

Vers l'équation :

Toutes ces activités sont réunies pour proposer une progression, pour le collège, de programmes de calcul ayant pour objectif la résolution d'équation. Les premiers programmes de calculs permettent aux élèves de se familiariser avec l'outil. L'utilisation du calcul littéral n'est pas utile pour toutes les activités et l'introduction de la lettre est très progressive. Plusieurs pistes de résolution sont possibles : la méthode arithmétique comme la méthode algébrique.

Lien avec les programmes

1. Avant la lettre (cycle 3-début cycle 4)

- *Pratiquer le calcul mental*
- *Utiliser le vocabulaire : somme, différence, produit et quotient*
- *Utiliser différentes présentations pour communiquer les calculs*
- *Expliquer à l'oral ou à l'écrit*
- *Calculer*
- *Chercher*
- *Résoudre des équations simples du premier degré*

2. Pendant la lettre

- *Communiquer : Faire le lien entre le langage naturel et le langage algébrique*
- *Priorités de calculs et les propriétés des opérations*

1. Avant la lettre (cycle 3-début cycle 4)

- Faire parler les nombres : (sens des nombres ?)

Dans cette première partie, les programmes de calcul ne nécessitent pas le recours à la lettre. Les élèves vont traduire les programmes en utilisant des symboles ($?$; \dots ; \square) ou les résoudre en ayant recours au calcul mental.

Ce sont des programmes simples avec peu d'étapes de calculs.

Ils font travailler la pensée algébrique en s'intéressant aux relations mathématiques, plutôt qu'aux calculs.

Ils font travailler :

- Les liens entre les nombres
- Le vocabulaire des opérations : somme, différence, produit, quotient.
- Le vocabulaire des nombres : double, triple, moitié, tiers.
- Le sens des opérations

- Remonter un programme de calculs

Dans cette partie, on se limite ici aux équations du premier degré du type $ax + b = c$; a , b et c étant des nombres entiers.

Les programmes de calcul sont simples, avec peu d'étapes. Pour retrouver le nombre de départ à partir d'un résultat on peut mobiliser les opérations réciproques, en partant de la dernière étape du programme. On dit que l'on remonte le programme de calcul.

Dans le deuxième programme, on utilise des nombres relatifs.

Ils font travailler :

- Les opérations réciproques.
-

68 est la différence
entre ... et 17

Je pense à un nombre,
je lui enlève 12 et j'obtiens 34. Quel
est ce nombre ?

J'ajoute un nombre et son double, je
trouve 24. Quel est ce nombre ?

56 est la somme de 12
et de deux fois ...

Je choisis un nombre
Je le multiplie par 3
J'ajoute 7 au résultat.

Quel est le résultat si on choisit 7 ?

Si on choisit 9 ?

Quel nombre ai-je choisi si je trouve 22 ?

Si je trouve 14,5 ? Et si je trouve 9 ?

Je choisis un nombre.
Je le multiplie par -5
Puis j'ajoute 3 au résultat.

Quel est le résultat si je choisis 7 ? Si je
choisis -12 ?

Quel nombre ai-je choisi si je trouve
 -72 ?

2. Pendant la lettre

- Programme avec nécessité de transformer

Dans cette partie on utilise des programmes de calculs qui ne se remontent plus. En effet, on utilise à nouveau le nombre de départ dans une des étapes du programme.

Les élèves doivent transformer le programme de calcul en utilisant les priorités de calculs et les propriétés des opérations (distributivité, commutativité, associativité). L'objectif est d'obtenir un programme de calcul qui se remonte et qui avec le même nombre choisi, donne toujours le même résultat que celui de départ.

- Introduire la lettre

Cette partie met en jeu des équations du premier degré du type $ax + b = cx + d$, $a; b; c$ et d étant des nombres entiers. L'inconnue étant présente dans les deux membres, la méthode de résolution arithmétique est ici mise à mal. La méthode algébrique sera ici la méthode la plus pertinente. Ce sont les seules équations du collège qui ont besoin d'une méthode experte et qui ont recourt à l'utilisation de la lettre

Ce sont des énoncés qui se traduisent par l'égalité de deux programmes de calcul. Leur traduction en langage algébrique est une équation.

