $U_n = \dfrac{(-1)^n}{(-1)^n + \sqrt{n+1}}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

A. $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite bornée.

C. $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

D. La suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'admet pas de limite.

16. Un sac contient n boules parmi lesquelles 4 blanches, les autres étant rouges ($n \geqslant 6$). On tire successivement 2 boules du sac, sans remettre la première avant de tirer la seconde.

A. La probabilité de l'évènement « Les 2 boules tirées sont rouges » est de $\dfrac{n^2-9n+20}{n(n-1)}$.

B. La probabilité de l'évènement « La première boule tirée est blanche, la deuxième est rouge » est de $\dfrac{4n-16}{n^2}$.

C. La probabilité de l'évènement « Les 2 boules tirées sont de la même couleur » est de $\dfrac{n^2-9n+32}{n(n+1)}$.

D. La probabilité de l'évènement « La première boule tirée est rouge, la deuxième est blanche » est identique à celle de l'évènement « La première boule tirée est blanche, la deuxième est rouge ».

17. Soit $(U_n)_{n>0}$ la suite définie par : $U_n = \dfrac{n+(-1)^n\sqrt{n}}{2n+3}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

A. La suite $(U_n)_{n>0}$ converge.

B. La suite $(U_n)_{n>0}$ est positive ou nulle.

C. La suite $(U_n)_{n>0}$ est bornée.

D. La suite $(U_n)_{n>0}$ est croissante.

18. On jette deux dés cubiques normaux et non truqués, l'un blanc, l'autre vert, Les faces de chacun des dés sont numérotées de 1 à 6, On note a la face apparente du dé blanc, et b celle du dé vert,

Soit E l'équation du second degré dans $\mathbb{R}$:

$$x^2 - 2ax + b^2 = 0.$$

Alors :

A. La probabilité que E ait une racine double est $\dfrac{1}{6}$.

B. La probabilité que E n'ait aucune racine réelle est égale à la probabilité que E ait deux racines réelles distinctes.

C. Si E a deux racines réelles distinctes, la probabilité qu'elles soient de même signe est $\frac{1}{2}$.

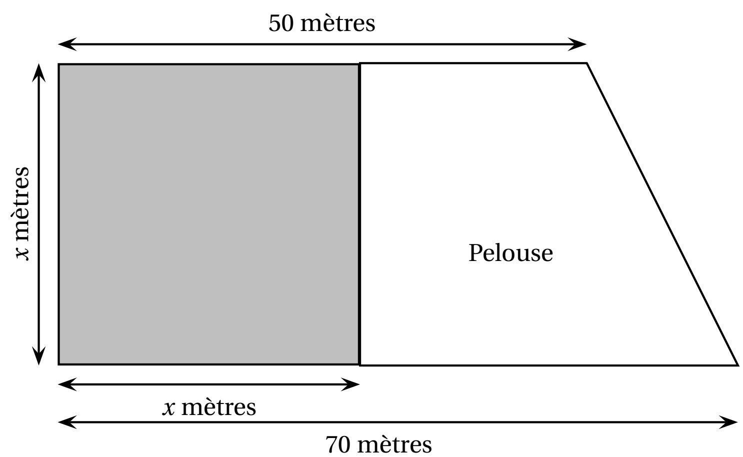
D. Si E a deux racines réelles distinctes, la probabilité que l'une soit égale à 1 est $\frac{1}{3}$.

Exercices n° 19 à 24 : Problème mathématique

ATTENTION !
Certaines questions peuvent être traitées indépendamment. D'autres nécessitent les résultats obtenus dans les questions précédentes

La figure ci-dessous (qui n'est pas à l'échelle) est une représentation d'une parcelle de terrain (notée P_1) que Monsieur Potiron souhaite partager en deux parties :

- une partie en jardin potager (surface grisée) formant un carré de x mètres de côté avec $0 < x < 50$ mètres,
- l'autre partie en pelouse



On notera :

- S : aire totale de la parcelle de terrain
- J : aire jardin potager
- P : aire de la pelouse

19. À partir des informations précédentes, on peut conclure que :

A. $S \leqslant 3\,000$ m^2.

B. Il existe une valeur de x inférieure à 35 telle que $J = P$.

C. La surface de la pelouse est maximale lorsque $x = 25$ mètres,

D. Le périmètre de cette parcelle de terrain est égal à : $x + \left(x^2 + 400\right)^{0,5} + 120$.

20. Dans cette question, on suppose que $x = 21$ mètres, Monsieur Potiron souhaite délimiter la pelouse avec une clôture en bois dont le prix du mètre est de 30 euros après une remise de 20 % sur le prix initial. Sur le métrage dépassant 100 mètres, un rabais supplémentaire de 30 % est accordé,

