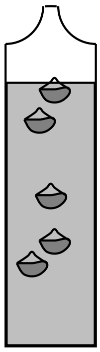
Brevet de technicien supérieur Métropole session 15 mai 2012 - groupement C

Exercice 1 **9 points**

Les trois parties de cet exercice peuvent être traitées indépendamment



Le thermomètre de Galilée est composé d'un cylindre en verre clos rempli d'un liquide dans lequel on a placé des petites boules de même volume et de masses différentes. Lorsque la température du liquide varie, les boules vont monter ou descendre, indiquant ainsi la température ambiante.

Partie 1

Lors de la construction d'un tel thermomètre, l'étude de la chute d'une boule dans un fluide conduit à l'équation différentielle :

$$(\mathrm{E}): \quad y' + \frac{1}{2}y = \frac{13}{2}$$

où y est une fonction de la variable t, définie et dérivable sur l'intervalle $[0~;~+\infty[$ et où y' est la fonction dérivée de y.

1. Résoudre l'équation différentielle $y' + \frac{1}{2}y = 0$.
2. Déterminer le réel k tel que la fonction g, définie sur $[0~;~+\infty[$ par $g(t) = k$, soit une solution particulière de l'équation (E).
3. En déduire l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E).
4. Déterminer la fonction f, définie sur $[0~;~+\infty[$, solution de l'équation différentielle (E) qui vérifie $f(0) = 0$.

Partie 2

On considère la fonction f définie sur $[0~;~+\infty[$ par

$$f(t) = 13\left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}t}\right).$$

Le plan est muni d'un repère orthogonal. La courbe représentative $\mathcal{C}$ de la fonction f est représentée sur le graphique joint en annexe 1, à rendre avec la copie.

1. Soit f' la fonction dérivée de la fonction f sur $[0~;~+\infty[$. Calculer $f'(t)$.
2. Étudier les variations de la fonction f sur l'intervalle $[0~;~+\infty[$.
3. Démontrer que $\mathcal{C}$ admet une asymptote horizontale $\mathcal{D}$ dont on précisera une équation.
4. Déterminer une équation de la tangente T à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 0. Tracer T sur le graphique joint en annexe 1, à rendre avec la copie.

Partie 3

On admet que la vitesse de chute de la boule à l'instant t est égale à $f(t)$. La vitesse est exprimée en mm.s^{-1} et le temps est donné en secondes.

1. Déterminer graphiquement à partir de quel instant la vitesse de chute de la boule dépasse 10 mm.s^{-1}.
2. Retrouver le résultat précédent par le calcul.
3. Calculer la vitesse moyenne V_m de chute de la boule entre les instants $t = 2$ et $t = 4$. On donnera une valeur exacte puis une valeur approchée à 0,01 près.
   On rappelle que $V_m = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_2^4 f(t)\,\mathrm{d}t$.

Exercice 2 **11 points**

Les quatre parties de cet exercice peuvent être traitées indépendamment

Une usine fabrique des pièces en bois dont la cote principale C doit être égale à 15 mm.

Partie A

Pour un réglage donné de la machine-outil qu'il utilise pour la réalisation de ces pièces, un opérateur s'est aperçu que la cote, obtenue dans les conditions de mise en œuvre sur un chantier, varie en fonction du taux d'humidité du bois, lors du travail en atelier. Il réalise quelques mesures, dont les résultats sont donnés dans le tableau suivant :

Rang i	1	2	3	4	5	6
t_i : taux d'humidité	11,2	11,6	12	12,4	12,8	13
C_i : cote (en mm)	15,25	15,17	15,07	14,93	14,82	14,81

Le nuage de cette série statistique $(t_i\ ;\ C_i)$ est donné en annexe 2, à rendre avec la copie.

1. Donner l'équation de la droite $\mathcal{D}$ d'ajustement de C en t, obtenue par la méthode des moindres carrés. Les coefficients seront arrondis à 10^{-3} près.
2. Tracer la droite $\mathcal{D}$ sur le graphique fourni en annexe 2, à rendre avec la copie.
3. Avec le réglage donné de la machine, si l'on se réfère à cet ajustement, donner, par la méthode de votre choix, le taux d'humidité du bois utilisé pour obtenir la cote attendue (c'est-à-dire 15 mm).

Partie B

Dans cette usine, on maintient dorénavant le taux d'humidité du bois à une valeur constante. Les pièces en bois sont fabriquées en grande série dans deux ateliers SUD et NORD.
L'atelier SUD produit 100 pièces par jour et l'atelier NORD produit 400 pièces par jour.
Après fabrication, on constate que 2 % des pièces produites par l'atelier SUD et 3 % de celles de l'atelier NORD présentent un défaut de finition.
À la fin de la journée, on choisit au hasard une pièce dans la production totale de la journée.
Calculer la probabilité que cette pièce ne présente aucun défaut de finition.

Partie C

On s'intéresse, dans cette partie, aux pièces fabriquées qui n'ont aucun défaut de finition.
On admet que la variable aléatoire qui donne la cote C des pièces suit une loi normale de moyenne 15 et d'écart type σ.
Une pièce est acceptée si sa cote se situe dans l'intervalle $[14{,}9\ ;\ 15{,}1]$.