Les élèves doivent transformer cette équation en utilisant les propriétés des égalités (compatibilité avec l'addition et la multiplication).

Je choisis un nombre.

Je lui ajoute 3.

Je multiplie le résultat par 5.

Je soustrais le nombre de départ.

Quel nombre ai-je choisi si j'obtiens 35 ?

Si j'obtiens 25 ? Si j'obtiens 28 ?

Je choisis un nombre, je le multiplie

par 8 et j'ajoute 2 au produit.

Je trouve le même résultat que

lorsque je le multiplie par 3 et que

j'ajoute 9 au résultat.

Quel nombre ai-je choisi ?

Programme 1 :

Je choisis un nombre, je le multiplie

par 3 et j'ajoute 8 au résultat.

Programme 2 :

Je choisis le même nombre, je le

multiplie par 7 et j'ajoute 5 au

résultat.

Quels nombres dois-je choisir pour que les deux programmes donnent le même résultat ?

3. Après la lettre (fin cycle 4)

- Obtention de toutes les solutions

Cette partie, met en jeu des équations du second degré qui peuvent être résolues en fin de troisième ou seconde en se ramenant à des équations produit nul. Cette tâche permet de donner du sens à la factorisation et à l'utilisation des identités remarquables.

Les élèves peuvent trouver des solutions de manières empiriques mais le recours à l'algèbre est obligatoire pour que les élèves trouvent toutes les solutions de l'équation.

Je choisis un nombre.

Je le multiplie par 2

Je soustrais 3.

Je prends le carré du résultat

Quels nombres choisir pour trouver 0 ?

Quels nombres choisir pour trouver 25 ?

Programme 1

Je choisis un nombre.

J'ajoute 3.

Je multiplie le résultat par le double
du nombre de départ.

Programme 2

Je choisis le même nombre.

J'ajoute 3.

Je multiplie le résultat par 4.

Quels nombres dois-je choisir pour que
les deux programmes donnent le même
résultat ?

<p>Consigne :</p> <div style="border: 2px solid purple; border-radius: 15px; padding: 10px; margin: 10px 0; text-align: center;"> <p>68 est la différence entre ... et 17</p> </div> <div style="border: 2px solid purple; border-radius: 15px; padding: 10px; margin: 10px 0;"> <p>Je pense à un nombre, je lui enlève 12 et j'obtiens 34. Quel est ce nombre ?</p> </div> <div style="border: 2px solid purple; border-radius: 15px; padding: 10px; margin: 10px 0; text-align: center;"> <p>J'ajoute un nombre et son double, je trouve 24. Quel est ce nombre ?</p> </div> <div style="border: 2px solid purple; border-radius: 15px; padding: 10px; margin: 10px 0; text-align: center;"> <p>56 est la somme de 12 et de deux fois ...</p> </div>	<p>Place dans la progression de « Vers les équations » :</p> <p>Avant la lettre (fin de cycle 3 – début de cycle 4)</p> <p>Chaque programme fait l'objet d'une Mise En TRAIN.</p> <hr/> <p>Objectifs :</p> <ul style="list-style-type: none"> - Créer des automatismes de calcul sur la résolution d'équation du type $x + a = b$ ou $ax = b$. - Préparer à l'entrée dans l'algèbre - Développer la pensée algébrique - Travailler le vocabulaire des opérations et des nombres - S'habituer à utiliser l'objet programme de calcul
--	--

Analyse :

Pour ces énoncés, nous utilisons à la fois du langage naturel et du langage symbolique.

Certains exercices peuvent être faits par oral, d'autres par écrit.

On veut que les élèves manipulent les nombres, commencent à recourir à des symboles, plutôt que d'écrire des égalités avec des lettres.

Les nombres cherchés sont des nombres entiers et donc accessibles facilement.

Ces programmes simples permettent de réactiver le vocabulaire et les liens entre les nombres.

