

La méthode de Newton et son histoire

André Bonnet (*)

Introduction :

La méthode de Newton (1643-1727)¹ est connue depuis plus de 300 ans et elle est toujours d'actualité. Cet article n'est pas destiné à ajouter un papier de plus à l'éloge de la convergence "phénoménale" de cette méthode (l'expression est de Cédric Villani, Médaille Fields 2010 dans sa conférence pour les 30 ans du CIRM²), mais à donner un éclairage historique, en étudiant le texte de Newton, publié en anglais en 1736, intitulé "*The method of fluxions, and infinite series*", dont le manuscrit (en latin) est achevé depuis 1671.

La méthode de Newton apparait au tout début de l'ouvrage et ne fait pas appel à la notion de dérivée, ni à la notion de fluxion³.

Après avoir rappelé la méthode telle qu'elle est enseignée de nos jours, nous examinerons des extraits du document cité, où Newton expose, sur un exemple (une équation du troisième degré), sa manière de résoudre de façon approchée les équations (algébriques), puis nous expliquerons pourquoi la convergence est "phénoménale".

La Méthode de Newton dans les manuels actuels :

Le principe de la méthode de Newton pour la résolution approchée d'une équation de la forme $f(x) = 0$ est actuellement enseigné comme une application de la dérivée, son principe peut être résumé ainsi.

Après avoir déterminé un intervalle où il n'y a qu'une seule racine α , on choisit une valeur u_0 assez proche de α et on construit, par récurrence, une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ où u_{n+1} est obtenu, à partir de u_n ,

(*) andre.bonnet9@orange.fr

¹ On trouvera parfois 1642 comme année de naissance de Newton, il faut comprendre "du calendrier julien". Le calendrier grégorien n'a été adopté que tardivement par les anglais (à partir de 1752).

² Centre International de Rencontre Mathématiques, 163 avenue de Luminy, 13288 Marseille.

³ Les mots fluentes et fluxions viennent du latin *fluere* qui signifie couler; l'idée de Newton est que *les grandeurs varient au fur et à mesure que le temps s'écoule et que les fluxions sont les vitesses de ces écoulements*. Dans l'édition de 1736, les grandeurs sont notées, x, y, z et sont appelées les fluentes; les fluxions sont notées $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$ (ce sont les vitesses avec lesquelles les fluentes varient dans le temps). Les fluxions peuvent être considérées comme des dérivées par rapport au temps (au sens où nous l'entendons aujourd'hui).

C'est Leibniz qui donnera, dans un article assez court, paru dans la revue scientifique *Acta Eruditorum* (publiée à Leipzig en 1682), les règles du calcul différentiel. Sa conception est assez différente. Selon lui, les grandeurs sont constituées d'infiniment petits (comme la droite est formée de points). Il invente la notation dx, dy, dz , et s'autorise l'écriture du rapport d'infiniment petits $\frac{dy}{dx}$ (notre dérivée). Il invente aussi le symbole de sommation ayant la forme d'un "S" étiré, et il ose écrire $\int dy = y$ (qui ressemble beaucoup à notre intégrale). Avec cette notation, le lien avec les fluxions de Newton est le suivant : $\frac{y}{x} = \frac{dy}{dx}$.

comme l'abscisse du point d'intersection de l'axe horizontal et de la tangente en $(u_n, f(u_n))$ à la courbe représentative de f .

Les quatre figures ci-dessous résument le principe de la méthode et donnent, en même temps, une idée de la rapidité de convergence, puisque, pour voir ce qu'il se passe autour de α sur la figure 3, et repérer les termes u_1, u_2, u_3 il a fallu zoomer (figure 4).

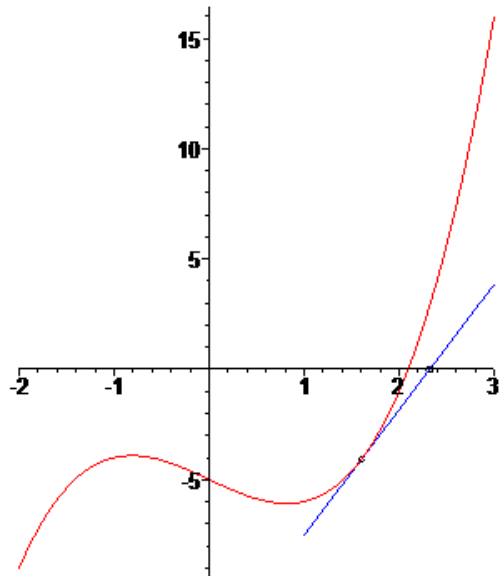


Figure 1

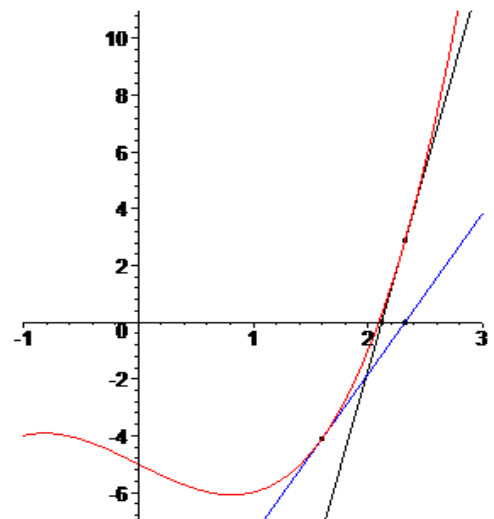


Figure 2

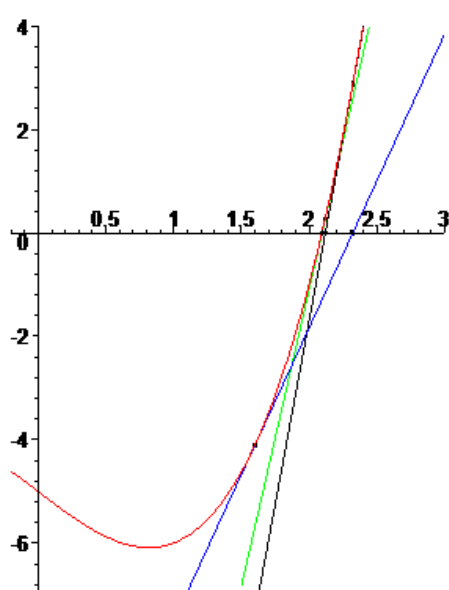


Figure 3

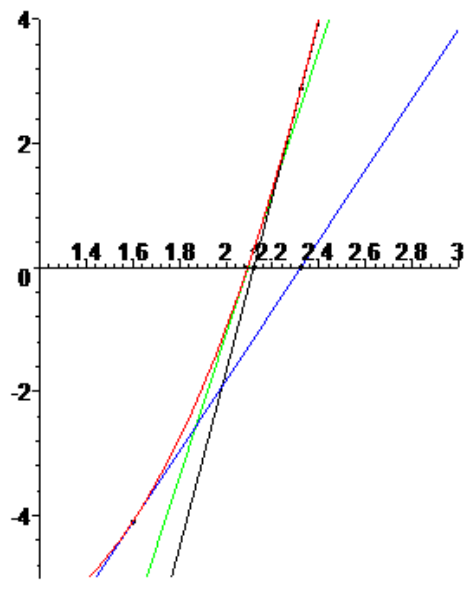


Figure 4

L'étude théorique :

Equation de la tangente en $(u_n, f(u_n))$ à la courbe représentative de f :

$$y = f'(u_n)(x - u_n) + f(u_n)$$

Détermination de u_{n+1} comme solution de l'équation :

$$f'(u_n)(x - u_n) + f(u_n) = 0$$

Formule de récurrence pour la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$: $u_{n+1} = u_n - \frac{f(u_n)}{f'(u_n)}$ avec u_0 donné.

Si la fonction f est définie sur un intervalle I , en posant $\Phi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$, la validité de la méthode est assurée si la dérivée f' ne s'annule pas sur I et si⁴ $\Phi(I) \subset I$.

Remarque :

Dans l'exemple utilisé pour illustrer la méthode de Newton (fig. 1 à 4), la suite $u_0, u_1, u_2 \dots$ n'est pas monotone, mais la monotonie apparaît dès le rang 1 (la suite $u_1, u_2, u_3 \dots$ est décroissante).

Cette situation est généralisable, si on exige que l'intervalle I soit choisi de telle sorte que les dérivées f' et f'' soient de signe constant sur I .

