Petite histoire couplée de l'exponentielle et de l'actuariat
Daniel Justens

Haute École Francisco Ferrer
IREM de Bruxelles
Place Anneessens, 11, B-1000 Bruxelles
Courriel : daniel.justens@brunette.brucity.be

1 Introduction

De nombreux modèles mathématiques économiques utilisés aujourd'hui intègrent des fonctions de type *exponentielles*. En particulier, les mathématiques de la finance et de l'assurance, que l'on qualifie de mathématiques *actuarielles*, exploitent pleinement les propriétés de ces fonctions indispensables.

C'est l'histoire difficile de la naissance et de la reconnaissance de ces exponentielles que nous proposons ici, dans ce contexte bien particulier de l'actuariat.

Les mathématiques actuarielles se sont développées progressivement dans trois directions, quantifiant trois catégories de risques à couvrir :

- l'actuariat de premier type, l'*actuariat viager*, est celui des assurances "vie[1]", modélisant les risques de décès et de survie de populations.
- L'actuariat de second type recouvre toutes les modélisations de risque accidentel et la théorie du risque.
- L'actuariat financier, récemment qualifié d'*actuariat de troisième type*, s'est développé de manière extraordinaire ces dernières décennies, débouchant sur des modèles mathématiques extrêmement so-

[1] Appelées ainsi par excès d'optimisme même lorsqu'elles couvrent un risque de décès...

phistiqués et dont la beauté intrinsèque ne laisse aucun de ses utilisateurs indifférents.

Avant de s'aventurer dans les plaines arides de l'actuariat, dans les marais méphitiques du commerce et de la finance, loin de la pureté des mathématiques, il est bon toutefois de s'interroger quelque peu sur les origines et la nature de notre système monétaire sans lequel il n'y aurait pas d'actuariat.

2 Origines et nature des transactions commerciales

2.1 Du troc au référentiel monétaire

Quels furent les débuts des activités commerciales ? A quel(s) moment(s) dans l'histoire de l'humanité, les échanges sociaux au sein d'un groupe se sont-ils progressivement transformés en véritables transactions à caractère économique? Il paraît raisonnable de supposer que le mode d'existence des groupes de chasseurs-cueilleurs vivant en autarcie presque totale, ne requérait pas d'activité commerciale proprement dite. Dans les groupes de ce genre, les produits obtenus par travail collectif étaient probablement l'objet d'un *partage* déliant les individus de toute obligation réciproque et n'engageant aucun rapport de dominance[2]. Dans ce contexte, les biens ne sont jamais confrontés entre eux et ne possèdent qu'une *valeur d'usage*. En revanche ils tendent à acquérir une valeur sociale.

L'échange se complique lorsque les marchandises échangées ne sont plus désirées pour satisfaire un besoin mais pour en acquérir d'autres. Lorsqu'une marchandise s'impose comme équivalent général permettant au sein d'un groupe l'acquisition de toute autre marchandise, elle commence à remplir en quelque sorte la fonction de monnaie. Et on peut dès lors parler de *protomonnaie* ou de *prémonnaie.*

La sédentarisation de l'être humain (il y aurait 8 à 10 000 ans) est sans doute le premier pas vers une diversification suffisante des activités justifiant le recours aux premiers trocs "non sociaux", c'est-à-dire comportant dans l'esprit des contractants un désir de profit. Car le troc revêt quant à lui et tout d'abord une fonction essentiellement sociale. On s'échange des biens de première nécessité. Ce procédé présente cependant de nombreux inconvénients. Lorsqu'une personne désire échanger un bien, elle doit impérativement trouver un interlocuteur possédant un bien d'une autre nature dont elle désire l'acquisition. Il faut aussi que cette personne soit disposée à l'échange, qu'elle soit intéressée par l'objet proposé et, enfin, que les biens soient considérés par les deux parties comme

[2]C. MEILLASSOU, Essai d'interprétation du phénomène économique dans les sociétés d'autosubsistance, Cah. Et. africaines, 4, 1960.

équivalents. Toutes ces conditions doivent impérativement être remplies lorsque l'on désire procéder au troc proprement dit.

L'activité commerciale est d'une autre nature : ne peut être considérée comme transaction commerciale que celle débouchant, dans le chef de l'un des contractants au moins, sur un échange permettant la réalisation d'un *profit* : l'un d'entre eux au moins négocie l'acquisition d'un bien sans intention de consommation immédiate, mais en vue d'un échange ultérieur. Mais depuis quand l'homme procède-t-il à une véritable activité commerciale ? Selon Louis René NOUGIER[3] les premiers villages dateraient de 7 000 à 5 000 BC. A Jéricho, au Nord de la mer Morte, des traces datées de 7 800 à 6 800 BC témoignent de la récolte de céréales. La présence de tours-silos confirme l'utilisation des graminées mais ne garantit pas l'existence d'une agriculture véritable. Byblos connait la production agricole vers 6 000 - 5 000 BC. En Grèce, à Néa Nicomédia, en 6 100 BC, le mouton, la chèvre et le porc sont domestiqués. En Egypte, la plus ancienne datation du Fayoum[4] est de 6 300 BC. Des traces de froment et d'orge (datation carbone 14) donnent respectivement 4 145 et 4 441 BC. L'activité industrielle est attestée en Europe dès le quatrième millénaire[5]. Nous nous tournons vers les premières civilisations mésopotamiennes pour découvrir les premiers contrats financiers.