- Le premier programme nécessite la compréhension de la structure de la phrase. Si pour les élèves, « différence » est synonyme de « soustraire », ils vont peut-être faire les erreurs suivantes : $68 - \dots = 17$ ou $68 - 17 = ?$
- Le deuxième programme est plus simple car les nombres et les opérations suivent la chronologie de la phrase. Les élèves doivent faire une traduction du programme de calcul. L'énoncé est générique des programmes de calculs qui vont être utilisés tout au long du collège.
- Le troisième programme reprend le vocabulaire des nombres (double, moitié, triple, tiers). Il permet de travailler sur la structure du nombre. Les élèves peuvent verbaliser qu'un nombre et son double donnent le triple, 24 est le triple de 8, 8 est le tiers de 24.
- Le dernier programme, comme le premier, est compliqué quant à sa formulation. L'élève doit trouver l'ordre des opérations effectuées pour pouvoir trouver la solution.

Ces programmes de calculs répondent aux exigences du programme de cycle 3 : « Les problèmes arithmétiques proposés au cycle 3 permettent d'enrichir le sens des opérations déjà abordées au cycle 2 et d'en étudier de nouvelles. Les procédures de traitement de ces problèmes peuvent évoluer en fonction des nombres en jeu et de

leur structure. Le calcul contribuant aussi à la représentation des problèmes, il s'agit de développer simultanément chez les élèves des aptitudes de calcul. »

Réactions d'élèves :

Plusieurs démarches émergent.

Les solutions étant entières, certains élèves vont les atteindre en faisant des essais non organisés.

D'autres élèves auront une méthode plus stratégique et utiliseront en acte la dichotomie pour affiner leurs réponses.

Les traces de recherches selon les démarches des élèves seront des opérations à trou, la représentation avec des flèches ou des symboles. Les élèves, lors de la mise en commun, vont voir la variété des présentations des réponses.

Un des objectifs lors de l'échange des procédures élèves est de verbaliser les opérations réciproques et leur ordre qui permettent de trouver le nombre cherché.

Les élèves ont beaucoup recours au langage naturel dans leurs explications pour représenter sans les écrire les égalités.

Point de vigilance :

La calculatrice n'est pas utile sur ce genre de programmes, ils peuvent être traités en calcul mental, ils sont simples et les réponses entières.

Il faudra veiller à débattre sur la rédaction des calculs et échanger sur les procédures adoptées dans de tels exercices.

Prolongements possibles :

Ces programmes de calculs s'utilisent durant tout le cycle 4. Selon la classe, on fera varier les nombres et le vocabulaire utilisés dans les programmes ainsi que leurs solutions.

Synthèse / Bilan :

Sur le vocabulaire des opérations et des nombres : Une différence est le résultat d'une soustraction, le double d'un nombre est ce nombre multiplié par 2, ...

Sur les procédures : Pour trouver une solution je peux faire des essais. Je peux organiser mes essais pour être plus performant.

Sur la représentation : L'utilisation des bulles permet de voir plus facilement quelle opération réciproque utilisée et dans quel ordre le faire.



Pour annuler l'effet de soustraire 7, je dois ajouter 7.

Sur la rédaction des calculs : Attention, de part et d'autre du signe égal je dois avoir la même valeur.

Consigne :

Je choisis un nombre
 Je le multiplie par 3
 J'ajoute 7 au résultat.

Quel est le résultat si on choisit 7 ?
 Si on choisit 9 ?
 Quel nombre ai-je choisi si je trouve 22 ?
 Si je trouve 14,5 ? Et si je trouve 9 ?

Place dans la progression :

Avant la lettre (début de cycle 4)

Objectifs :

- Remonter un programme de calcul
- Réfléchir aux priorités opératoires.

Analyse :

Faire tourner le programme dans un sens dans l'autre incite les opé réciproque

Plusieurs étapes donc importance de l'ordre

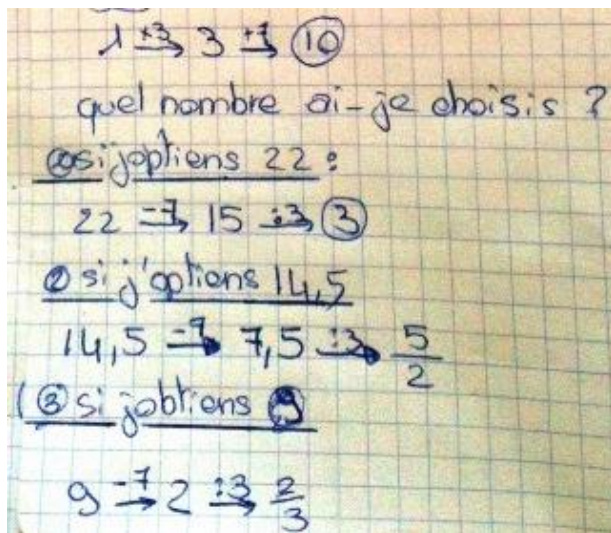
Dans ces problèmes, les élèves n'ont pas besoin de la lettre pour répondre, il suffit de remonter le calcul.