L'algorithme :

L'algorithme habituellement utilisé pour déterminer une valeur approchée de la solution α est le suivant (on ne donne ici que le squelette de l'algorithme) :

```

u ← u0

tant que <?> faire :

    u ← u -  $\frac{f(u)}{f'(u)}$ 

afficher u
    
```

Le test d'arrêt n'est pas évident. La suite est généralement monotone, tout au moins à partir d'un certain rang, et de ce fait deux termes consécutifs de la suite ne constituent pas un encadrement de la valeur cherchée. Malgré cela on trouve en général dans les manuels d'analyse numérique un test d'arrêt basé sur la condition $|u_{n+1} - u_n| < \varepsilon$, ce qui conduit à modifier l'algorithme ainsi :

```

u ← u0
v ← u0 -  $\frac{f(u_0)}{f'(u_0)}$ 

tant que |v - u| > ε faire :

    u ← v

    v ← u -  $\frac{f(u)}{f'(u)}$ 

afficher v
    
```

⁴ Cette condition, bien qu'indispensable pour assurer la bonne définition de la suite, est difficile à vérifier dans la pratique. L'étude, faite un peu plus loin sur la rapidité de convergence, montre que Φ est contractante autour de α (voir note en bas de page n° 4), donc la valeur de u_{n+1} est comprise entre α et u_n ce qui prouve, à la fois, l'existence et la monotonie de la suite.

Sans avoir étudié la convergence de la méthode, il n'est pas évident de comprendre pourquoi la condition $|u_{n+1} - u_n| \leq \varepsilon$ (qui est obtenue en sortie de boucle), permet d'avoir l'assurance que la condition $|u_{n+1} - \alpha| \leq \varepsilon$ est remplie; ce qui est, véritablement, l'objectif visé.

Personnellement, pour calculer une valeur approchée à 10^{-8} près, j'utilise l'algorithme :

```

ε ← 10-8
u ← u0
tant que f(u - ε) * f(u + ε) > 0 faire :
    u ← u - f(u) / f'(u)
afficher u

```

La fonction f étant continue, la condition $f(u - \varepsilon) * f(u + \varepsilon) \leq 0$ prouve (d'après le théorème des valeurs intermédiaires) que $\alpha \in [u - \varepsilon, u + \varepsilon]$, donc que $|u - \alpha| \leq \varepsilon$.

La Méthode telle qu'elle est décrite par Newton :

Comme il est dit dans l'introduction, le manuscrit en latin (la langue des savants à l'époque) a été achevé en 1671, mais Newton a différé sa parution, à cause des critiques qu'il subissait de toute part. Une première tentative de parution a eu lieu en 1704, année où Newton confie son manuscrit à Pemberton et lui donne son consentement pour une publication. On ne sait pas pourquoi cette démarche n'a pas abouti. Ce n'est qu'en 1736 que Colson, qui a étudié de près le travail de Newton et rédigé d'abondants commentaires, fait paraître *The method of fluxions, and infinite series*, alors que Newton est décédé le 31 mars 1727 à l'âge de 84 ans. L'ouvrage de 374 pages comporte une préface (24 pages), le texte de Newton (134 pages) et les commentaires de Colson (216 pages).

Cette publication en anglais, alors que le texte original est en latin, s'explique par le fait que Colson a dû d'abord traduire le manuscrit dans sa langue maternelle, tout en rédigeant d'abondants commentaires. Il a renoncé à traduire ceux-ci en latin car il lui était plus commode de publier l'ensemble en anglais.

Dès sa parution, à cause de son succès, Buffon se lancera dans une traduction en français qui paraîtra en 1740. Dans sa préface, Buffon rappelle les raisons, invoquées par Newton lui-même, de sa réticence à donner son manuscrit à un éditeur, ce qui a eu comme conséquence la publication posthume de son ouvrage. Le passage de cette préface où Newton donne cette explication est reproduit ci-dessous (en latin) :

Et suborta statim (per diversorum Epistolas objectionibus refertas) crebra interpellationes me prorsus à consilio deterruerunt & effecerunt ut me arguerem imprudentia quod umbram captando, eatenus perdideram quietem meam rem prorsus substantialem. Il semble

Dont la traduction est la suivante:

« Des empêchements fréquents produits (par des lettres d'opposants pleines d'objections) me dissuadèrent absolument de toute publication, car je risquais alors de perdre ma tranquillité, chose absolument essentielle pour moi »

La méthode de Newton est exposée dans les pages 5-6 et 7 et les commentaires de Colson, sur ce paragraphe, sont en pages 185-186 et 187.

On a reproduit, ci-dessous, le passage de la page 6 concernant la résolution approchée d'une équation numérique⁵ :

20. Let this Equation $y^3 - 2y - 5 = 0$ be proposed to be resolved, and let z be a Number (any how found) which differs from the true Root less than by a tenth part of itself. Then I make $z + p = y$, and substitute $z + p$ for y in the given Equation, by which is produced a new Equation $p^3 + 6p^2 + 10p - 1 = 0$, whose Root is to be sought for, that it may be added to the Quote. Thus rejecting $p^3 + 6p^2$ because of its smallness, the remaining Equation $10p - 1 = 0$, or $p = 0,1$, will approach very near to the truth. Therefore I write this in the Quote, and suppose $0,1 + q = p$, and substitute this fictitious Value of p as before, which produces $q^3 + 6,3q^2 + 11,23q + 0,061 = 0$. And since $11,23q + 0,061 = 0$ is near the truth, or $q = -0,0054$ nearly, (that is, dividing $0,061$ by $11,23$, till so many Figures arise as there are places between the first Figures of this, and of the principal Quote exclusively, as here there are two places between 2 and $0,005$) I write $-0,0054$ in the lower part of the Quote, as being negative; and supposing $-0,0054 + r = q$, I substitute this as before. And thus I continue the Operation as far as I please, in the manner of the following Diagram :

On peut noter que l'équation étudiée par Newton, pour exposer sa méthode de résolution, est la suivante : $y^3 - 2y - 5 = 0$ (1).

Dans la version anglaise, on pouvait avoir des doutes sur le degré de l'équation (car l'exposant est illisible), par contre le degré apparaît clairement dans la traduction par M. le marquis de Buffon, intendant des jardins du Roy :

⁵ Les extraits du texte de Newton (pages 5-6 et 7) et les commentaires de Colson (pages 185-186 et 187) sont disponibles sur le site de la régionale APMEP d'Aix-Marseille.

XX. Soit l'Equation $y^3 - 2y - 5 = 0$ à reduire en suite infinie, prenez un Nombre comme 2, qui ne differe pas d'une de ses dixiemes Parties de la vraie valeur de la Racine, & faites $2 + p = y$, substituez $2 + p$ pour y dans l'Equation donnée, & vous aurez $p^3 + 6p^2 + 10p - 1 = 0$, dont il faut chercher la Racine pour l'ajouter au Quotient; rejetez $p^3 + 6p^2$ à cause de sa petitesse, il restera $10p - 1 = 0$, ou $p = 0,1$, ce qui est très-près de la vraie valeur de p ; c'est pourquoi l'écrivant au Quotient, je fais $0,1 + q = p$, & substituant comme auparavant, j'ai $q^3 + 6,3q^2 + 11,23q + 0,061 = 0$, négligeant les deux premiers Termes, il reste $11,23q + 0,061 = 0$, ou $q = -0,0054$ à peu près (& cela en divisant 0,061 par 11,23 jusqu'à ce qu'on ait autant de Figures qu'il y a de places entre les premieres Figures de ce Quotient & le principal Quotient exclusivement, comme ici où il a deux places entre 2 & 0,005) J'écris donc $-0,0054$ dans le Quotient, mais au-dessous parce que ce Terme est Négatif; & supposant $-0,0054 + r = q$, je substitue comme auparavant, & je continue ainsi l'Opération aussi long-tems qu'il convient, comme on le peut voir ci-dessous.

Il faut signaler que les figures 1, 2, 3 et 4 ont été réalisées avec la fonction $f(t) = t^3 - 2t - 5$. Par contre, la valeur initiale u_0 n'a pas été prise égale à 2, comme chez Newton. Le dessin a été réalisé avec $u_0 = 1,6$ pour des raisons de lisibilité.

Il est très facile de se convaincre de l'efficacité de la méthode employée par Newton pour résoudre cette équation, en prenant conscience que le résultat donné au bas de la page 7 :

the Quote to the Period required. Then subtracting the negative part of the Quote from the affirmative part, there arises 2,09455148 for the Root of the proposed Equation.

est bien la valeur approchée par défaut, à 10^{-8} près, de l'unique racine de l'équation (1).

On peut, par exemple, le vérifier en calculant $f(2.09455148)$ et $f(2.09455149)$ avec l'instrument de son choix et en constatant qu'ils sont de signes contraires.

Ce qui est remarquable, c'est que ce résultat est obtenu par une demi-page, seulement, de calculs (à la main). Cet exemple met en évidence la rapidité "phénoménale" de convergence de la méthode.

Pour comprendre la démarche de Newton suivons le texte pas à pas:

... prenez un Nombre 2, qui ne diffère pas d'une de ses dixiemes Parties de la vraie valeur de la Racine...

