



APMEP

ASSOCIATION DES PROFESSEURS DE MATHEMATIQUES DE L'ENSEIGNEMENT PUBLIC

À la pêche aux approximations de π

atelier animé par :

André BONNET

ex-Maître de Conférence à l'Université de Provence

ex-formateur PCL 1 à l'IUFM d'Aix-Marseille

ΑΡΧΙΜΗΔΟΥΣ

ΤΟΥ ΣΥΡΑΚΟΥΣΙΟΥ, ΤΑ ΜΕΧΡΙ

νυν σωζόμενα, πάντα.

À la pêche aux approximations de π

Atelier animé par ANDRÉ BONNET

à la journée de la régionale APMEP d'Aix-Marseille le 1^{er} avril 2006

à l'IUFM Marseille-Canebière.



Après avoir donné plusieurs définitions de π , on en cherchera, de façon expérimentale, des approximations décimales et fractionnaires.

On montrera que, parmi ces dernières, $22/7$ est la meilleure... et on remarquera qu'il s'agit d'une réduite du développement en fraction continue de π .

On terminera avec un bref historique... notamment une étude, un peu approfondie, de la contribution d'Archimède.

Le titre en grec classique :

ΑΡΧΙΜΗΔΟΥΣ του ΣΥΡΑΚΟΥΣΙΟΥ, τα μέχρι νυν σωζόμενα, πάντα.

La traduction du titre :

Les travaux d'ARCHIMEDE de SYRACUSE, conservés jusqu'à nos jours, sans exception.

Raphaël - L'école d'Athènes (extrait:
Archimède tenant le compas)

Quelle, quelles définition(s) pour π ?

- Définition 1 :

Le nombre π est le rapport entre le périmètre d'un cercle et son diamètre.

- Définition 2 :

Le nombre π est le rapport entre l'aire d'un disque et l'aire d'un carré dont le côté est égal au rayon du disque.

- La définition 1 est, étymologiquement, la plus logique car π est la première lettre de περιμετρος (périmètre) ou de περιφερεια (circonférence - périphérie).

- Il faudrait démontrer l'équivalence des deux définitions! Nous le ferons en reprenant la méthode d'Archimède.

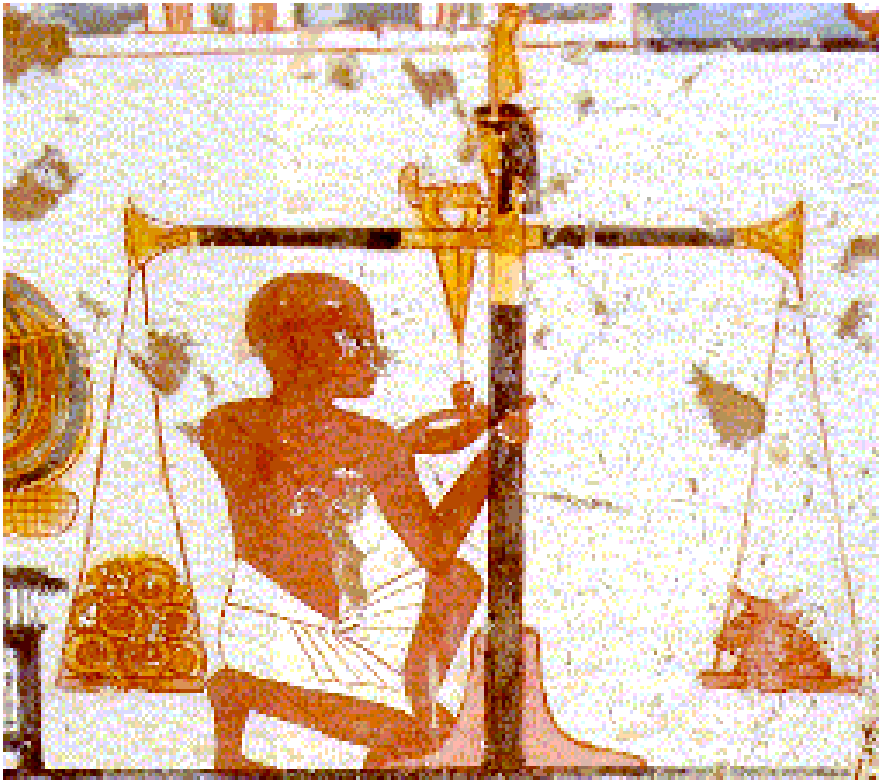
- *Pour l'instant notons σ le rapport de la définition 2.*

- *L'utilisation du symbole π remonte au début du XVIIème siècle, mais c'est Euler qui imposera définitivement l'usage de la lettre π par son « introduction à l'analyse infinitésimale » en 1748.*

L'approche classique : elle correspond à la première définition.