2.2 Civilisations akadiennes

Les civilisations mésopotamiennes ont laissé de nombreuses traces écrites dont plusieurs confirment l'existence précoce d'une activité économique organisée. Dès le 4^{e} millénaire BC, on peut raisonnablement parler de l'existence d'une monnaie au sens économique du terme, la valeur des produits étant exprimée en faisant référence au cuivre et à l'orge. Comme le prétend G. BOYER[6], on peut parler de monnaie dès que l'on se trouve confronté à

> *des biens fongibles servant de commune mesure de la valeur et d'instrument d'échange indépendamment de l'utilité qu'ils présentent pour la satisfaction d'un besoin déterminé.*

Entre le Tigre et l'Euphrate, l'argent abonde dans les mines et s'impose tout naturellement en tant que métal de base au titre de moyen de transaction. Dès la 3^{e} dynastie d'Ur (environ 2100 BC), on découvre un système économique dans lequel la valeur des produits et le montant des salaires se trouvent exprimés en un certain poids d'or ou d'argent. Mais les lingots ne sont utilisés que pour les gros règlements et l'orge concurrence l'argent comme moyen d'épargne. Chez

[3] *L'économie préhistorique*, collection Que sais-je? PUF, 1970.
Du même auteur, *Naissance de la civilisation*, Lieu Commun, 1986.

[4] On rencontre parfois l'orthographe Fayoun.

[5] Voir Nougier, op. cit.

[6] *Nature et formation de la vente dans l'ancien droit babylonien*, RIDA 2, 1953, pp 45 -85.

les Hébreux, le sicle et le talent sont utilisés comme moyens de paiement et expriment une idée de poids. Le *sicle* (un peu plus de 8 grammes) vient de l'hébreu *se gala* (peser) et le talent (un peu plus de 34 kilos) vient du terme *tala* qui signifie "balance" dans l'idiome indo-européen. Il est d'ailleurs bien connu que le code d'Hammurabi[7](1750 - 1792 BC[8]) traite en détail de transactions sur base d'un intermédiaire métallique, et ce n'est pas le premier du genre[9] :

> *Si un agent d'affaire a livré à un commis du grain, de la laine, de l'huile ou une marchandise quelconque à débiter, le commis mettra à jour l'argent et le rendra à l'agent d'affaire. Il recevra alors de ce dernier un reçu de l'argent qu'il lui aura remis.*

Les dépenses en nourriture avaient beau être réduites au minimum, elles n'en demeuraient pas moins considérables eu égard aux faibles revenus. Tout aussi lourdes étaient les charges provenant de l'achat de semences, du renouvellement de l'équipement ainsi que la locations des travailleurs et des animaux. Aussi le paysan était-il souvent contraint d'emprunter. Les premiers prêts d'argent consignés et retrouvés datent de l'époque d'Hammurabi. On a pu découvrir à Sippar un texte cunéiforme en précisant les modalités et les garanties. Les taux d'intérêt annuels[10] pratiqués de manière courante à l'époque sont de 33.33 % pour les prêts exprimés en orge et de 20 % pour les prêts en argent. On vérifie que la différence entre les deux taux se justifie pleinement par la forte baisse du cours de l'orge à l'époque de la moisson qui était généralement celle des remboursements. On peut s'étonner de l'importance des intérêts mais il convient de relativiser. Dans un pays où les rendements agricoles sont de l'ordre de 30 ou 40 fois la quantité semée, les 33.33 % d'intérêt ne représentaient qu'environ 1 % de la moisson.

La nécessité de développer un véritable calcul financier s'est donc imposée très tôt. D'après Simone Trompler[11] on a retrouvé plusieurs exemples clairs d'usage d'interpolation linéaires de véritables tables d'exponentielles. Un *texte problème* demande ainsi après combien de temps un capital double lorsque le taux d'intérêt annuel est de 20 %. La réponse fournie, à

---

[7]paragraphe 104.

[8]Découvert par M. de Moragan à Suse en 1901. Ce bloc de 4 tonnes fut transporté par le roi élamite Shutruk-Nahhunte vers Suse en guise de trophée pour échouer enfin et miraculeusement au Musée du Louvre.

[9]On sait depuis 1947 qu'il fut précédé de plusieurs autres : le code d'Ur-Nammu (datant de 2100 BC) traduit en 1952 par Samuel Kramer et de celui de Lipit-Ishtar (datant de 1930 BC, découvert en 1930 et traduit en 1948 par Francis Steel.

[10]W. F. LEEMANS, The rate of interest in Old-Babylonian times, *RIDA*, 5, 7-34, 1950.