1. Quelle est la probabilité qu'une pièce soit acceptée, lorsque $\sigma = 0,05$?
2. Déterminer la valeur de σ pour que la probabilité qu'une pièce soit refusée soit égale à $0,002$.

Partie D

Les responsables de l'usine souhaitent contrôler, à l'aide d'un test bilatéral au seuil de risque de 5 %, que la cote moyenne de l'ensemble des pièces de la production de l'usine est bien égale à 15 mm.
Pour cela, ils projettent de réaliser un tirage d'un échantillon de 50 pièces de la production.
On admet pour la suite que les tirages d'un tel échantillon sont des tirages avec remise.

1. Donner l'hypothèse nulle H_0 et l'hypothèse alternative H_1 qui seront utilisées pour ce test.

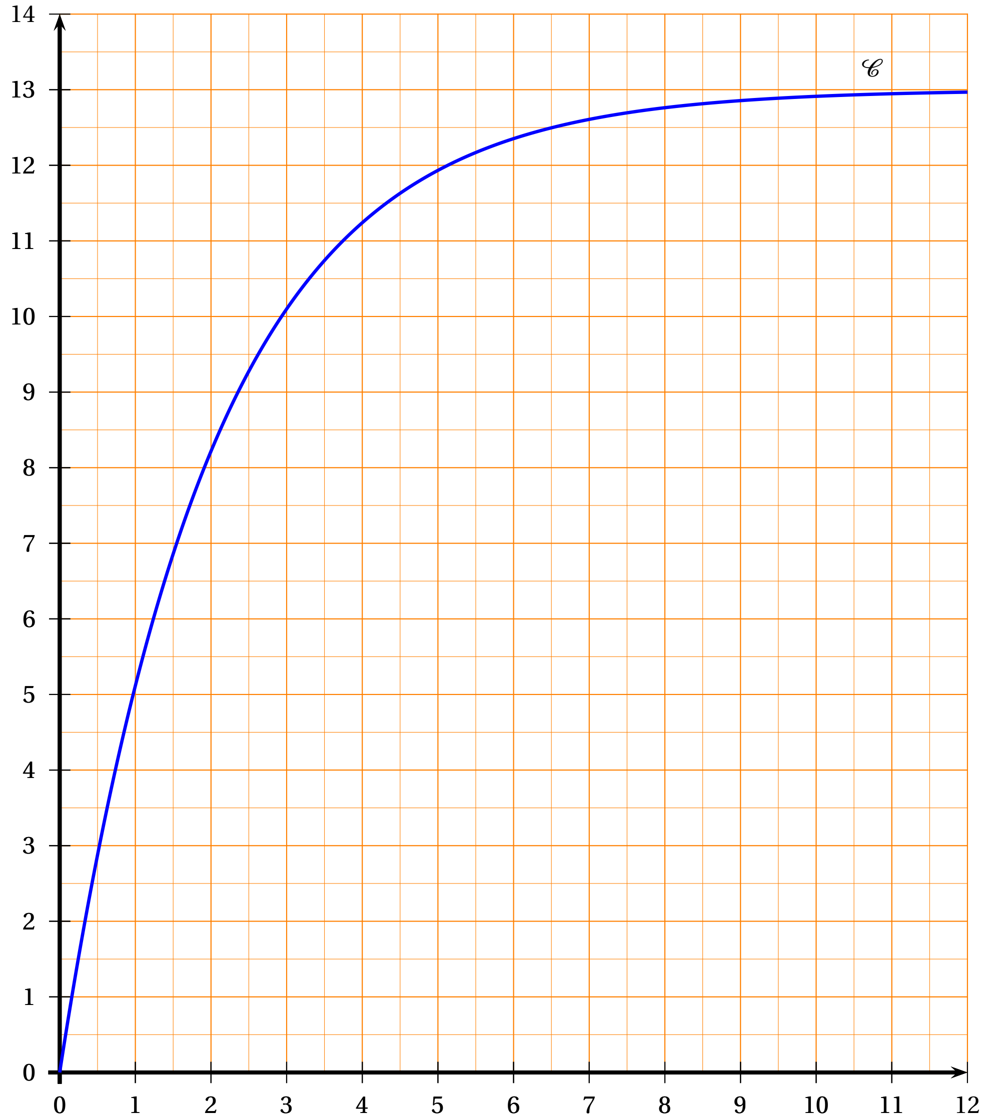
   On appelle $\overline{C}$ la variable aléatoire qui, à tout échantillon de 50 pièces, associe la cote moyenne des pièces de l'échantillon.

   On admet que, sous l'hypothèse nulle, $\overline{C}$ suit la loi normale de moyenne 15 et d'écart type $0,02$.
2. **a.** Déterminer le réel h tel que $P\left(15 - h \leqslant \overline{C} \leqslant 15 + h\right) = 0,95$.

   b. Énoncer la règle de décision du test.
3. Les responsables disposent, pour ce test, d'un échantillon de 50 pièces. La cote moyenne des pièces de cet échantillon est $15,02$.

   Au vu de cet échantillon, peuvent-ils considérer que la cote moyenne de l'ensemble des pièces de la production est égale à 15 mm ?

ANNEXE 1, À RENDRE AVEC LA COPIE



ANNEXE 2, À RENDRE AVEC LA COPIE