- On entoure un disque d'un fil inextensible et on mesure la longueur du fil une fois tendu.
- Pour améliorer la précision du procédé, on peut entourer le disque de deux ou plusieurs tours.
- On réalise plusieurs mesures avec des disques de différents rayons.
- On constate que le rapport entre la longueur du fil et le diamètre du disque est à peu près constant.
- On obtient assez facilement deux décimales.

Approximation de σ à l'aide d'une balance



- On commence avec un disque, sur l'un des plateaux
- On recherche, avec des carreaux, le meilleur équilibre
- On continue avec deux disques
- Puis trois
- Puis quatre
- Cinq
- Six
- Sept ...

Bilan de l'expérience

■	3 C < ^{3g} D < 4 C ;	$3 < \sigma < 3 + 1$;	- 0.14	1
■	6 C < ^{7g} 2D < 7 C ;	$3 < \sigma < 3 + 1/2$;	- 0.14	0.86
■	9 C < ^{10g} 3D < 10 C ;	$3 < \sigma < 3 + 1/3$;	- 0.14	0.36
■	12 C < ^{15g} 4D < 13 C ;	$3 < \sigma < 3 + 1/4$;	- 0.14	0.19
■	15 C < ^{11g} 5D < 16 C ;	$3 < \sigma < 3 + 1/5$;	- 0.14	0.11
■	18 C < ^{7g} 6D < 19 C ;	$3 < \sigma < 3 + 1/6$;	- 0.14	0.06
■	21 C < ^{1g} 7D < 22 C ;	$3 < \sigma < 3 + 1/7$;	- 0.14	0.0013
■	25 C < ^{5g} 8D < 26 C ;	$3 + 1/8 < \sigma < 3 + 1/4$;	0.1084	- 0.0166

Archimède (287 – 212 av. J.-C.)

La mesure du Cercle.

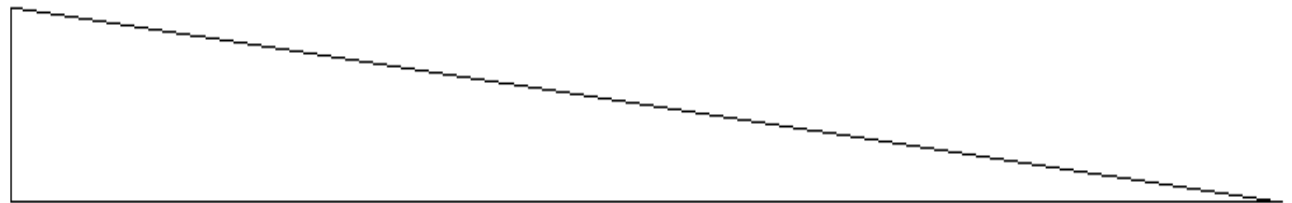
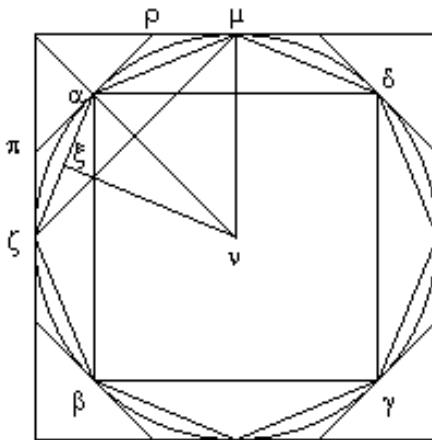
APXIMHΔΟΥΣ κυκλου μετρησις

- Proposition 1 :

Tout cercle équivaut au triangle rectangle pour lequel on a le rayon égal à l'un des côtés adjacents à l'angle droit et le périmètre égal à sa base.