[11]Voir *L'histoire des logarithmes*, Cahiers du CeDoP, ULB, 2002.

savoir 3 ans 47/60, 13/3600, 20/216000[12] est clairement une interpolation linéaire entre les valeurs $(1.2)^3$ et $(1.2)^4$. En effet, on calcule :

$$3 + \frac{47}{60} + \frac{13}{3600} + \frac{20}{216000} = 3.7870$$

D'autre part, l'interpolation linéaire donne :

$$\frac{2 - (1.2)^3}{(1.2)^4 - (1.2)^3} = \frac{t - 3}{4 - 3}$$

dont on tire :

$$t = 3 + \frac{2 - (1.2)^3}{(1.2)^4 - (1.2)^3} = 3.7870$$

On ne peut qu'admirer la précision des calculs et surtout en conclure non seulement que le modèle exponentiel était maîtrisé pour des valeurs entières mais en plus qu'on en utilisait pour des valeurs intermédiaires une approximation linéaire qui correspond exactement à notre *capitalisation mixte* actuelle.

Simone Trompler cite également[13] une tablette reprenant les puissances de 225 (de 2 à 7), les puissances de 16 et de 100, établissant ainsi l'existence de véritables fonctions au sens modernes du type. La même source propose même des puissances fractionnaires et un texte provenant de Mari datant de 1700 BC mettant en correspondance la suite des puissances de deux et celle des exposants :

> *Un grain a fait augmenter un grain soit deux grains le premier jour, 4 grains le deuxième jour, 8 grains le troisième jour, ...*

Les problèmes de temps de doublement de capital trouvent parfois une solution plus originale comme en témoigne la tablette étiquetée VAT 8528 datant de la première dynastie babylonienne.

> *Une mine d'argent au taux de 12 sicles pour une mine j'ai prêté. J'ai reçu argent et son intérêt, un talent quatre mines. Combien de jours se sont écoulés.*

[12]Les babyloniens travaillaient en base 60 et maîtrisaient déjà une numération de position.

[13]sans référence hélas !.

Dans le système en base 60, une mine vaut 60 sicles. Le taux est encore une fois de 20 %. De même un talent vaut 60 mines. Notre capital a donc été multiplié par 64. Le scribe travaille ici à intérêts simples pour établir une période de doublement de 5 ans. Il remarque alors que cette opération de doublement doit encore avoir lieu 5 fois pour passer de 2 à 64, calculant de fait un logarithme en base 2. La durée totale est alors de 30 ans.

2.3 Civilisations grecques

Nous ne connaissons actuellement aucun texte traitant de l'exponentielle entre les Babyloniens et les écrits d'Archimède. Dans son *Arénaire*, ce dernier va développer de manière quasi exhaustive les puissances de 2 et tenter de donner une mesure du volume global de l'univers en déterminant le nombre de grains de sable susceptibles d'être contenus dans une sphère de la grandeur de notre univers.

Ce faisant, il manipule des nombres gigantesques et recourt aux puissances de 10. C'est dans cet écrit qu'il énonce la règle :

$$a^m \times a^n = a^{m+n}$$

dans un style que nous ne résistons pas au plaisir de reprendre[14].

> *Lorsque des nombres sont en proportion continue à partir de l'unité, et que certains de ces nombres sont multipliés entre eux, le produit sera dans la même progression, éloigné du plus grand des nombres multipliés d'autant de nombres que le plus petit des nombres multipliés l'est de l'unité dans la progression, et éloigné de l'unité de la somme moins un des nombres dont les nombres multipliés sont éloignés de l'unité.*

On ne peut que se réjouir de la clarté des notations modernes.

2.4 Renaissance Italienne

Les activités financières s'estompent pendant tout le Moyen-âge. Mais les problèmes de doublement de capital traités quelques millénaires plus tôt par les Babyloniens, vont se retrouver dans la *Summa de Arithmetica* publiée à Venise en 1494 par Fra Luca Pacioli en ces termes[15] :

[14] *Arénaire*, Traduction de Verecke.
[15] Fol. 181, n. 44.

> *A voler sapere ogni quantità a tanto per 100 I'anno, in quanti anni sarà tornata doppia tra utile e capitale, tieni per regola 72, a mente, il quale sempre partirai per l'interesse, e quello che ne viene, in tanti anni sarà raddoppiato. Esempio: Quando l'interesse è a 6 per 100 I'anno, dico che si parta 72 per 6; ne vien 12, e in 12 anni sarà raddoppiato il capitale.*

Ce résultat est extraordinaire et mérite que l'on s'y attarde. Avec nos notations modernes, le problème de doublement de capital s'écrit en utilisant l'intérêt composé :

$$C_0(1+i)^t = 2C_0$$

Ce qui donne bien évidemment :

$$t = \frac{ln(2)}{ln(1+i)}$$

En utilisant la capitalisation continue, on obtient cette fois :