Pour annuler l'effet de "ajouter 7", je dois soustraire 7, pour annuler l'effet de la multiplication par 3, je dois diviser par 3. Les nombres choisis donnent un entier, un décimal et un rationnel (les élèves donnent plutôt la solution approchée 0,666).

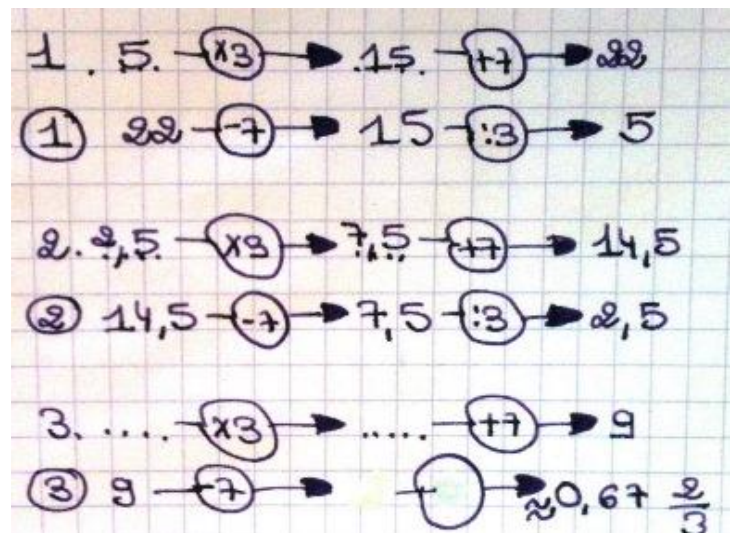
Réactions d'élèves :

Quelques élèves font des essais (5 est trouvé très rapidement) mais la plupart remontent les calculs.

Présentation du programme de calculs sous forme de flèches :

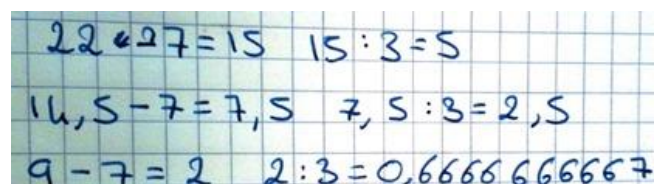


Les élèves font apparaître les opérations réciproques (le calcul est remonté)



Il faut réfléchir à l'ordre dans lequel on utilise les opérations réciproques

Au début les calculs sont remontés en plusieurs étapes



<p>10 30 37</p> <p>1) 7,3 car $22 \div 3 = 7,3$ $7,3 \times 3 = 21,9$</p>	
<p>Puis en une seule étape avec les priorités</p> <p>1.) si j'obtiens 22, c'est <u>5</u></p> $(22 - 7) \div 3 = 5$ <p>2.) si j'obtiens 14,5, c'est</p> $(14,5 - 7) \div 3 = \frac{5}{2}$ <p>3.) si j'obtiens 9, c'est</p> $(9 - 7) \div 3 = \frac{2}{3}$	

Point de vigilance :

Les nombres d'arrivée seront choisis en fonction de la classe où l'on propose le programme. Il faudra faire attention à ce que le nombre de départ ne soit pas un nombre négatif s'il est donné en 6ème ou en 5ème.

Dans ces problèmes, les élèves n'ont pas besoin de la lettre pour répondre, il suffit de remonter le calcul.

Prolongement possible :

Pour montrer la puissance de la stratégie « remonter un programme » par rapport à la stratégie de l'essai-ajustement, donner un nombre au hasard à la classe et demander aux élèves de trouver le nombre de départ le plus rapidement possible.

Synthèse / Bilan : (en plus de celle donnée dans les programmes précédents)

Pour "remonter un calcul" on utilise l'opération "réciproque" de chaque opération du programme en commençant par la dernière effectuée.