Sans doute, Newton calcule $f(2) = -1$ et $f(2,1) = 0,061$ pour obtenir cet encadrement de la racine.

... & faites $2 + p = y$, substituez $2 + p$ pour y dans l'Equation donnée, & vous aurez ...

Evidemment, la détermination p est un problème aussi difficile à résoudre que la recherche de la valeur exacte de α (solution de l'équation), puisque, en reportant $2 + p = y$ dans l'équation (1) on est conduit à résoudre l'équation :

$$p^3 + 6p^2 + 10p - 1 = 0 \quad (2).$$

... rejetez $p^3 + 6p^2$ à cause de sa petitesse ...

c'est-à-dire en supprimant dans (2) les termes contenant p^2 et p^3 et en résolvant l'équation $10p - 1 = 0$ (qui résulte de cette linéarisation du problème), Newton obtient $p = 0,1$.

La valeur $2 + p = 2,1$ est alors une valeur approchée par excès, qui comme le dit Newton "est très près de la vraie valeur".

Newton pose alors $0,1 + q = p$ et substitue cette valeur dans l'équation (2), et obtient l'équation

$$q^3 + 6,3q^2 + 11,23q + 0,061 = 0 \quad (3)$$

puis en négligeant les termes contenant q^2 et q^3 il obtient une équation du premier degré en q :

$$11,23q + 0,061 = 0 \quad (4)$$

dont la solution exacte est $q = -\frac{0,061}{11,23}$ et dont il prend une valeur approché $\tilde{q} = -0,0054$ alors que ce quotient vaut : $-0,0054318789 \dots$

enfin en posant :

$$-0,0054 + r = q \quad (5)$$

et par un report dans (3) puis par linéarisation de l'équation du troisième degré, Newton obtient la valeur de r .

Il donne à la fin le résultat : $y = 2 + p + q + r = 2,09455148$ qu'il ne faut pas prendre comme la valeur exacte de α mais comme une valeur approchée (sous-entendu à 10^{-8} près) sans que ce point soit justifié.

Par contre les calculs (à la main) pour obtenir ce résultat sont relativement brefs et on ne peut qu'admirer la disposition des calculs faits par Newton.

$y^3 - 2y - 5 = 0$		$+ 2,10000000$ $- 0,00544852$ $+ 2,09455148, \&c. = y$
$2 + p = y.$	$+ y^3$ $- 2y$ $- 5$	$+ 8 + 12p + 6p^2 + p^3$ $- 4 - 2p$ $- 5$
The Sum		$- 1 + 10p + 6p^2 + p^3$
$0,1 + q = p.$	$+ p^3$ $+ 6p^2$ $+ 10p$ $- 1$	$+ 0,001 + 0,03q + 0,3q^2 + q^3$ $+ 0,06 + 1,2 + 6,$ $+ 1, + 10,$ $- 1,$
The Sum		$0,061 + 11,23q + 6,3q^2 + q^3$
$- 0,0054 + r = q.$	q^3 $+ 6,3q^2$ $+ 11,23q$ $+ 0,061$	$- 0,000000157464 + 0,00008748r - 0,0162r^2 + r^3$ $+ 0,000183708 - 0,06804 + 6,3$ $- 0,060642 + 11,23$ $+ 0,061$
The Sum		$+ 0,0005416 + 11,162r$
$- 0,00004852 + s = r.$		

Toutefois, les ratures que l'on trouve à la fin de la détermination de r risquent de faire planer un doute sur la validité du résultat.

Un examen approfondi du document ci-dessous montre que, dans le cartouche qui correspond à la détermination de r , Newton prend pour valeur approchée de q la valeur -0.0054 alors que la valeur exacte est $-\frac{0,061}{11,23}$ dont une valeur approchée à 10^{-9} près est $-0,005431879$.

On peut s'étonner de ce choix, compte tenu de la précision souhaitée du calcul. Il est sans nul doute fixé par un souci de simplification des calculs, qui, ne l'oublions pas, étaient à l'époque fait à la main.

En réalité, à cause de la rapidité de convergence de la méthode, cette approximation n'affecte pas la précision du calcul.

En effet si on prend $q = -0,005431879$, l'avant dernière ligne (correspondant à la détermination de r) peut être remplacée par :

$$+0,000185722 + 11,1616468 r$$

$$\text{ce qui donne : } r = -\frac{0,000185722}{11,1616468} \simeq -0,000016393 \text{ puis :}$$

$$y = 2 + 0,1 - 0,00543188 - 0,00001664 = 2,09455148 .$$

On peut remarquer que Newton avait prévu avec l'égalité $-0,00001672 + s = r$ une nouvelle étape avec la détermination de s , mais ce dernier calcul s'est avéré inutile.

Etude de la rapidité de convergence :

Dans la recherche d'une valeur approchée d'une solution d'une équation, la méthode de Newton intervient après la "séparation des racines" et après une étude destinée à localiser la valeur cherchée dans un intervalle $I =]a, b[$, suffisamment petit pour que la fonction f soit dérivable et que la dérivée f' ne s'annule pas sur I .

Si on pose $\Phi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$, on voit que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est obtenue par : $u_{n+1} = \Phi(u_n)$ et que la racine α vérifie $\Phi(\alpha) = \alpha$. Donc α est "un point fixe" de Φ ; ceci sous réserve que l'on ait : $\Phi(I) \subset I$, pour que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ soit bien définie.

Cette dernière condition est en général satisfaite et, si elle ne l'est pas, on l'obtient la plupart du temps en restreignant l'intervalle I .

Sous réserve que la fonction f soit deux fois dérivable sur I , la fonction Φ est dérivable, et sa dérivée est :

$$\Phi'(x) = 1 + \frac{f(x)f''(x) - (f'(x))^2}{(f'(x))^2} = \frac{f(x)f''(x)}{(f'(x))^2}$$

Ce calcul montre que $\Phi'(\alpha) = 0$ ce qui explique l'extraordinaire performance de la méthode de Newton.

Nous supposons dans la suite que f'' est continue sur I .

La continuité de f , f' et f'' justifie l'existence de M, K et μ définis par :

$$M = \max_{x \in I} |f''(x)|$$

$$\mu = \min_{x \in I} (f'(x))^2$$

$$K = \max_{x \in I} |f(x)|$$

En appliquant l'inégalité des accroissements finis à f on a : $|f(x) - f(\alpha)| \leq K|x - \alpha|$, et comme $f(\alpha) = 0$ on obtient : $|f(x)| \leq K|x - \alpha|$.

En appliquant le théorème des accroissements finis à Φ on obtient :

$$|u_{n+1} - \alpha| = |\Phi(u_n) - \Phi(\alpha)| = |\Phi'(c)||u_n - \alpha|$$

où c est situé entre u_n et α . Or :

$$|\Phi'(c)| = \left| \frac{f(c)f''(c)}{(f'(c))^2} \right| \leq |f(c)| \frac{M}{\mu} \leq K|c - \alpha| \frac{M}{\mu} \leq \frac{KM}{\mu} |u_n - \alpha|$$

$$\text{d'où : } |u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{KM}{\mu} |u_n - \alpha|^2.$$

On en déduit aussi⁶ que : $\forall x \in I, |\Phi(x) - \Phi(\alpha)| \leq k|x - \alpha|$, avec $k = \frac{KM}{\mu}$.

⁶ Ce calcul montre que f est lipschitzienne et qu'elle est en général contractante, puisque K est proche de zéro si l'intervalle I qui contient α est assez petit.

Dans l'exemple utilisé par Newton : $f(x) = x^3 - 2x - 5$, $f'(x) = 3x^2 - 2$ et $f''(x) = 6x$ et on peut prendre $a = 2$ et $b = 2,1$.

Une étude rapide des variations de f' et de f montre que f' et f sont croissantes (sur I) et qu'il est possible de prendre :

$$K = 0,061 \quad ; \quad M = 12,6 \quad ; \quad \mu = 10 .$$

ce qui donne l'estimation de l'erreur suivante :

$$|u_{n+1} - \alpha| \leq 0.077 |u_n - \alpha|^2$$

Pour $u_1 = 2,1$, donc $|u_1 - \alpha| < 0.1$, les erreurs dues à la méthode sont estimées à :

$$|u_2 - \alpha| < 0.077 \times (0.1)^2 = 0.00077$$

$$|u_3 - \alpha| < 0.077 \times (0.077 \times (0.1)^2)^2 = 4.7 \cdot 10^{-8}$$

Ce résultat justifie que la valeur trouvée par Newton (2,09455148) est une valeur approchée à moins de $4,7 \cdot 10^{-8}$ près.