$$C_0 e^{rt} = 2C_0$$

livrant

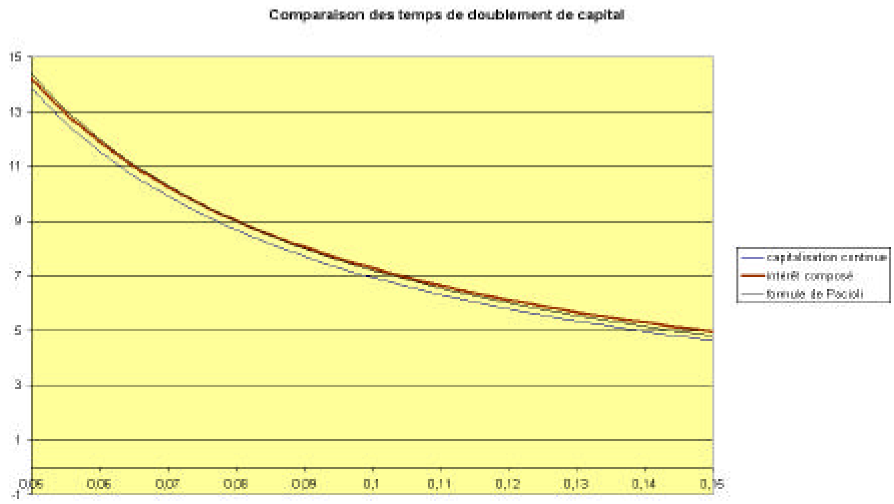
$$t = \frac{ln(2)}{r}$$

Mathématisons la formule préconisée par Pacioli. Elle revient, avec nos notations et en notant j le taux annuel utilisé, à proposer :

$$t = \frac{0.72}{j}$$

La comparaison entre ces deux dernières formules tendrait à première vue à considérer 0.72 comme une approximation de $ln(2)$. Mais tel n'est pas le cas. Les Vénitiens de la fin du 15^e siècle ne travaillaient pas avec la capitalisation continue mais bien avec l'intérêt composé. L'approximation serait d'ailleurs assez mauvaise puisque $\ln(2) = 0.693147$. Alors que la formule de doublement de capital proposée par Pacioli est excellente pour toute une catégorie de taux raisonnables.

Voyons comment se comportent les durées de doublement par capitalisation continue, intérêt composé et approximation de Pacioli :



On ne peut qu'admirer de quelle façon la branche d'hyperbole *colle* au quotient de logarithmes cherchés. Et comment la description continue en est systématiquement éloignée.

2.5 Invention des logarithmes

Il faut attendre 1614 pour que John Napier ne publie le *Mirifici logarithmorum descriptio* et ne mette en relation une suite arithmétique et une suite géométrique. Le but de l'opération est essentiellement pragmatique et tente de raccourcir par l'usage de tables des opérations d'une longueur décourageante. Dès ce moment les choses s'accélèrent et en 1617 le mathématicien londonien Hanry Briggs publie une table à 8 décimales qui ne diffère pas fondamentalement de celle que les élèves de lycée utilisaient encore voici 30 ans.

L'exponentielle est depuis lors maîtrisée. Notons toutefois que les problèmes financiers seront toujours traités de manière incorrecte et linéaire jusqu'en 1993, date à laquelle l'Etat belge imposera une description correcte et exponentielle de tout contrat à caractère financier.

2.6 Annexe littéraire : de l'intérêt composé

On peut découvrir dans les *Habits Noirs* de Paul Féval le très amusant dialogue que voici, décrivant la pratique de l'intérêt composé. Admirons comment l'auteur sait faire la différence entre le modèle mathématique et la réalité.

> *En 1825, Monsieur Schwartz arriva à Paris avec mille francs. Connaissez-vous les Halles? Monsieur Schwartz avait son idée. Dans la rue de la Ferronnerie, il loua une chambre. Il y avait aux Halles un vieux Schwartz qui donnait des leçons à la petite semaine. Notre Schwartz à nous prit pour cent sous de leçons.*
>
> *Quelle spéculation, messieurs, si on la connaissait bien! Mais il faut tenir et veiller au grain ! Cinq francs prêtés le lundi, six francs rendus le dimanche. Voilà l'élément. Il est joli. Monsieur Schwartz, sortant des mains du vieux Schwartz, fit un bureau dans sa mansarde. Ses mille francs, prêtés jusqu'au dernier sou produisirent au taux légal de la petite semaine mille deux cents francs ronds le premier dimanche ; le second dimanche, ses mille deux cents francs lui rapportèrent mille quatre cent quarante francs ; le troisième, il en eut mille sept cent vingt huit francs ; le quatrième deux mille soixante-treize francs cinquante centimes ... Admettez-vous cela ? Oui, on ne va pas contre les chiffres. Négligeons les soixante-treize francs cinquante centimes pour les frais, les non-valeurs etc. Le capital doublé en vingt-huit jours. Eh bien ! accordons le mois rond pour désarmer toute objection ... j'aime mieux concéder cela que d'être taxé d'exagération. Y êtes-vous? Quatre mille francs le deuxième mois n'est-ce-pas ? huit mille francs le troisième, seize mille francs le quatrième, trente-deux mille francs le cinquième, soixante-quatre mille francs le sixième, cent vingt-huit mille francs le septième, deux cent cinquante-six mille francs le huitième, cinq cent douze mille francs le neuvième ... Je vous fais observer que nous avons déjà dépassé le but.*
>
> *Le natif voulu protester.*
>
> *Permettez ! s'écria Cotentin de la Lourdeville. Au quinzième mois, en suivant cette progression géométrique, nous obtenons trente deux millions sept cent soixante-huit mille francs, ce qui est un agréable résultat.*
>
> *Je prévois vos objections ; je fais plus, je les approuve. Il y a les mécomptes. En outre arrivé à un certain chiffre, on trouve difficilement dans l'enceinte des Halles deux ou trois millions de marchandes de quatre saisons qui vous empruntent cinq francs par semaine. Tel est l'écueil. Aussi, après quinze mois, Monsieur Schwartz, quand il se maria n'avait encore que quatre cent mille francs, c'est-à-dire la quatre-vingt deuxième partie de ce qu'il aurait dû avoir.*