Consigne :

Je choisis un nombre.
Je le multiplie par -5
Puis j'ajoute 3 au résultat.

Quel est le résultat si je choisis 7 ? Si je
choisis -12 ?

Quel nombre ai-je choisi si je trouve
 -72 ?

Place dans la progression :

Avant la lettre (cycle 4)

Objectifs :

Analyse :

Réactions d'élèves :

Point de vigilance :

Synthèse / Bilan :

Consigne :

Je choisis un nombre.
Je lui ajoute 3.
Je multiplie le résultat par 5.
Je soustrais le nombre de départ.

Quel nombre ai-je choisi si j'obtiens 35 ?
Si j'obtiens 25 ? Si j'obtiens 28 ?

Place dans la progression :

Pendant la lettre

Objectifs :

Dans ce programme de calcul on ne peut pas utiliser les opérations réciproques pour remonter le programme. Il va être nécessaire de commencer par le modifier.

Analyse :

Les élèves n'ont pas besoin de la méthode experte de résolution d'équations, une fois le programme modifié, il leur suffit de remonter les calculs, ce programme peut donc être proposé dès la classe de 5ème.

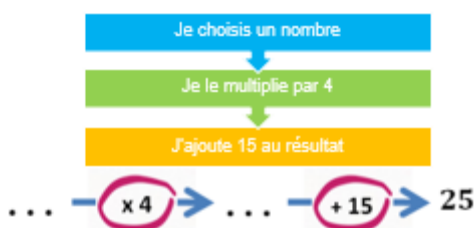
Pour ce programme on ne peut pas remonter le calcul à cause de la dernière étape dans laquelle intervient le nombre de départ.



Il est nécessaire de formuler le programme de calcul, donné "en mots", avec une expression littérale, que l'on va transformer à l'aide de la distributivité, jusqu'à ce que l'expression obtenue corresponde à un programme de calcul, qui lui peut être remonté.

$$(x + 3) \times 5 - x = 5x + 15 - x = 4x + 15$$

Le problème se ramène donc à un problème plus simple que l'élève sait résoudre.



Une fois le programme modifié, il suffit de remonter les calculs.

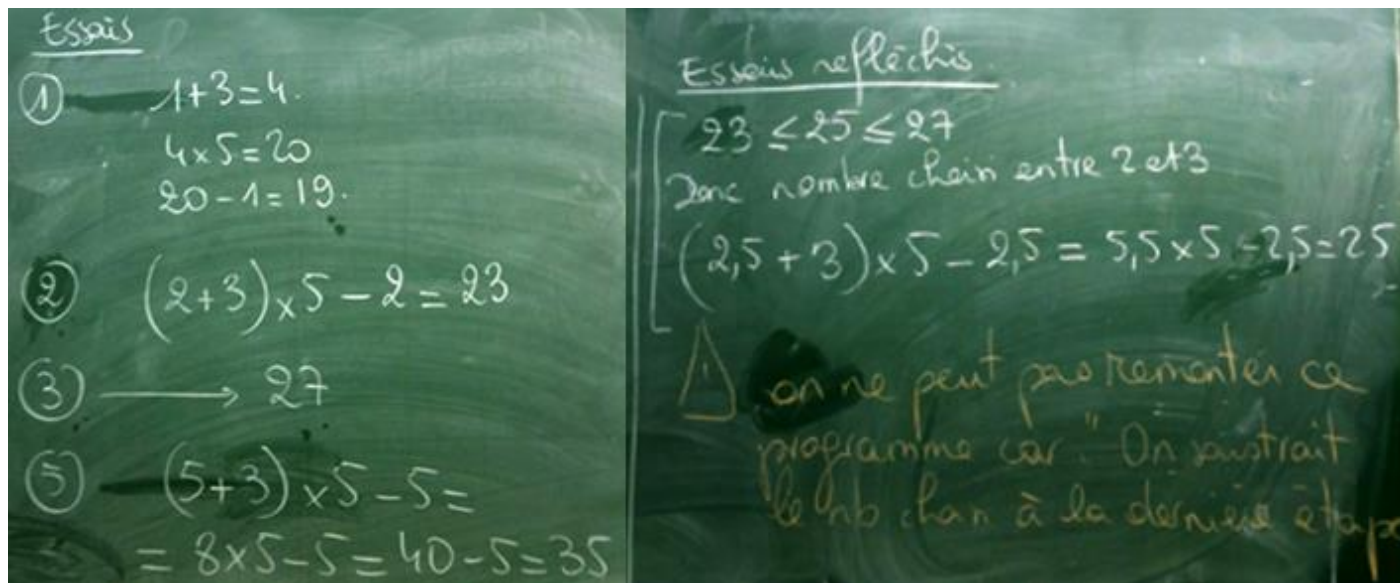
Il est important de proposer plusieurs fois ce type de programmes de calcul, en jouant sur les variables didactiques pour que les nombres cherchés soient difficilement accessibles par essais-erreurs, ce qui oblige à utiliser les expressions littérales.