La contribution de Raphson :

Après la lecture du texte de 1736, on peut se demander, à juste titre, si l'attribution à Newton seul de la méthode que nous utilisons actuellement est bien justifiée. On a pu observer, en effet, que Newton ne fait pas usage de la dérivée, notion qui est indispensable dans les algorithmes modernes.

Mais il faut noter, aussi, que Newton décrit sa méthode sur un exemple d'équation polynomiale et que dans les pages suivantes il se limitera à ce type d'équations avec une exception, l'équation de Kepler⁷ : $x - e \sin(x) = M$

Si, dans le cas des équations polynomiales, il peut (par une utilisation itérée de la formule du binôme), obtenir la linéarisation du problème en négligeant dans les calculs les termes de degrés supérieurs à un, c'est impossible pour l'équation de Kepler⁸.

Toutefois, il faut reconnaître que Newton met en évidence, dans les équations polynomiales, "l'application linéaire tangente" qui est une notion relativement très proche de la dérivée.

⁷ C'est l'équation qu'il faut résoudre pour trouver la position d'une planète qui décrit une orbite elliptique (autour du soleil et avec le soleil comme l'un de ses foyers) d'excentricité e et où $M = 2\pi \frac{t}{T}$ (T période orbitale de la planète, t le temps, x angle du rayon vecteur de la planète avec le grand axe de l'ellipse) où M et x sont exprimés en radians.

⁸ Dans un autre ouvrage intitulé "Philosophiae Naturalis Principia Mathematica", (première publication à Londres en 1687) Newton donne, par une méthode purement géométrique, le calcul d'une valeur approchée de cette équation. A partir d'une valeur x_0 , proche de la solution exacte, il obtient une nouvelle valeur x_1 , sous la forme $x_1 = x_0 + c_0$, avec $c_0 = \frac{M - x_0 + e \sin(x_0)}{1 - e \cos(x_0)}$. En notant $f(x) = x - e \sin(x) - M$, on reconnaît, pour c_0 , l'expression $-\frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$.

Raphson (1648-1712 ?) présentera en 1690, dans *Analysis aequationum universalis* une nouvelle méthode de résolution des équations du troisième degré de la forme : $x^3 - bx = c$, qu'il appliquera à l'équation traitée par Newton :

PROBLEMA. IX.

Proponatur $a a a - b a = c$ Aequatio secundae Formulae
 Numeris $a a a - 2 a = 5$

Theor. $x = c + bg - ggg$

	$3gg - b$	
$2 = g$	$5 = c$	$2,1 = g$
$-8 = ggg$	$4 = bg$	$2,1$
$3gg = 12$	9	21
$b = -2$	42	42
$10) +1,0(+,1 = x$	$4,41 = gg$	$2,1$
	$2,1$	441
	882	882
$3gg = 13,23$	$-9,261 = ggg$	$4,38734916 = gg$
$b = -2,$	$+9,200$	$2,0946$
$+11,23)$	$- ,06100(-,0054 = x$	2632409496
$13,16204748 = 3gg$	$4,1892 = bg$	1754939664
$-2, = b$	$5, = c$	3948614244
$+11,16204748$	$9,1892$	8774698320
		$-9,189741550536 = ggg$
		$+9,1892 = bg + c$
		$+11,16205) - ,000541550536$
		$(-,000048517 = x$
		$2,0946$
		$- ,000048517$
		$2,094551483 = g$

FIG. 9. Raphson's method for solving $x^3 - 2x - 5 = 0$.

On peut constater que Raphson utilise la formule $x = \frac{5+2g-g^3}{3g^2-2}$ pour obtenir le complément x qu'il faut ajouter à g pour obtenir une meilleure approximation de la racine de l'équation.

La valeur initiale de g étant 2, la première valeur trouvée pour x est 0,1 puis on trouve successivement :

$g = 2,1$	$x = -0,005431889$
$g = 2,094568121$	$x = -0,000166393$
$g = 2,094551483$	

Alors que Newton résout, à chaque étape, un nouveau problème linéaire, Raphson garde la même formule pour déterminer x à partir de la nouvelle valeur de g . On pourra remarquer que, dans l'expression de x le numérateur est l'opposé de la valeur en g du premier membre de l'équation tandis que le dénominateur est sa dérivée. Mais Raphson ne fait aucune allusion à la théorie de fluxions.

Ces deux méthodes ont longtemps été regardées comme distinctes. C'est Lagrange (1736-1813) qui en 1798 observera que "ces deux méthodes ne sont au fond que les mêmes présentées différemment" et d'ajouter que la technique de Raphson "est plus simple que celle de Newton", car "on peut se dispenser de faire continuellement de nouvelles transformées".

La contribution de Simpson :

Dans son "Essays on Several Curious and Useful Subjects in Speculative and Mix'd Mathematicks, Illustred by a Variety of Examples" publié à Londres en 1740, Simpson (1710-1761) décrit "A new Method for solution of equations in Numbers" dans lequel il ne fait aucune référence à ses prédécesseurs, mais qui fait appel à la théorie des fluxions :

CASE I

When only one Equation is given, and one Quantity (x) to be determined.

"Take the fluxion of the given Equation (be it what it will) supposing x , the unknown, to be the variable Quantity; and having divided the whole by \dot{x} , let the Quotient be represented by A . Estimate the value of x pretty near the Truth, substituting the same in the Equation, as also in the Value of A , and let the Error, or resulting Number in the former, be divided by this numerical Value of A , and the Quotient be subtracted from the said former Value of x ; and from thence will arise a new Value of that Quantity much nearer to the Truth than the former, wherewith proceeding as before, another new Value may be had, and so another, *etc.* 'till we arrive to any Degree of Accuracy desired."

Il montre en outre, sur l'exemple suivant :

$$\sqrt{1-x} + \sqrt{1-2x^2} + \sqrt{1-3x^3} - 2 = 0$$

que sa méthode s'applique aux équations non polynomiales et ensuite, que l'on peut traiter aussi un système de deux équations à deux inconnues :

$$\begin{aligned}y + \sqrt{y^2 - x^2} - 10 &= 0 \\x + \sqrt{y^2 + x} - 12 &= 0\end{aligned}$$

Conclusion :

La méthode de Newton est souvent présentée comme une application de la notion de dérivée alors que Newton n'a jamais eu à sa disposition (avant 1671) une notion claire du concept de dérivée, sa théorie des fluxions n'en étant qu'une ébauche. L'étude historique devrait nous conduire, logiquement, à appeler la méthode que nous utilisons actuellement "méthode de Newton-Raphson-Simpson".

Références utiles :

1 - L'ouvrage de Newton et la traduction de Buffon sont téléchargeables sur Gallica, la bibliothèque numérique de la Bnf (<http://www.bnf.fr>)

- en anglais, *The method of fluxions, and infinite series*
- la traduction de Buffon, *La méthode des fluxions et des suites infinies*.

2 - La conférence de Cédric Villani a été enregistrée, elle est disponible,

sur le site du CIRM : <http://www.cirm.univ-mrs.fr/divers/conferences/CVi/CVi.html>

ou sur le site de l'Université de Provence : http://sites.univ-provence.fr/webtv/?x=cirm_villani_081011

3 - Sur le site de la régionale APMEP d'Aix-Marseille (www.apmep-aix-mrs.org/) une version électronique de cet article est disponible. On y trouvera :

- les figures en couleurs,
- des annexes montrant que la méthode de Newton n'est pas une pièce de musée, mais un outil utilisé couramment en ingénierie mathématique et même en informatique dans certains processeurs,
- les extraits des textes de Newton, de Colson et de Buffon, utilisés dans cet article.

Annexe 1 : La méthode de Newton est toujours d'actualité :

Nous allons voir que la "méthode de Newton-Raphson-Simpson" n'est pas une pièce de musée, mais un outil performant utilisé dans de nombreuses applications, soit sous sa forme élémentaire (résolution d'une équation numérique) soit sous une forme plus élaborée (résolution de systèmes à plusieurs inconnues obtenue par des linéarisations successives).

Cédric Villiani, dans la conférence citée précédemment, a signalé que beaucoup de problèmes de physique peuvent être mis en équations, mais que lorsque le nombre d'équations est très élevé (plusieurs dizaines de milliers, comme dans la prévision météo, l'étude d'un plasma ou l'évolution des galaxies) la détermination de solutions exactes (par des formules) est impossible à l'exception des problèmes linéaires. Dans ce cas on se ramène à une seule équation vectorielle du type $AX = B$ (où A et B sont des matrices carrées). La solution, sous réserve de l'inversibilité de A , est alors $X = A^{-1}B$.

L'extension de la méthode de Newton à ce type de problème permet, par des linéarisations itérées, d'obtenir des solutions approchées de ces problèmes difficiles, tout en conservant une très grande rapidité de convergence.