2.7 Monothéismes et pratiques financières

La Bible et le Coran contiennent tous deux plusieurs passages interdisant la pratique du prêt à intérêt. Dans l'Ancien Testament, au vingt-troisième chapitre du Deutéronome (23-19) et (23-20), on peut lire :

> *Tu ne prêteras pas à intérêt à ton frère, intérêt d'argent ou intérêt de nourriture, de toute chose qui se prête à intérêt. Tu pourras tirer un intérêt de l'étranger, mais tu n'en tireras point de ton frère, afin que l'Éternel, ton Dieu, te bénisse dans tout ce que tu entreprendras au pays dont tu vas entrer en possession.*

La condamnation du prêt à intérêt, présenté comme une pratique contraire à la foi, se trouve aussi dans Ezéchiel, au huitième verset du livre dix-huit. En ce qui concerne le Coran, citons le verset 275 de la Sourate Al-Baqarah (La vache) :

> *Ceux qui mangent [pratiquent] de l'intérêt usuraire ne se tiennent (au jour du jugement dernier) que comme se tient celui que le toucher de Satan a bouleversé. Cela parce qu'ils disent : le commerce est tout à fait comme l'intérêt. Alors qu'Allah a rendu licite le commerce et illicite l'intérêt.*

Une dénonciation identique de la pratique de l'intérêt se retrouve également dans la Sourate Ar-Rum. L'Église catholique romaine a quant à elle interdit le prêt à intérêt à ses fidèles pendant tout le Moyen Âge, en prenant appui sur la chrématistique d'Aristote. L'interdit a toutefois été partiellement contourné, au cours de la période médiévale, en faisant appel aux juifs, qui de leur côté pouvaient accepter de prêter à intérêt aux *non juifs* en vertu du verset 23-20 du Deutéronome cité plus haut. La Réforme protestante a, par la voix de Calvin, contribué à la levée progressive de l'interdit du prêt à intérêt dans les pays européens. L'Église catholique a attendu 1830 et la bulle *Non esse inquietandos* pour autoriser le commerce de l'argent. Civilement, le prêt à intérêt n'a été légalisé en France que par la loi du 12 octobre 1789.

3 Actuariat viager

3.1 Premiers recensements

La première civilisation à avoir développé un cadastre dont il nous est resté des traces est celle de l'Égypte. Dès la II^e dynastie (2925 - 2700 BC), on retrouve les traces écrites d'un recensement. Sous la IV^e dynastie (2625-2510 BC), la biographie de Meten[16] nous apprend qu'il a pu acheter une rente de deux cents pains par jour. Mais ce contrat ne prouve en

[16] Jacques PIRENNE, *Histoire de la civilisation de l'Égypte ancienne*, tome 1 p. 176, Baconnière-Renaissance du Livre, Neuchâtel-Bruxelles, 1963.

rien l'existence d'une véritable mathématique viagère[17] en Egypte dès l'Antiquité.

Alors qu'aucun support scientifique ne le crédibilise, les rentes viagères connaîtront un grand succès tout au long du Moyen Age. La Ville de Tournai émit ainsi en 1228 des lettres de rentes viagères, pour renflouer ses caisses. Les corporations remplissaient le rôle d'associations professionnelles en prodiguant une forme d'assistance mutuelle. En dehors des fonds propres à chaque corporation existait également une caisse d'aide et d'assistance destinée à apporter une aide financière aux veuves et aux orphelins des compagnons décédés. Les sommes payées devaient couvrir les frais funéraires.

3.2 Impensable croissance infinie

Ce qui manque, encore une fois, c'est la notion de progression géométrique[18]. Dans l'univers aristotélicien où la sphère des étoiles "fixes" limite l'espace à quelques milliers de rayons terrestres, une croissance indéfinie de ce type ne peut être envisagée, et ce malgré les travaux d'Archimède. Et, paradoxalement, c'est William Petty (1623-1687), auteur probable la première table de mortalité moderne[19], qui va s'acharner à justifier l'impossibilité de ces progressions. Se référant aux textes sacrés[20], il note dans son *Autre Essai d'Arithmétique politique (1682)*, se livrant à d'audacieuses spéculations sur les temps de doublement de la population :

> *Si le nombre d'acres que mesure la partie habitable de la terre est inférieur à 50 milliards, si une population de 20 milliards est trop considérable pour pouvoir être nourrie par ce nombre d'acres (...), alors en six redoublements de la population (ce qui se produira dans 2 000 ans), les 320 000 000 habitants dépasseront le chiffre en question de 20 milliards. Et alors, suivant la prédiction des Écritures, il y aura des guerres et de grands massacres.*

[17] Pour apprendre l'arithmétique égyptienne : voir GILLAIN, *La science égyptienne: l'arithmétique au Moyen Empire*, Edition de la Fondation Égyptologique Reine Elisabeth, Bruxelles, 1927.

[18] Ou en continu, l'exponentielle.

[19] Cette dernière est très souvent attribuée à John Graunt (1620-1674), qui en fut l'éditeur.