À partir des informations précédentes, on peut conclure que :

A. Le prix initial d'un mètre de clôture en bois est 36 €.

B. Monsieur Potiron doit acheter moins de 120 mètres de clôture.

C. Le montant réglé par Monsieur Potiron est égal à 3 588 €.

D. Le prix de revient moyen d'un mètre de clôture est égal à 25,50 €.

21. Monsieur Potiron envisage de produire des fruits ou des légumes sur cette parcelle, On nous précise que pour 220 euros, Monsieur Potiron pourrait obtenir 50 plants d'un légume et 40 pieds d'un fruit alors que pour 230 euros, il aurait 25 plants de ce légume et 60 pieds de ce fruit.

On appelle x_1 le prix d'un plant de légume et x_2 le prix d'un pied de fruit.

Supposons que Monsieur Potiron choisisse de cultiver des fruits.

- Le coût total exprimé en euros pour y kg de fruits ($y > 0$) produits en une journée est :

$$C(y) = 0,25y^2 + y + 30.$$

- Le coût moyen unitaire, exprimé en euros par kg, est noté $C_M(y)$:

$$C_M(y) = \frac{C(y)}{y}.$$

Chaque kg de fruit peut être vendu 7,50 €.

À partir des informations précédentes, on peut conclure que :

A. $x_2 = x_1 + 1$.

B. $x_1 = 3$ euros.

C. Si $y = 10$, Monsieur Potiron réalisera un bénéfice de 10 € sur la journée.

D. Si $y = 9$, le coût moyen unitaire est minimum.

22. Dans cette question on suppose que la surface du potager est égal au double de celle de la pelouse.

Monsieur Potiron décide finalement de produire des tomates sur le quart de la surface du potager et des laitues sur la partie restante.

Les rendements moyens par ha (un hectare est égal à 10 000 m^2) et par année sont respectivement de 20 tonnes pour les tomates et 4 000 pieds pour les laitues.

D'autre part, les travaux d'aménagement du sol, de semence et de récolte demandent l'emploi de 10 hommes par jour et par hectare pour les tomates et de 20 hommes par jour et par hectare pour la laitue.

À partir de ces informations, on peut en conclure que :

A. La surface du potager est égale ou supérieure à 0,15 ha.

B. La production annuelle de tomates est égale à 200 kg.

C. Le nombre annuel de pieds de laitues est inférieur à 500.

D. L'emploi de deux hommes est suffisant pour réaliser les travaux.

23. Monsieur Potiron s'est livré à une étude statistique sur trois autres parcelles.

Sur une parcelle (notée P$_2$), il a mesuré la hauteur en cm de 100 plantes à l'âge de 6 semaines et a obtenu une moyenne égale à 56 cm (notée m_2) à partir des données suivantes, où a est un nombre réel tel que $0 < a < 60$.

Hauteur	Nombre plantes concernées
$[0 ; a[$	10
$[a ; 60[$	60
$[60 ; 100[$	30

Sur les deux autres parcelles (P$_3$ et P$_4$), on dispose des effectifs observés :

	Nombre plantes	Hauteur moyenne
P$_3$	60	m_3
P$_4$	40	m_4

On sait que les trois moyennes m_2, m_3, et m_4 sont trois valeurs variant en progression arithmétique dont la somme est égale à 144.

On appelle M la hauteur moyenne de l'ensemble des plantes présentes dans les trois parcelles P_2, P_3 et P_4.

À partir de ces informations, on peut en conclure que :

A. $a = 30$.

B. Si la répartition des hauteurs dans chaque classe est uniforme, 75 % des plantes de la parcelle P_2 ont une hauteur au moins égale à 45 cm.

C. $m_3 = 64$.

D. $M = 48$.

24. Monsieur Potiron a également expérimenté les effets d'un produit anti-mildiou sur la vigne qu'il cultive.

Quarante pieds de vigne situés dans des lieux aléatoires ont été traités alors que soixante autres n'ont pas reçu de traitement.

Quelques semaines plus tard, les résultats observés en termes de contamination par la maladie sont les suivants :

- 25 % des pieds traités sont contaminés ;
- 40 % des pieds sont contaminés.

À partir de ces informations, on peut en conclure que :

A. 55 % des pieds non traités sont contaminés.

B. 50 % des pieds contaminés n'ont pas été traités.

C. 10 % des pieds étudiés ont été contaminés et traités.

D. 70 pieds ont été traités ou n'ont pas été contaminés.