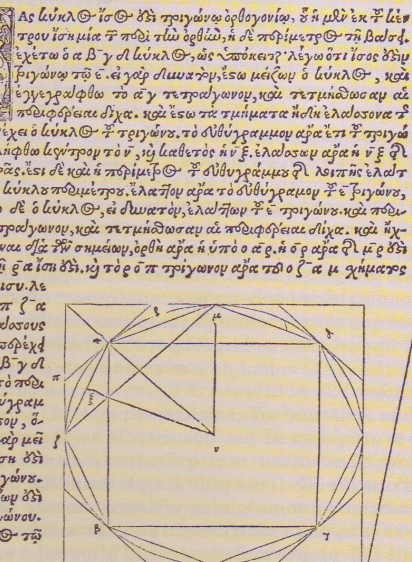
- Proposition 1 (dans le texte d'Archimède) :

Πας κυλος ισος εστι τριγωνω ορθογωνιω ...

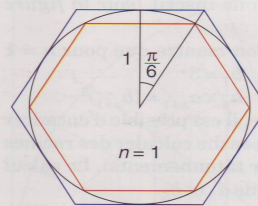


ΑΡΧΙΜΗΔΟΥΣ ΚΥ

ΚΛΟΥ ΜΕΤΡΗΣΙΣ.



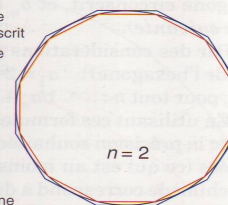
Οὐκ ἐστὶν ἡμεῖς τὸ
ἡμῶν ἐν τῇ διὰ τὴν ἐκείνου, λόγῳ ἔχει, ὅτι ἡμεῖς ἡμεῖς ἐστὶν ἡμεῖς ἡμεῖς
α. β.



$$a_1 = 2\sqrt{3} \quad b_1 = 3$$

$$= 3,46..$$

a = demi-périmètre
du polygone circonscrit
 b = demi-périmètre
du polygone inscrit



$3 \times 2^n =$ nombre
de côtés du polygone

$$a_2 = \frac{12}{2 + \sqrt{3}} = 3,21.. \quad b_2 = \frac{6}{\sqrt{2 + \sqrt{3}}} = 3,10..$$

Démonstration de la proposition 1

- Elle se fait par l'absurde.

On note D l'aire du disque, T l'aire du triangle, L la longueur de la circonférence du cercle, R le rayon du cercle.

- 1er cas : $T < D$

Tout polygone inscrit dans le cercle a une aire inférieure à D. En utilisant la méthode d'exhaustion, on peut trouver un polygone inscrit dans le cercle dont l'aire P est comprise entre T et D; donc $T < P < D$.

Or le périmètre p de ce polygone est inférieur à L et l'apothème a est inférieure à R .

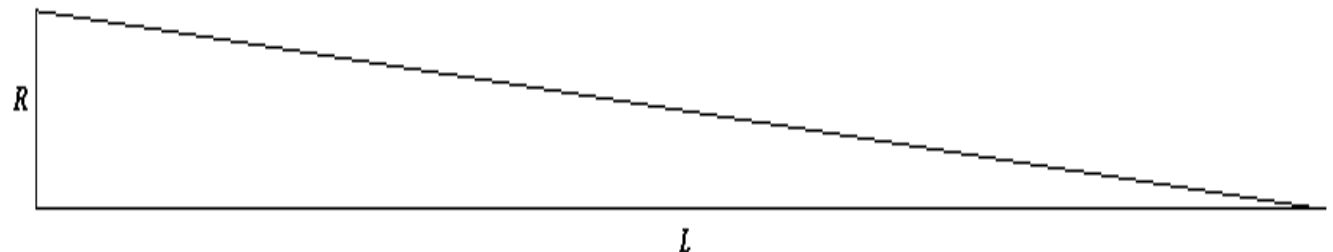
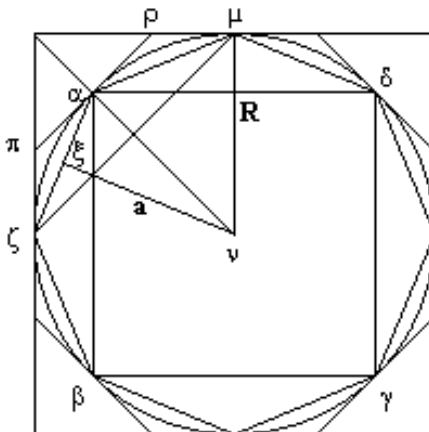
On en déduit que $2P = a p < RL = 2T$. Donc $P < T$ (contradiction).