[20] John Napier (1550 - 1617), l'inventeur des logarithmes, composa lui aussi, dans la mouvance ésotérique de Luther, un traité pour déterminer la date de l'Apocalypse.

La progression géométrique conduisait donc inévitablement à l'apocalypse. Malgré tout, on soupçonne fort Petty d'avoir œuvré avec le londonien, John Graunt (1620-1674) à la publication en 1662 des *Natural and Political Observations mentionned in a Following Index ans made upon the Bills of Mortality*, fondant ainsi l'analyse démographique et produisant la première table de mortalité au sens moderne du terme[21] :

> *Puisque nous avons trouvé que sur 100 conceptions prises au départ, à peu près 36 n'atteignent pas l'âge de 6 ans, et que peut-être une seule survit à 76 ans, ayant sept décennies entre 6 et 76 ans, nous avons recherché six moyennes proportionnelles entre 64, ceux qui sont encore vivants à 6 ans, et l'unique survivant à 76 ans. (...) De là, il s'ensuit que sur 100 personnes conçues, il en reste,*

au bout de six années pleines	*64*
au bout de l6 ans	*40*
au bout de 26 ans	*25*
au bout de 36 ans	*16*
au bout de 46 ans	*10*
au bout de 56 ans	*6*
au bout de 66 ans	*3*
au bout de 76 à 80 ans	*0*

On a beaucoup spéculé sur l'origine de ces chiffres. Plusieurs méthodes de reconstitution ont été proposées, basées sur des séries géométriques de raison 0,63, ou 0,625[22], mais aucune ne donne une reconstitution correcte. Hervé Le Bras nous livre sa solution[23]. Le chiffre initial de 64 met sur la piste : il représente six multiplications successives par 2. Or la *duplicatio* (multiplication par 2) et la *manducatio*, (division par 2) étaient considérées au 17^{e} siècle comme des opérations au même titre que nos quatre opérations usuelles. Pour prendre 64 % d'un nombre donné, il suffit de le multiplier six fois de suite par 2 et de le diviser par 100, en supprimant les deux derniers chiffres. Si l'un opère ainsi, et si l'on arrondit par suppression de la partie décimale comme on le faisait alors, on reconstitue

[21]Voir l'ouvrage d'Hervé Le Bras : *Naissance de la mortalité*, Galimard, Le Seuil, 2000.

[22]5/8 : cette dernière fut avancée par Karl Pearson, l'un des fondateurs de la statistique mathématique.

[23]L'invention des concepts en démographie, *Dossier Pour la Science : Les mathématiques sociales*, 1999.

presque la table des *Observations* (excellent exercice). La technique repose sur des arrondis et des multiplications simples; ces opérations s'effectuent mentalement, la notation décimale n'étant pas encore systématique. La première table de mortalité fut donc une série géométrique décroissante calculée de manière approximative.

La voie était tracée. Le Hollandais Johan de Witt De Witt calcula des probabilités de décès, en s'appuyant sur l'âge au décès des différents bénéficiaires de rentes viagères. Cette loi de mortalité est commentée dans *Waerdye van Lijfrenten naer proportie van Losrenten*, présenté en 1671 aux états de Hollande et de Frise Occidentale. Citons encore les tables du célèbre Astronome anglais Edmund Halley (1656-1742), l'homme de la comète, qui proposa en 1693 une table de mortalité de la ville de Breslau (Wroclaw, en Pologne). A Londres, en 1698, la *Mercer's Compagny* assura ses premières rentes viagères, suivie un an plus tard par la *Society for Assurance of Widows and Orphans.* Mais, faute de support crédible, les primes demandées étaient insuffisantes, entraînant la disparition des deux sociétés. James Dodson (1710-1757) fut le premier à calculer des primes fixes et constantes pour un capital assuré de 100 livres, en fonction de l'âge de l'assuré à la souscription du contrat. Sur ces bases, il envisagea de fonder une compagnie d'assurance sur la vie mais celle-ci ne verra le jour qu'après son décès, par la création le 7 septembre 1762 de la *Society for Equitable Assurance on Lives and Survivorships.* C'est la plus ancienne compagnie d'assurance sur la vie opérant sur des bases scientifiques. Assez curieusement, il fallu attendre les travaux de Benjamin Gompertz (1779-1865) pour que naisse le premier vrai modèle.

3.3 Mathématiquement

Le duo Graunt-Petty avait ouvert la voie en décrivant l'évolution d'une population fictive. Aujourd'hui, on note l_0 l'effectif de la population initiale[24] (Pour Graunt, $l_0 = 100$ mais de nos jours, par souci de précision, on prend $l_0 = 10^5$ ou 10^6). En notant p_x la probabilité pour un individu d'âge x d'être encore en vie un an plus tard[25], on construit successivement les nombres de “survivants”

$$l_{x+1} = p_x * l_x \quad x \in N.$$

[24] D'âge 0.
[25] Ces valeurs sont observables empiriquement comme nous l'illustrons plus loin.