Réactions d'élèves :

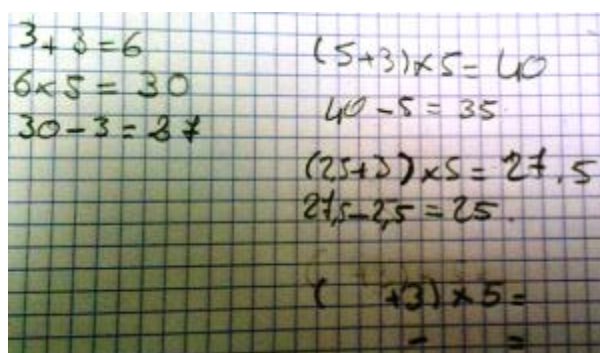
Le fait de soustraire le nombre choisi pose problème à de nombreux élèves qui oublient cette partie du calcul ou soustraient $x+3$

Les élèves pour la plupart font des essais en essayant de les organiser (« dichotomie ») le troisième nombre (3,25) pose davantage de problème même si de nombreux élèves ont pensé à essayer les nombres 3,1 ; 3,2 ; 3,3 Les idées pour organiser les essais sont notées au tableau.

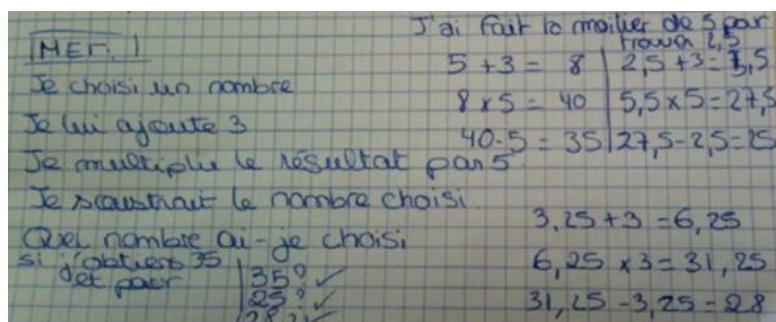
Pourtant, à l'oral, la raison pour laquelle ils n'ont pas remonté le calcul comme dans les séances précédentes émerge difficilement mais donne lieu à la synthèse suivante.



L'élève 1 tente une traduction sous forme d'opération à trou



L'élève 2 a une stratégie d'essais / erreurs



L'élève 3 essaye de remonter le calcul

L'élève 4 tente de simplifier le programme de calcul. Il n'écrit pas des égalités mathématiquement correctes, mais on voit le passage de la formulation du programme "en mots" à la formulation en expression littérale. Il modifie ensuite l'expression en utilisant la distributivité, mais ne sait pas terminer.

$$\begin{aligned}
 7 + 3 &= 10 \\
 10 \times 5 &= 50 \\
 50 - 7 &= 43 \\
 a) 4; & \neq 0 \\
 35 \div 5 &= 7 \\
 7 - 3 &= 4 \\
 4 \times 5 &= 20 \\
 25 \div 5 &= 5 \\
 5 - 3 &= 2 \\
 2 \times 5 &= 10
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 2 + 3 &= 5 & x + 3 &= x + 3 \\
 5 \times 5 &= 25 & x + 3 \times 5 &= x + 15 \\
 25 - 2 &= 23 & 5x + 15 &= x + 15 \\
 0 + 3 &= 3 & & \\
 3 \times 5 &= 15 & & \\
 15 - 0 &= 15 & &
 \end{aligned}$$

L'élève 5 modifie le programme de calcul, il utilise le langage algébrique, transforme son expression en mettant en œuvre la distributivité. Comme nous sommes en 5ème (ou début de 4ème) et qu'il ne maîtrise pas la résolution experte d'équations, on voit qu'ensuite il remonte le programme en utilisant les opérations réciproques.