- 2ème cas : $D < T$

Tout polygone circonscrit au cercle a une aire supérieure à D. En utilisant la méthode d'exhaustion, on peut trouver un polygone circonscrit au cercle dont l'aire P' est comprise entre D et T; donc $D < P' < T$.

Or le périmètre p' de ce polygone est supérieur à L et l'apothème est égale à R .

ie $2 P' = R p' > R L = 2 T$. Donc $P' > T$ (contradiction).



Archimède (287 – 212 av. J.-C.)

La mesure du Cercle.

APXIMHΔΟΥΣ κυκλου μετρησις

■ Proposition 2 :

Le rapport de l'aire du cercle au carré de son diamètre est celui de 11 à 14.

■ Proposition 3 :

Le périmètre de tout cercle vaut le triple du diamètre augmenté de moins de la septième partie, mais de plus de dix fois la soixante et onzième partie.

dans le texte d'Archimède :

Παντος κυκλου η περιμετρος της διαμετρου τριπλασιων εστι και επι υπερεξει ελασσονι μεν η εβδομωι μερει της διαμετρου μειζονι δε η δεκα εβδομηκοστομονοις.

Que dit Euclide sur la circonférence du cercle et l'aire du disque ?

- On sait peu de choses sur Euclide. Les originaux de ses oeuvres, notamment les éléments ont été perdus, sans doute dans les multiples incendies de la bibliothèque d'Alexandrie (-48 Jules César, 295, 391 et 691 invasion arabe).
On a même des incertitudes sur ses dates de naissance et de décès (-325? , -265?).

- Dans le livre Douze des Eléments, on trouve la proposition II, dont l'énoncé (dans la traduction de D. Hernion de 1630, source : Bnf Gallica) est le suivant :

« Les cercles font l'un à l'autre , comme les quarez de leurs diamètres. »

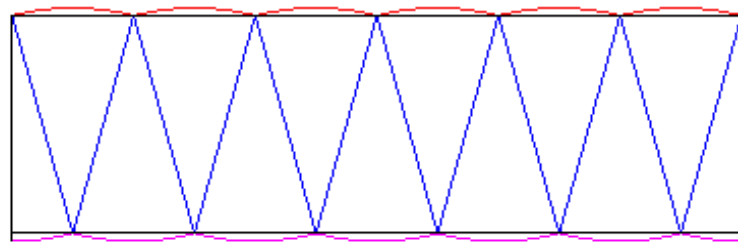
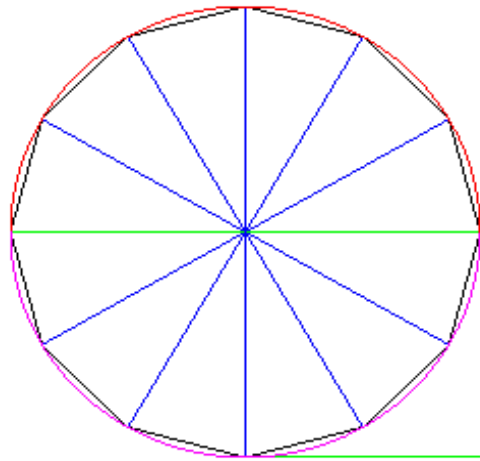
- La version moderne de cette proposition pourrait être :
« Les aires de deux cercles sont dans la même proportion que le carré de leurs diamètres (ou de leurs rayons). »
- Avec des notations modernes, on peut dire qu' Euclide démontre que, pour deux cercles de rayons respectifs R_1 et R_2 et d'aires respectives D_1 et D_2 on a :