C'est cet ensemble de valeurs l_x que l'on appelle aujourd'hui "table de mortalité". Abandonnons le point de vue discret et considérons la population l_x comme une fonction continue et différentiable de l'âge x. Calculons le nombre de décès par unité de temps entre les âges x et $x + \Delta x$:

$$\frac{l_x - l_{x+\Delta x}}{\Delta x}$$

On appelle *taux instantané de décès à l'âge* x le taux de décès par unité de temps au voisinage de l'âge x. on vérifie que (excellent excercice) :

$$\mu_x = lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{l_x} * \frac{l_x - l_{x+\Delta x}}{\Delta x} = -\frac{d}{dx}\left[ln l_x\right]$$

Les tables de mortalité actuelles se fondent sur une modélisation interprétée de ce taux instantané. Benjamin Gompertz constata (en 1825), outre une énorme mortalité infantile suivie d'une décroissance lors de l'adolescence, que les taux de décès des adultes croissaient exponentiellement. Il proposa donc (20 · x · 80) une description exponentielle du phénomène de mortalité :

$$\mu_x = \alpha c^x$$

En 1860, William Makeham observa que l'adjonction d'une constante additive améliorait considérablement l'adéquation du modèle aux observations. Il proposa une représentation basée sur l'hypothèse d'un risque accidentel constant quel que soit l'âge et d'un risque exponentiel lié au vieillissement :

$$\mu_x = A + \alpha c^x$$

A représente le risque accidentel ($A > 0$), α le risque initial lié à la population considérée ($\alpha > 0$) et c le coefficient d'aggravation du taux de décès par année ($c > 1$). Depuis de nombreux modèles sont venus enrichir la théorie mais le législateur belge impose toujours la modélisation de Makeham aux assureurs. Dans le moniteur du 31 décembre 1992 (page 27 887), il fixe le modèle de tarification en partant de la paramétrisation qui suit, en autorisant une marge de sécurité fonction du type de couverture envisagée (vie ou décès) :

Hommes		
c	α	A
1.103798111	0.000037074	0.000558453
Femmes		
c	α	A
1.119312877	0.000007255	0.000330325

Le graphique qui suit illustre en coordonnées logarithmiques la comparaison entre le modèle utilisé pour les hommes et les observations empiriques(1996-1998) :

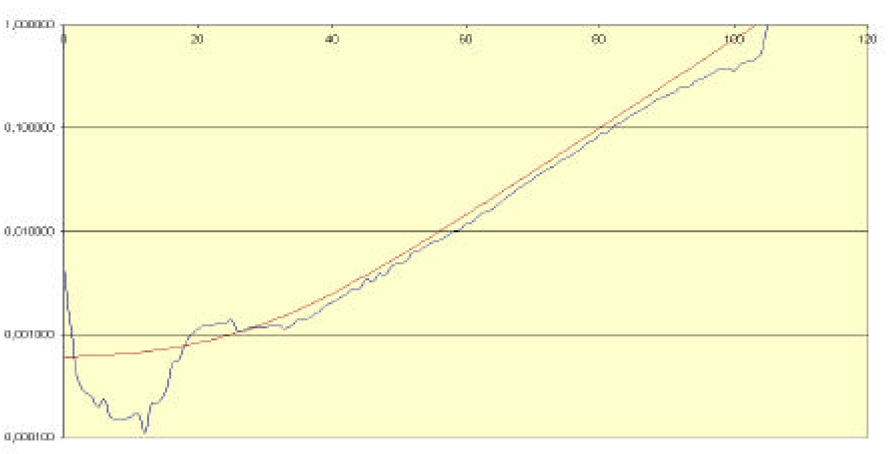


Figure 1: Comparaison entre observations et prescriptions légales

4 Actuariat accident

4.1 Historique

4.1.1 Assurances maritimes

Le risque accidentel fut couvert d'une certaine façon dès la plus haute Antiquité : en effet, les Babyloniens avaient opté pour un système de financement partagé lors de certaines expéditions commerciales qui prenaient la forme de caravanes. Les Phéniciens adoptèrent le même principe pour la navigation et ces derniers furent imités ensuite par les Grecs et les Romains. Sous la République romaine, le Sénat fut amené à confier les transports militaires aux civils, la flotte romaine n'étant plus en mesure de pourvoir à la totalité des transports. L'Etat se porta alors garant des dégâts de tempête occasionnés aux transports de ravitaillement destiné aux troupes[26]. De cette époque date un récit retraçant (déjà !) une importante fraude à l'assurance : deux commerçants étrusques affrétaient de vieux navires en mauvais état chargés de marchandises sans valeur. Ils les faisaient couler en pleine mer, en ayant soin de récupérer les équipages

[26]Tite-Live, 64 BC ; Livre XXI 11 n°, 49.

dans des bateaux prévus à cet effet, et présentaient ensuite une note exorbitante aux autorités romaines.

Au Moyen-Âge, Le transport des marchandises par mer se faisait soit au risque de l'acheteur, soit au risque du vendeur. Et lorsque celui-ci supportait le risque, le prix des marchandises était plus élevé : contre paiement l'acheteur prenait à son compte le risque de tempête et de piraterie. Mais, à notre connaissance, le plus vieux *vrai* contrat d'assurance fut souscrit en 1318 à Florence et concernait le commerce du drap flamand que la cité entretenait avec Bruges. Aucun fondement scientifique ne servait de support à ces différentes tarifications.