Lors des questions, il est apparu que la méthode de Newton était utilisée dans les processeurs du Cray One (premier ordinateur vectoriel avec une très grande rapidité) pour le calcul des inverses notamment. Il semble que ce procédé soit encore d'actualité⁹.

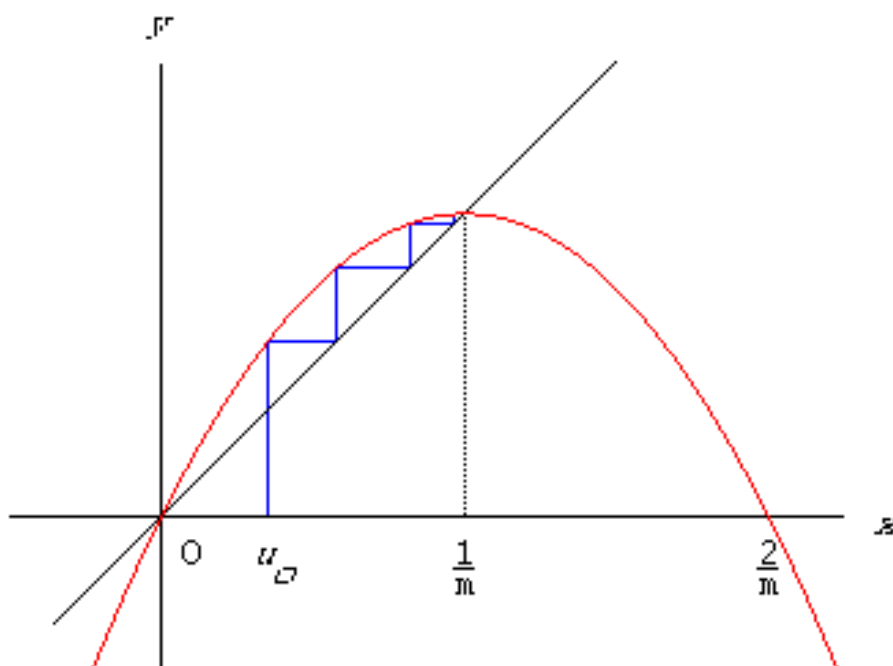
Annexe 2 : Le calcul des inverses par la méthode de Newton dans certains processeurs :

Le principe est le suivant : chercher l'inverse de $a > 0$ revient à résoudre l'équation $f(x) = 0$ avec $f(x) = \frac{1}{x} - a$.

Si on applique la méthode de Newton, la fonction d'itération est $\Phi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)} = x(2 - ax)$.

On peut représenter Φ et les premiers termes de la suite $u_0 = x_0, u_1, u_2 \dots$ sur la même figure :

⁹ Le processeur Itanium d'Intel et HP utilise la méthode de Newton pour le calcul des inverses.



Sur cette figure, on voit que l'itération de Newton converge, à condition de prendre comme valeur initiale $u_0 \in]0, \frac{2}{\alpha} [$. Donc, on est devant le paradoxe suivant : "pour être sûr d'avoir une bonne initialisation dans le calcul de $\frac{1}{\alpha}$, il faut avoir une idée de $\frac{2}{\alpha}$ ".

Heureusement, les nombres à traiter sont donnés en virgule flottante; c'est-à-dire sous la forme $m \cdot B^e$ (avec par exemple $B = 10$ comme base de la numération), $m \in [\frac{1}{B}, 1[$ et e entier.

Dans ce contexte, comme $\frac{1}{\alpha} = \frac{1}{m} \cdot B^{-e}$, il suffit de connaître $\frac{1}{m}$; donc d'être capable de mettre en œuvre la méthode de Newton pour ce calcul.

Puisque $m \in [\frac{1}{B}, 1[$, son inverse $\frac{1}{m} \in]1, B]$ et $\frac{2}{m} \in]2, 2B]$. En conséquence on peut prendre $u_0 = 1$ comme valeur d'initialisation de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ permettant le calcul de $\frac{1}{m}$.

Exemple :

Pour calculer le quotient $Q = 0.42 \cdot 10^7 / 0.37 \cdot 10^{-11}$ il faut d'abord déterminer l'inverse de 0.37 .

En procédant par la méthode de Newton et en utilisant le logiciel Maple pour faire les calculs, on obtient :

```

> Phi:=x->x*(2-m*x);
m:=0.37;
n:=7;
u:=1;
for k from 1 to n do
u:=Phi(u);
od;
inverse_de_m =1/m;

Phi := x -> x (2 - m x)
m := .37
n := 7
u := 1
u := 1.63
u := 2.276947
u := 2.635633573
u := 2.701038344
u := 2.702701679
u := 2.702702703
u := 2.702702703
inverse_de_m = 2.702702703

```

On constate qu'à partir de u_6 la suite est, en apparence, stationnaire.

Le résultat cherché est donc : $Q = 2.702702703 \times 0.42 \cdot 10^{18}$.

Annexe3 : La controverse entre Newton et Leibniz :

Au début du dix-huitième siècle, les académies royales de Londres et de Paris ont entretenue une polémique sur la question : "qui de Newton ou Leibniz est l'inventeur du calcul différentiel".

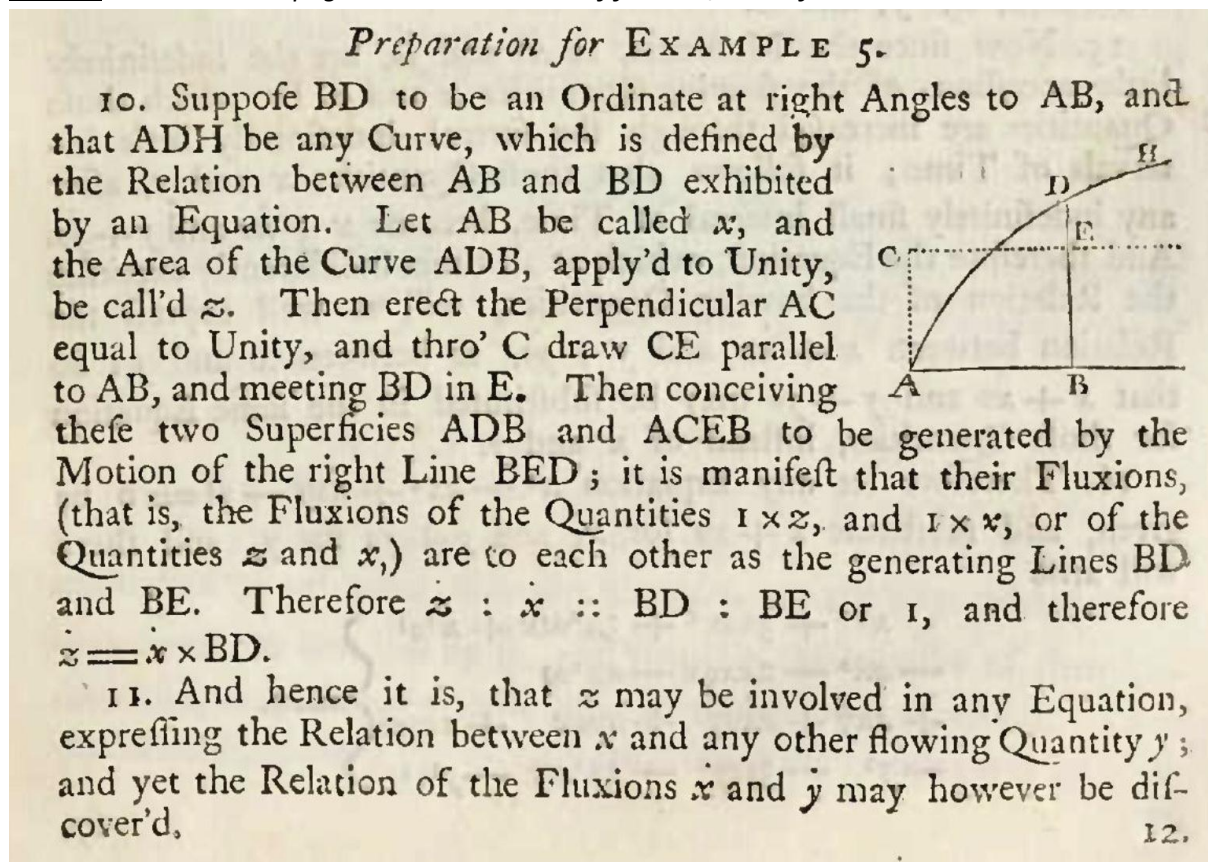
Les points de vue de chacun des protagonistes ont déjà été évoqués, brièvement, en note de bas de page. La publication tardive et même posthume de la théorie des fluxions ne plaide pas en faveur de Newton. Mais on sait, par sa correspondance, que son manuscrit (en latin) était achevé en 1671. Jusqu'en 1772 Leibniz était un "novice" en mathématiques. C'est lors d'un voyage diplomatique à Paris et d'une rencontre avec Huygens que ce dernier lui fera découvrir les œuvres de Descartes, Pascal Barrow, Gregory, mais il ignorera, jusqu'en 1676, les travaux de Newton puisque ceux-ci n'étaient pas encore publiés. Leibniz assimilera très vite cette "nouvelle géométrie" et, dès 1675, aura sa propre idée du calcul différentiel. Il publiera en 1684 sa théorie dans *Acta Eruditorum*.