$$D_1 / D_2 = (2 R_1)^2 / (2 R_2)^2 = (R_1)^2 / (R_2)^2.$$

- Aucune formulation analogue pour les longueurs L_1 et L_2 des circonférences

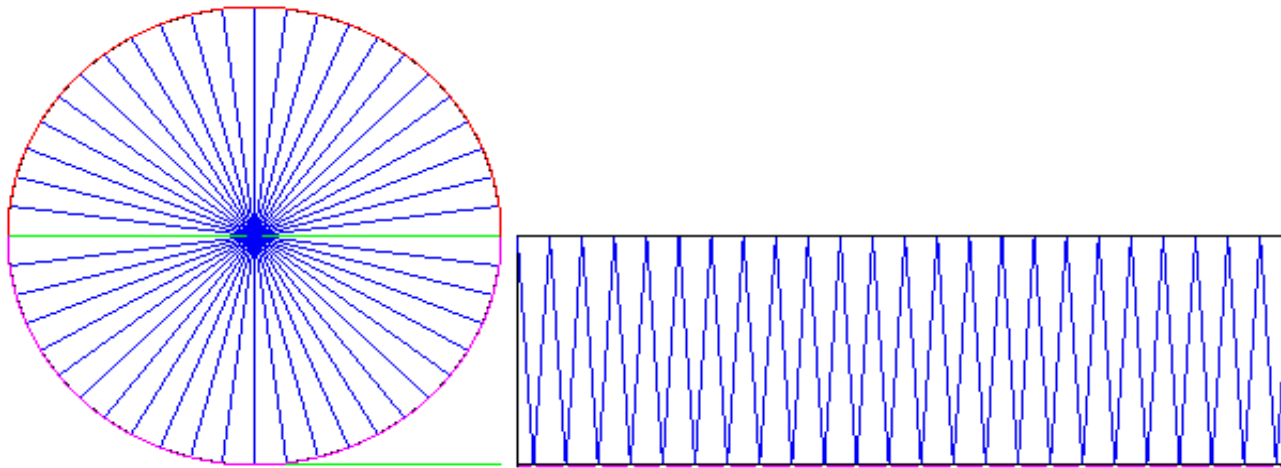
La démonstration de $\sigma = \pi$ en images

$$n = 12$$



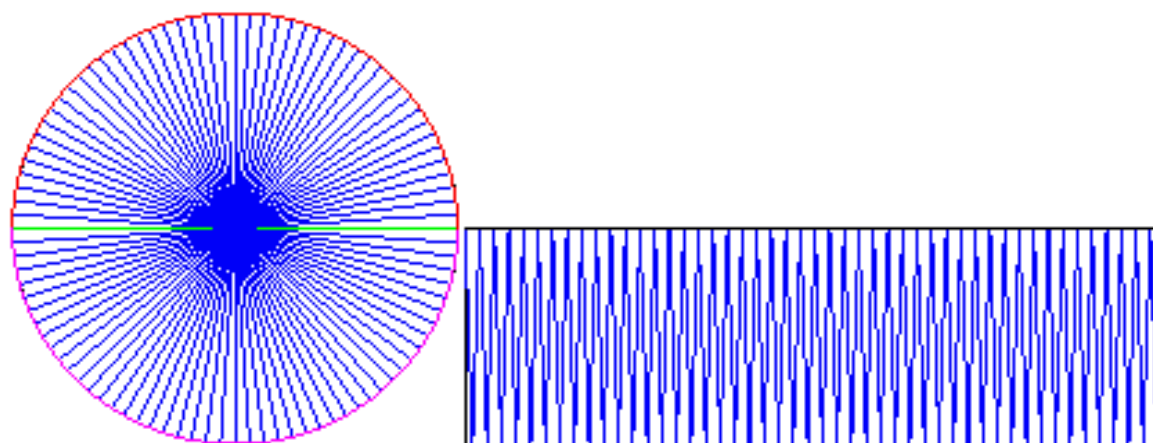
La démonstration de $\sigma = \pi$ en images

$n = 48$



La démonstration de $\sigma = \pi$ en images

$n = 96$



π chez les babyloniens

- Dans une tablette babylonienne vieille de 4000 ans, découverte en 1936, on a trouvé la valeur $3 + 1/8$ comme approximation de π .
- En réalité, compte tenu de la numération sexagésimale en usage dans cette très ancienne civilisation, c'est sous la forme : $3 + 57/60 + 36/3600$ que cette valeur était écrite, en écriture cuneïforme.
- On peut vérifier que $3 + 7/60 + 30/3600 = 3 + 450/3600 = 3 + 1/8$.