~~$35 - 3 = 0$~~ x est n'importe quel nombre

$$\begin{aligned}
 (x + 3) \times 5 - x \\
 &= x \times 5 + 3 \times 5 - x \\
 &= x \times 5 + 15 - x \\
 &= 5x + 15 - x \\
 &= 4x + 15
 \end{aligned}$$

Diagram illustrating the reverse calculation process:

- $25 \xrightarrow{-3} 22 \xrightarrow{\div 4} 5,5$
- $5,5 \xrightarrow{+3} 8,5 \xrightarrow{\times 5} 42,5 \xrightarrow{-20} 22,5$
- $35 \xrightarrow{-3} 32 \xrightarrow{\div 4} 8$
- $5 \xrightarrow{+3} 8 \xrightarrow{\times 5} 40 \xrightarrow{-5} 35$
- $28 \xrightarrow{-3} 25 \xrightarrow{\div 4} 6,25$
- $3,25 \xrightarrow{+3} 6,25 \xrightarrow{\times 5} 31,25 \xrightarrow{-34} -2,75$

Point de vigilance :

Synthèse / Bilan :

- On ne peut pas remonter un programme de calcul si on utilise le nombre choisi à la dernière étape
- On peut faire des essais organisés
- On peut alors écrire l'expression du programme de calcul et utiliser la distributivité pour le transformer en un programme que l'on peut remonter

<p>Consigne :</p> <div style="border: 2px solid green; border-radius: 15px; padding: 10px; margin: 10px 0;"> <p>Je choisis un nombre, je le multiplie par 8 et j'ajoute 2 au produit. Je trouve le même résultat que lorsque je le multiplie par 3 et que j'ajoute 9 au résultat.</p> </div> <p>Quel nombre ai-je choisi ?</p>	<p>Place dans la progression :</p> <p>Pendant la lettre</p> <hr/> <p>Objectifs :</p>
--	--

Analyse :

Réactions d'élèves :

Point de vigilance :

Penser à trouver des exemples pertinents, càd des exemples où la mise en équation est nécessaire à la résolution.

Les élèves préféreront toujours faire des essais plutôt que d'utiliser le calcul littéral

Synthèse / Bilan :

Consigne :

Programme 1 :

Je choisis un nombre, je le multiplie
par 3 et j'ajoute 8 au résultat.

Programme 2 :

Je choisis le même nombre, je le
multiplie par 7 et j'ajoute 5 au
résultat.

Quels nombres dois-je choisir pour que
les deux programmes donnent le même
résultat ?

Place dans la progression :

Pendant la lettre

Objectifs :

Analyse :

Réactions d'élèves :

Point de vigilance :

Penser à trouver des exemples pertinents, c'est-à-dire des exemples où la mise en équation est nécessaire à la résolution.
Les élèves préféreront toujours faire des essais plutôt que d'utiliser le calcul littéral

Synthèse / Bilan :

Consigne :

Je choisis un nombre.

Je le multiplie par 2

Je soustrais 3.

Je prends le carré du résultat

Quels nombres choisir pour trouver 0 ?

Quels nombres choisir pour trouver 25 ?

Place dans la progression :

Après la lettre

Objectifs :

Analyse :

Réactions d'élèves :

Point de vigilance :

Synthèse / Bilan :

Consigne :

Programme 1

Je choisis un nombre.

J'ajoute 3.

Je multiplie le résultat par le double
du nombre de départ.

Programme 2

Je choisis le même nombre.

J'ajoute 3.

Je multiplie le résultat par 4.

Quels nombres dois-je choisir pour que
les deux programmes donnent le même
résultat ?

Place dans la progression :

Après la lettre

Objectifs :

Analyse :

Réactions d'élèves :

Point de vigilance :

Synthèse / Bilan :