Il faut aussi signaler (bien que ce soit sans rapport avec la résolution des équations numériques), qu'on trouve à la page 23 de the *method of fluxions and infinite series* le calcul de "l'aire sous la courbe" comme application de la théorie des fluxions.

Cette aire est la quantité notée z . Newton montre que la fluxion \dot{z} vérifie $\dot{z} = \dot{x} \times BD$, où (voir annexes 3 et 4) D est le point de la courbe d'abscisse B .

En langage moderne, si on note $A(x)$ l'aire sous la courbe d'équation $y = f(x)$, ce résultat est l'équivalent de : " $A(x)$ est dérivable et $A'(x) = f(x)$ ".

Annexe 4 : Extrait de la page 23 de *The method of fluxions, and infinite series*.

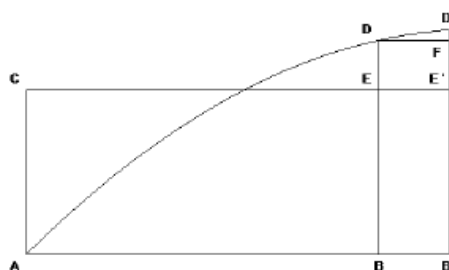


Explication de l'extrait de la page 23 de *The method of fluxions, and infinite series*.

La méthode des fluxions appliquée à l'aire sous la courbe

Soit τ un intervalle de temps infiniment petit,
 $\dot{x} \cdot \tau$ et $\dot{z} \cdot \tau$ accroissements infiniment petits de x et z ,
 $x = AB$ et z est l'aire sous la courbe ABD .

On peut donc écrire : $z + \dot{z} \tau = z + BD \dot{x} \tau + DFD'$



en désignant par DFD' l'aire du triangle curviligne de sommet D , D' (point de la courbe infiniment près de D) et F (point d'intersection de la parallèle à AB passant par D et de la parallèle à BD passant par D').

En désignant par y la fluente BD (ce que Newton ne fait pas dans ce passage mais utilise ailleurs, notamment dans l'exemple 5) puis en négligeant le terme DFD' qui est, évidemment, majoré par $\dot{x} \tau \times \dot{y} \tau$ on obtient le résultat cherché : $\dot{z} = BD \dot{x}$.

and INFINITE SERIES.

12. Also the Order of the Terms may be inverted in this manner $xx + aa$, in which case the Root will be found to be

$$x + \frac{aa}{2x} - \frac{a^4}{8x^3} + \frac{a^6}{16a^5} - \frac{5a^8}{128x^7} \&c.$$

13. Thus the Root of $aa - xx$ is $a - \frac{xx}{2a} - \frac{x^4}{8a^3} - \frac{x^6}{16a^5} \&c.$

14. The Root of $x - xx$ is $x^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}x^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{8}x^{\frac{5}{2}} - \frac{1}{128}x^{\frac{7}{2}}, \&c.$

15. Of $aa + bx - xx$ is $a + \frac{bx}{2a} - \frac{xx}{2a} - \frac{b^2x^2}{8a^3}, \&c.$

16. And $\sqrt{\frac{1+axx}{1-bxx}}$ is $\frac{1 + \frac{1}{2}ax^2 - \frac{1}{8}a^2x^4 + \frac{1}{128}a^3x^6, \&c.}{1 - \frac{1}{2}bx^2 - \frac{1}{8}b^2x^4 - \frac{1}{128}b^3x^6, \&c.}$ and moreover by actually dividing, it becomes

$$\begin{aligned} &1 + \frac{1}{2}bx^2 + \frac{3}{8}b^2x^4 + \frac{5}{128}b^3x^6, \&c. \\ &+ \frac{1}{2}a + \frac{1}{4}ab + \frac{1}{128}ab^2 \\ &\quad - \frac{1}{8}a^2 - \frac{1}{128}a^2b \\ &\quad \quad + \frac{1}{128}a^3 \end{aligned}$$

17. But these Operations, by due preparation, may very often be abbreviated; as in the foregoing Example to find $\sqrt{\frac{1+axx}{1-bxx}}$, if the Form of the Numerator and Denominator had not been the same, I might have multiply'd each by $\sqrt{1-bxx}$, which would have produced $\frac{\sqrt{1+ax^2-abx^4}}{1-bxx}$, and the rest of the work might

have been performed by extracting the Root of the Numerator only, and then dividing by the Denominator.

18. From hence I imagine it will sufficiently appear, by what means any other Roots may be extracted, and how any compound Quantities, however entangled with Radicals or Denominators, (such

as $x^3 + \frac{\sqrt{x - \sqrt{1-xx}}}{\sqrt{axx + x^3}} - \frac{\sqrt{x^3 + 2x^5 - x^{\frac{7}{2}}}}{\sqrt{x + xx - \sqrt{2x - x^{\frac{2}{3}}}}}$) may be reduced to infinite Series consisting of simple Terms.

Of the Reduction of affected Equations.

19. As to affected Equations, we must be something more particular in explaining how their Roots are to be reduced to such Series as these; because their Doctrine in Numbers, as hitherto deliver'd by Mathematicians, is very perplexed, and incumber'd with superfluous Operations, so as not to afford proper Specimens for performing the Work in Species. I shall therefore first shew how the
Resolu-

Resolution of affected Equations may be compendiously perform'd in Numbers, and then I shall apply the same to Species.

20. Let this Equation $y^3 - 2y - 5 = 0$ be proposed to be resolved, and let 2 be a Number (any how found) which differs from the true Root less than by a tenth part of itself. Then I make $2 + p = y$, and substitute $2 + p$ for y in the given Equation, by which is produced a new Equation $p^3 + 6p^2 + 10p - 1 = 0$, whose Root is to be sought for, that it may be added to the Quote. Thus rejecting $p^3 + 6p^2$ because of its smallness, the remaining Equation $10p - 1 = 0$, or $p = 0,1$, will approach very near to the truth. Therefore I write this in the Quote, and suppose $0,1 + q = p$, and substitute this fictitious Value of p as before, which produces $q^3 + 6,3q^2 + 11,23q + 0,061 = 0$. And since $11,23q + 0,061 = 0$ is near the truth, or $q = -0,0054$ nearly, (that is, dividing $0,061$ by $11,23$, till so many Figures arise as there are places between the first Figures of this, and of the principal Quote exclusively, as here there are two places between 2 and $0,005$) I write $-0,0054$ in the lower part of the Quote, as being negative; and supposing $-0,0054 + r = q$, I substitute this as before. And thus I continue the Operation as far as I please, in the manner of the following Diagram :

$y^3 - 2y - 5 = 0$	$+ 2,10000000$ $- 0,00544852$ $+ 2,09455148, \&c. = y$
$2 + p = y.$ $+ y^3$ $- 2y$ $- 5$	$+ 8 + 12p + 6p^2 + p^3$ $- 4 - 2p$ $- 5$
The Sum	$- 1 + 10p + 6p^2 + p^3$
$0,1 + q = p.$ $+ p^3$ $+ 6p^2$ $+ 10p$ $- 1$	$+ 0,001 + 0,03q + 0,3q^2 + q^3$ $+ 0,06 + 1,2 + 6,$ $+ 1, + 10,$ $- 1,$
The Sum	$0,061 + 11,23q + 6,3q^2 + q^3$
$-0,0054 + r = q.$ q^3 $+ 6,3q^2$ $+ 11,23q$ $+ 0,061$	$- 0,000000157464 + 0,00008748r - 0,0162r^2 + r^3$ $+ 0,000183708 - 0,06804 + 6,3$ $- 0,060642 + 11,23$ $+ 0,061$
The Sum	$+ 0,0005416 + 11,162r$
$-0,00004852 + s = r.$	

21. But the Work may be much abbreviated towards the end by this Method, especially in Equations of many Dimensions. Having first determin'd how far you intend to extract the Root, count so many places after the first Figure of the Coefficient of the last Term. but one, of the Equations that result on the right side of the Diagram, as there remain places to be fill'd up in the Quote, and reject the Decimals that follow. But in the last Term the Decimals may be neglected, after so many more places as are the decimal places that are fill'd up in the Quote. And in the antepenultimate Term reject all that are after so many fewer places. And so on, by proceeding Arithmetically, according to that Interval of places: Or, which is the same thing, you may cut off every where so many Figures as in the penultimate Term, so that their lowest places may be in Arithmetical Progression, according to the Series of the Terms, or are to be suppos'd to be supply'd with Cyphers, when it happens otherwise. Thus in the present Example, if I desired to continue the Quote no farther than to the eighth place of Decimals, when I substituted $0,0054 + r$ for q , where four decimal places are compleated in the Quote, and as many remain to be compleated, I might have omitted the Figures in the five inferior places, which therefore I have mark'd or cancell'd by little Lines drawn through them; and indeed I might also have omitted the first Term r^3 , although its Coefficient be $0,99999$. Those Figures therefore being expunged, for the following Operation there arises the Sum $0,0005416 + 11,162r$, which by Division, continued as far as the Term prescribed, gives $-0,00004852$ for r , which compleats the Quote to the Period required. Then subtracting the negative part of the Quote from the affirmative part, there arises $2,09455148$ for the Root of the proposed Equation.