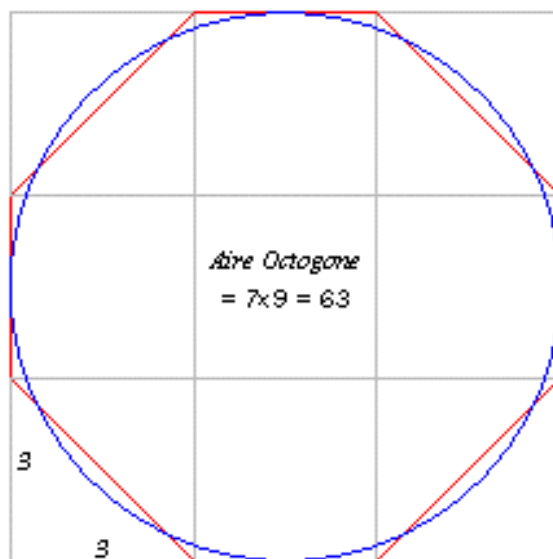


π chez les égyptiens

- Le papyrus de Rhind, découvert en 1855 (British museum), contient un manuel de problèmes. Ce texte, recopié vers -1650 par le scribe Ahmès et datant sans doute de -1800, comporte la solution d'un problème, dont on peut déduire que π était évalué à $(16/9)^2$.
- En fait, le texte propose, pour calculer la surface d'un disque, de faire les opérations suivantes :
a/ enlever un neuvième au diamètre, puis
b/ multiplier le résultat par lui même.
- Traduite par une formule, cette méthode peut s'écrire : $S = (D - D/9)^2$.
Comme on sait que : $S = (D/2)^2 \pi$ on en déduit, que pour les égyptiens :
$$\pi = (16/9)^2 = 3,16049.$$
- On peut comparer les deux approximations (égyptienne et babylonienne) :
$$\pi - (16/9)^2 = -0,0185 \quad \text{et} \quad \pi - (3+1/8) = 0,0166$$
- Conclusion : l'approche des égyptiens n'est pas meilleure que celle des babyloniens.

La règle de la diminution du neuvième chez les égyptiens

- On peut penser que cette règle provient de l'approche du cercle par un octogone irrégulier, construit sur un carré de côté 9 et divisé en 9 carrés de côté 3. .
- L'aire A de l'octogone vaut $7 \times 9 = 63$. Mais comme elle est manifestement plus petite que l'aire du disque, on peut choisir pour l'aire du disque $D = 64$, ce qui de plus simplifie les calculs.
- Comme le rayon du cercle est $R = 9/2$, on a :
$$D/R^2 = 64 \times 2^2 / 9^2 = 8^2 \times 2^2 / 9^2 = (16/9)^2.$$



Le nombre π dans la Bible.

- Un passage de la Bible (550 avant J.-C.) mentionne implicitement la valeur $\pi = 3$.
- Il s'agit de la construction du temple de Salomon (*Livre des Rois, 1, 7, 3 et 2, Chroniques 4, 2*) où est décrit l'énorme chaudron du fondeur de bronze Hiram.
- On y trouve en effet le texte suivant :

« Il fit aussi la mer de fonte. Elle avait dix coudées d'un bord jusqu'à l'autre, une forme entièrement ronde : elle avait cinq coudées de hauteur, et était environnée tout alentour d'un cordon de trente coudées ».

par 64 (ce qui simplifie les calculs et compense l'aire qui semble manquer à l'octogone), on arrive à $(9/2)^2\pi = 64$, c'est-à-dire à $\pi = (16/9)^2$, et donc à la règle de la *diminution du neuvième*.

Notons pour finir que les Égyptiens connaissaient l'égalité entre le rapport du périmètre d'un cercle à son diamètre et le rapport de la surface d'un disque au carré de son rayon (autrement dit, ils savaient que le « π » de $P = 2\pi r$ est le même que le « π » de $S = \pi r^2$). En revanche, ils ne semblent pas avoir connu un énoncé général équivalant au théorème de Pythagore.

La Bible

Un passage de la Bible raconte la construction du temple de Salomon et décrit l'énorme chaudron du fondeur de bronze Hiram (*Livre des Rois*, 1, 7, 3 et 2, *chronique* 4, 2). Le texte utilise implicitement la valeur $\pi = 3$. Toutefois, les Hébreux avaient peut-être conscience que 3 n'est qu'une approximation, voire même connaissaient de meilleures valeurs pour π .

Voici le passage concerné dans la Bible (dont on date l'écriture aux alentours de 550 avant J.-C.) :

Il fit aussi une mer de fonte de dix coudées d'un bord jusqu'à l'autre, qui était toute ronde : elle avait cinq coudées de haut et était environnée tout à l'entour d'un cordon de trente coudées.



La Bible donne le diamètre et le périmètre de la «mer de fonte» du fondeur Hiram ; la valeur $\pi = 3$ est implicitement utilisée.

Le nombre π et les fractions continues.

- Le développement en fraction continue de π commence par :

$$\pi = 3 + \frac{1}{7 + \frac{1}{15 + \frac{1}{1 + \frac{1}{292 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \dots}}}}}}$$

- Les premières réduites sont :

$$\frac{22}{7} \quad \frac{333}{106} \quad \frac{355}{113} \quad \frac{103993}{33102}$$

Les fractions continues comme meilleures approximations.

- Le développement en fraction continue d'un nombre réel α est obtenu par un algorithme simple :
 - a/ prendre la partie entière a_0 de α ,
 - b/ retrancher a_0 de α ,
 - c/ prendre l'inverse de $\alpha - a_0$, on note α_1 cet inverse,
 - d/ recommencer sur α_1 les actions a/, b/ et c/ ...
- Si α est rationnel, le processus s'arrête et on obtient une suite finie d'entiers $[a_0; a_1, a_2, a_3, \dots, a_n]$
- Si α est irrationnel, le processus fournit une suite infinie d'entiers $[a_0; a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots]$
- Dans les deux cas, a_0 est un entier quelconque et $a_k > 0$ pour tout $k > 0$.
- Le rationnel $p_k/q_k = [a_0; a_1, a_2, a_3, \dots, a_k]$ est appelée réduite de rang k.
- On a la propriété suivante : $|\alpha - p_k/q_k| < 1/q_k^2$ et on démontre que parmi les fractions p/q dont le dénominateur $q \leq q_k$ la réduite p_k/q_k est la meilleure approximation.
- Signalons aussi les relations :
$$p_k q_{k-1} - p_{k-1} q_k = (-1)^{k-1} \quad \text{et} \quad p_k/q_k - p_{k-1}/q_{k-1} = (-1)^{k-1} / q_k q_{k-1}$$
de la première on déduit que les réduites sont des fractions irréductibles et la seconde montre que deux réduites consécutives encadrent α

Bibliographie

- [1] Numéro Spécial π Supplément au Petit Archimède n°64-65 Mai 1980
- [2] Quadrature du cercle, fractions continues et autres contes, APMEP n°86 Mai 1992
- [3] Le fascinant nombre π , Belin – Pour la science
- [4] Mathématiques et mathématiciens, Pierre DEDRON et Jean ITARD, Magnard
- [5] Continued fractions, A. Ya. Khinchin, Dover Publications, Mineola, New York
- [6] *AixMarseilleVert* n° 8 : Une approche expérimentale de π , site de L'A.P.M.E.P. Régionale d'Aix-Marseille : <http://www.apmep-aix-mrs.org>
ou : <http://www.apmep-aix-mrs.org/bulletin/num08/bonnet.htm>
- [7] *Le Kangourou des Mathématiques* site du Kangourou :
<http://www.mathkang.org/maths/txtarchimede.html>
- [8] Autre site :
http://perso.wanadoo.fr/therese.eveilleau/pages/hist_mat/textes/mirliton.htm

Raphaël : l'Ecole d'Athènes