22. It may likewise be observed, that at the beginning of the Work, if I had doubted whether $0,1 + p$ was a sufficient Approximation to the Root, instead of $10p - 1 = 0$, I might have suppos'd that $6p^2 + 10p - 1 = 0$, and so have wrote the first Figure of its Root in the Quote, as being nearer to nothing. And in this manner it may be convenient to find the second, or even the third Figure of the Quote, when in the secondary Equation, about which you are conversant, the Square of the Coefficient of the penultimate Term is not ten times greater than the Product of the last Term multiply'd into the Coefficient of the antepenultimate Term. And indeed you will often save some pains, especially in Equations of many Dimensions, if you seek for all the Figures

to.

6

M E T H O D E

XII. En changeant l'ordre des Termes, c'est-à-dire en écrivant $xx + aa$, la Racine fera $x + \frac{aa}{2x} - \frac{a^4}{8x^3} + \frac{a^6}{16x^5} - \frac{5a^8}{128x^7}$, &c.

XIII. Ainsi la Racine de $aa - xx$ est $a - \frac{xx}{2a} - \frac{x^4}{8a^3} - \frac{x^6}{16a^5}$, &c.

XIV. La Racine de $x - xx$ est $x^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}x^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{8}x^{\frac{5}{2}} - \frac{1}{16}x^{\frac{7}{2}}$, &c.

XV. Celle de $aa + bx - xx$ est $a + \frac{bx}{2a} - \frac{xx}{2a} - \frac{b^2x^2}{8a^3}$, &c.

XVI. Et $\sqrt{\frac{1+axx}{1-bxx}}$ est $\frac{1 + \frac{1}{2}ax^2 - \frac{1}{8}a^2x^4 + \frac{1}{16}a^3x^6, \&c.}{1 - \frac{1}{2}bx^2 - \frac{1}{8}b^2x^4 - \frac{1}{16}b^3x^6, \&c.}$ & en divisant actuellement, on aura

$$\begin{aligned} &1 + \frac{1}{2}bx^2 + \frac{3}{8}b^2x^4 + \frac{5}{16}b^3x^6, \&c. \\ &+ \frac{1}{2}a + \frac{1}{4}ab + \frac{3}{16}ab^2 \\ &- \frac{1}{8}a^2 - \frac{1}{16}a^2b \\ &+ \frac{1}{16}a^3 \end{aligned}$$

XVII. Mais ces Opérations peuvent être abrégées par une préparation convenable. Dans l'Exemple précédent $\sqrt{\frac{1+axx}{1-bxx}}$, si la Forme du Numerateur & du Dénominateur n'avoit pas été la même, j'aurois pû les multiplier tous deux par $\sqrt{1-bxx}$, ce qui au-

roit produit $\frac{\sqrt{1+axx^2 - abx^4}}{1-bxx}$, auquel cas il ne reste plus qu'à extraire la Racine du Numerateur seulement, & la diviser par le Dénominateur.

XVIII. Je m'imagine qu'en voilà assez pour faire connoître comment on peut extraire les autres Racines, quelque compliquées qu'elles soient, comme

$$x^3 + \frac{\sqrt{x - \sqrt{1-xx}}}{\sqrt{axx + x^3}} - \frac{\sqrt{x^3 + 2ax - x^2}}{\sqrt{x + xx - \sqrt{2x - x^2}}}$$

& les reduire à une suite infinie de Termes Simples.

De la Reduction des Equations Affectées.

XIX. Il faut que nous entrions dans un détail un peu plus grand, pour expliquer comment on doit reduire les Racines de ces Equations à des suites infinies; car ce que les Géomettres nous ont donné

sur les Equations en Nombres, est extrêmement embarassé, & chargé d'Opérations superflues; de sorte qu'on ne peut prendre sur cela un bon Modele pour faire les mêmes Opérations en Especies. Je ferai donc voir d'abord comment se doit faire en Nombres la Reduction des Equations Affectées, & ensuite j'appliquerai la Methode aux Especies.

XX. Soit l'Equation $y^3 - 2y - 5 = 0$ à reduire en suite infinie, prenez un Nombre comme 2, qui ne differe pas d'une de ses dixiemes Parties de la vraie valeur de la Racine, & faites $2 + p = y$, substituez $2 + p$ pour y dans l'Equation donnée, & vous aurez $p^3 + 6p^2 + 10p - 1 = 0$, dont il faut chercher la Racine pour l'ajouter au Quotient; rejetez $p^3 + 6p^2$ à cause de sa petitesse, il restera $10p - 1 = 0$, ou $p = 0,1$, ce qui est très-près de la vraie valeur de p ; c'est pourquoi l'écrivant au Quotient, je fais $0,1 + q = p$, & substituant comme auparavant, j'ai $q^3 + 6,3q^2 + 11,23q + 0,061 = 0$, négligeant les deux premiers Termes, il reste $11,23q + 0,061 = 0$, ou $q = -0,0054$ à peu près (& cela en divisant 0,061 par 11,23 jusqu'à ce qu'on ait autant de Figures qu'il y a de places entre les premieres Figures de ce Quotient & le principal Quotient exclusivement, comme ici où il a deux places entre 2 & 0,005) J'écris donc $-0,0054$ dans le Quotient, mais au-dessous parce que ce Terme est Négatif; & supposant $-0,0054 + r = q$, je substitue comme auparavant, & je continue ainsi l'Opération aussi long-tems qu'il convient, comme on le peut voir ci-dessous.

$y^3 - 2y - 5 = 0$		+ 2,10000000	
		- 0,00544852	
		+ 2,09455148, &c. = y	
$2 + p = y$	+ y^3	+ 8 + 12p + 6p ² + p ³	
	- 2y	- 4 - 2p	
	- 5	- 5	
SOMME.		- 1 + 10p + 6p ² + p ³	
$0,1 + q = p$	+ p^3	+ 0,001 + 0,03q + 0,3q ² + q ³	
	+ 6p ²	+ 0,06 + 1,2 + 6	
	+ 10p	+ 1, + 10,	
	- 1	- 1,	
SOMME.		+ 0,061 + 11,23q + 6,3q ² + q ³	
$-0,0054 + r = q$	+ q^3	- 0,0000001577464 + 0,000087421 - 0,000212 + 1	
	+ 6,3q ²	+ 0,000183708 - 0,06804 + 6,3	
	+ 11,23q	- 0,060642 + 11,23	
	+ 0,061	+ 0,061	
SOMME.		+ 0,0005416 + 11,1627	
$-0,00004852 + s = r$			

XXI. On peut abréger le Calcul vers la fin de l'Opération, & cela principalement dans les Equations qui ont plusieurs Dimensions; vous déterminerez d'abord jusqu'où vous voulez pousser votre Extraction, c'est-à-dire combien vous voulez que le Quotient contienne de Chiffres; ensuite vous compterez autant de Chiffres moins un après la première Figure du Coefficient du dernier Terme des Equations, qu'il reste de Places à remplir dans le Quotient, & vous rejetterez les Decimales qui suivent; dans le dernier Terme il faudra négliger les Decimales qui seront au-delà du nombre des Figures du Quotient; dans le Terme antepenultième toutes celles qui seront en-deçà de ce même nombre de Figures, en procédant ainsi Arithmétiquement, suivant l'intervalle des Chiffres; ou bien, ce qui est la même chose, vous couperez par-tout autant de Figures que dans le terme pénultième; de sorte que leurs Places les plus éloignées soient en progression Arithmétique, selon la suite des Termes, ou soient supposées remplies de Chiffres, lorsque cela arrive autrement. Ainsi dans l'exemple ci-dessus, si je ne veux pas pousser mon Extraction, ou continuer mon Quotient plus loin que la huitième Figure des Decimales; lorsque j'aurai substitué $0,0054 + r$ pour q , il y aura dans le Quotient quatre Places de Decimales remplies, & autant qui demeureront à remplir; je puis donc négliger les Figures dans les cinq places les plus éloignées, & c'est pour cela que je les ai croisées de petites lignes; & à la vérité j'aurois pu négliger aussi le premier Terme r ; quoique son Coefficient soit $0,99999$, &c. Ainsi en ne tenant plus compte de ces Figures, l'on aura dans l'Opération ci-dessus $0,0005416 + 11,162r$ pour la somme, ce qui par la Division continuée aussi loin que le terme prescrit, donne pour la valeur de r , $-0,00004852$, ce qui remplit le Quotient jusqu'au Terme prescrit; il ne reste qu'à soustraire le Négatif du Quotient de l'Affirmatif, & l'on aura $2,09455148$ pour la Racine de l'Equation proposée.

XXII. On peut aussi remarquer que si l'on soupçonnoit au commencement de l'Opération que $0,1 = p$ ne donnât pas une assez grande approximation de la vraie valeur de la Racine, il faudroit au lieu de $10p - 1 = 0$ faire $6p^2 + 10p - 1 = 0$, & écrire dans le Quotient la première Figure de la Racine de cette Equation; il convient donc de trouver ainsi la deuxième & même la troisième Figure du Quotient, lorsque dans les Equations secondaires le Carré du Coefficient du Terme pénultième n'est pas dix fois plus grand que le produit du dernier Terme multiplié par le Coefficient de l'antepenultième. On s'épargnera souvent bien du travail, sur-tout dans les Equations de plusieurs

The Terms being dispos'd in order, the first Term of the Series $3a^2p$ will be x^3 , which will make the first Term of p to be $\frac{x^3}{3a^2}$. This will make the first Term of p^2 to be $\frac{x^6}{9a^4}$. And this will make the first Term of $3ap^2$ to be $\frac{x^6}{3a^3}$, which with a contrary Sign must be the second Term of $3a^2p$, and therefore the second Term of p will be $-\frac{x^6}{9a^3}$. Then (by squaring) the second Term of $3ap^2$ will be $-\frac{2x^9}{9a^6}$, and (by cubing) the first Term of p^3 will be $\frac{x^9}{27a^6}$. These being collected make $-\frac{5x^9}{27a^6}$, which with a contrary Sign must be the third Term of $3a^2p$, and therefore the third Term of p will be $+\frac{5x^9}{81a^8}$. Then by squaring, the third Term of $3ap^2$ will be $\frac{13x^{12}}{81a^9}$, and by cubing, the second Term of p^3 will be $-\frac{x^{12}}{27a^9}$, which being collected will make $\frac{10x^{12}}{81a^9}$; and therefore the fourth Term of $3a^2p$ will be $-\frac{10x^{12}}{81a^9}$, and the fourth Term of p will be $-\frac{10x^{12}}{243a^{11}}$. And so on.

And thus may the Roots of all pure Equations be extracted, but in a more direct and simple manner by the foregoing Theorems. All that is here intended, is, to prepare the way for the Resolution of affected Equations, both in Numbers and Species, as also of Fluxional Equations, in which this Method will be found to be of very extensive use. And first we shall proceed with our Author to the Solution of numerical affected Equations.

SECT. III. *The Resolution of Numeral Affected Equations.*

19. **N**OW as to the Resolution of affected Equations, and first in Numbers; our Author very justly complains, that before his time the *exegeſis numeroſa*, or the Doctrine of the Solution of affected Equations in Numbers, was very intricate, defective, and inartificial. What had been done by *Vieta*, *Harriot*, and *Oughtred* in this matter, tho' very laudable Attempts for the time, yet however was extremely perplex'd and operose. So that he had good reason to reject their Methods, especially as he has substituted a much better in their room. They affected too great accuracy in pursuing exact

exact Roots, which led them into tedious perplexities; but he knew very well, that legitimate Approximations would proceed much more regularly and expeditiously, and would answer the same intention much better.

20, 21, 22. His Method may be easily apprehended from this one Instance, as it is contain'd in his Diagram, and the Explanation of it. Yet for farther Illustration I shall venture to give a short *rationale* of it. When a Numeral Equation is propos'd to be resolv'd, he takes as near an Approximation to the Root as can be readily and conveniently obtain'd. And this may always be had, either by the known Method of Limits, or by a Linear or Mechanical Construction, or by a few easy trials and suppositions. If this be greater or less than the Root, the Excess or Defect, indifferently call'd the Supplement, may be represented by p , and the assumed Approximation, together with this Supplement, are to be substituted in the given Equation instead of the Root. By this means, (expunging what will be superfluous,) a Supplemental Equation will be form'd, whose Root is now p , which will consist of the Powers of the assumed Approximation orderly descending, involved with the Powers of the Supplement regularly ascending, on both which accounts the Terms will be continually decreasing, in a decuple ratio or faster, if the assumed Approximation be suppos'd to be at least ten times greater than the Supplement. Therefore to find a new Approximation, which shall nearly exhaust the Supplement p , it will be sufficient to retain only the two first Terms of this Equation, and to seek the Value of p from the resulting simple Equation. [Or sometimes the three first Terms may be retain'd, and the Value of p may be more accurately found from the resulting Quadratick Equation; &c.] This new Approximation, together with a new Supplement q , must be substituted instead of p in this last supplemental Equation, in order to form a second, whose Root will be q . And the same things may be observed of this second supplemental Equation as of the first; and its Root, or an Approximation to it, may be discover'd after the same manner. And thus the Root of the given Equation may be prosecuted as far as we please, by finding new supplemental Equations, the Root of every one of which will be a correction to the preceding Supplement.

So in the present Example $y^3 - 2y - 5 = 0$, 'tis easy to perceive, that $y = 2$ *ferè*; for $2 \times 2 \times 2 - 2 \times 2 = 4$, which should make 5. Therefore let p be the Supplement of the Root, and it will be $y = 2 + p$, and therefore by substitution $-1 + 10p + 6p^2 + p^3 = 0$. As p is here suppos'd to be much less than the Approximation 2,

B b 2

by

by this substitution an Equation will be form'd, in which the Terms will gradually decrease, and so much the faster, *cæteris paribus*, as 2 is greater than p . So taking the two first Terms, $-1 + 10p = 0$, *ferè*, or $p = \frac{1}{10}$ *ferè*; or assuming a second Supplement q , 'tis $p = \frac{1}{10} + q$ accurately. This being substituted for p in the last Equation, it becomes $0,61 + 11,23q + 6,3q^2 + q^3 = 0$, which is a new Supplemental Equation, in which all the Terms are farther depress'd, and in which the Supplement q will be much less than the former Supplement p . Therefore it is $0,61 + 11,23q = 0$, *ferè*, or $q = -\frac{0,61}{11,23}$ *ferè*, or $q = -0,0054 + r$ *accuratè*, by assuming r for the third Supplement. This being substituted will give $0,00054155 + 11,162r, \&c. = 0$, and therefore $r = -\frac{0,00054155}{11,162} = -0,00004852, \&c.$ So that at last $y = 2 + p = \&c.$ or $y = 2,09455148, \&c.$

And thus our Author's Method proceeds, for finding the Roots of affected Equations in Numbers. Long after this was wrote, Mr. *Raphson* publish'd his *Analysis Æquationum universalis*, containing a Method for the Solution of Numeral Equations, not very much different from this of our Author, as may appear by the following Comparison.

To find the Root of the Equation $y^3 - 2y = 5$, Mr. *Raphson* would proceed thus. His first Approximation he calls g , which he takes as near the true Root as he can, and makes the Supplement x , so that he has $y = g + x$. Then by Substitution $g^3 + 3g^2x + 3gx^2 + x^3 = 5$,
 $- 2g - 2$

or if $g = 2$, 'tis $10x + 6x^2 + x^3 = 1$, to determine the Supplement x . This being supposed small, its Powers may be rejected, and therefore $10x = 1$, or $x = 0,1$ nearly. This added to g or 2, makes a new $g = 2,1$, and x being still the Supplement, 'tis $y = 2,1 + x$, which being substituted in the original Equation $y^3 - 2y = 5$, produces $11,23x + 6,3x^2 + x^3 = -0,61$, to determine the new Supplement x . He rejects the Powers of x , and thence derives $x = \frac{-0,61}{11,23} = -0,0054$, and consequently $y = 2,0946$, which not being exact, because the Powers of x were rejected, he makes the Supplement again to be x , so that $y = 2,0946 + x$, which being substituted in the Original Equation, gives $11,162x + \&c. = -0,00054155$. Therefore to find the third Supplement x , he has $x = \frac{-0,00054155}{11,162} = -0,00004852$, so that $y = 2,0946 + x = 2,09455148, \&c.$ and so on.

By