4.1.2 Assurances incendie

Autre risque majeur à couvrir : le feu. Dès 1591, une centaine de marchands créèrent à Hambourg une caisse d'assurance contre l'incendie : la *Hamburger Feuerkasse*. En 1666, un violent incendie réduisit en cendres une importante partie de la ville de Londres. La nécessité d'une couverture contre l'incendie s'imposa d'emblée et la première compagnie d'assurance contre l'incendie, le *Fire Office* fut créée dès 1667.

4.2 Mathématiquement

Allons-nous encore une fois retomber sur une modélisation exponentielle ?

4.3 Construction de la distribution binomiale

La répétition d'expériences aléatoires identiques et *indépendantes* à deux issues possibles, la réussite ou l'échec, la survenance ou non survenance d'un accident, conduit à la construction de la distribution binomiale. On associe à la *réussite* de l'expérience une probabilité p et á son *échec*, la probabilité complémentaire $q = (1 - p)$. La probabilité d'observer exactement k réussites (accidents ?) lors d'une succession de n expériences identiques et indépendantes est alors donnée par:

$$p_k = \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)}{k!} * p^k(1-p)^{n-k}$$

Mais ce résultat classique est difficilement utilisable concrètement, le produit de factorielles et de probabilités proches de 0 (les accidents sont des événements rares) conduisant à une quasi indétermination. Nous montrons comment contourner cet écueil.

4.4 Construction de la distribution de Poisson

Situons-nous d'emblée pour plus de clarté dans le contexte de la responsabilité civile automobile. L'observation d'un assuré pendant une durée déterminée T peut être décomposée en une succession de n durées d'observation égales $\Delta t = \frac{T}{n}$. Lorsque les accidents (sinistres) sont "rares" (à définir), on peut choisir n suffisamment grand pour qu'il soit *impossible* d'observer plus d'un accident pendant un intervalle de temps Δt (on peut toujours choisir n de façon à rendre la probabilité de cet événement aussi petite que souhaité). En notant λ le nombre moyen d'accidents observés par unité de temps, on estime (linéairement, comme souvent) les probabilités suivantes:

$$P\,[\text{observer un seul accident sur}[t, t + \Delta t[] = \lambda \Delta t$$

$$P\,[\text{n'observer aucun accident sur}[t, t + \Delta t[] = 1 - \lambda \Delta t$$

$$P\,[\text{observer plus d'un accident sur}[t, t + \Delta t[] = 0$$

à un o(Δt) près. (La validité de ce schéma descriptif peut être considéré comme la définition de la notion d'événement "rare"). Sous ces hypothèses, l'observation d'un assuré pendant une durée T constitue un schéma de Bernouilli et l'on peut calculer la probabilité d'observer k accidents pendant la durée T au moyen d'une distribution binomiale $B(n, \lambda \Delta t)$. On a en première approximation:

$$p_k = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)}{k!} * (\lambda \Delta t)^k (1 - \lambda \Delta t)^{n-k}$$

Le passage à la limite pour n tendant vers l'infini est vu comme un accroissement de validité du modèle puisqu'il élimine l'approximation faite sur le calcul des probabilités élémentaires p et q. Ce résultat est bien connu. On obtient successivement:

$$\begin{aligned}
lim_{\Delta t \to 0} p_k &= lim_{\Delta t \to 0} \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!} * (\lambda \Delta t)^k (1 - \lambda \Delta t)^{n-k} \\
&= lim_{n \to \infty} \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!} * \left[\frac{\lambda T}{n}\right]^k \frac{(1 - \frac{\lambda T}{n})^n}{(1 - \frac{\lambda T}{n})^k} \\
&= \frac{(\lambda T)^k}{k!} lim_{n \to \infty} \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{n^k} (1 - \frac{\lambda T}{n})^n \\
&= \frac{(\lambda T)^k}{k!} e^{-\lambda T}
\end{aligned}$$

Et revoilà notre exponentielle ! Certes, cette distribution est loin d'être réaliste : on peut vérifier que l'hypothèse d'indépendance qui sous-tend l'établissement de cette formule doit être rejetée. Dans les faits, à mesure que des accidents sont observés, l'assureur ajuste le λ propre de chaque automobiliste en le tarifant en fonction de son passé (dépendance). La non-validité de la distribution de Poisson se vérifie empiriquement. Considérons les résultats observés sur les 106 974 assurés de l'ex PS (actuellement Prévoyance en Voorzicht):

k	n_k	f_k
0	96 978	0.906557
1	9 240	0.086376
2	704	0.006581
3	43	0.000402
4	9	0.000084

L'ajustement à la distribution de Poisson se fait sur base de l'identité des moyennes (méthode des moments).
On calcule $\bar{x} = 0.101081$ et $s^2 = 0.107447$. On peut le constater, la presque identité des moyenne et variance ne suffit pas à justifier l'utilisation de la distribution de Poisson. On a:

k	n_k	f_k	p_k	np_k
0	96 978	0.906557	0.903860	96 689.6
1	9 240	0.086376	0.091363	9 773.5
2	704	0.006581	0.004617	493.9
3	43	0.000402	0.000156	16.6
4	9	0.000084	0.000004	0.4

Des conclusions apparaissent intuitivement: si les hypothèses conduisant au modèle étaient correctes, il y aurait plus d'assurés déclarant un seul sinistre et moins en déclarant deux, trois ou quatre. Cette interprétation est confirmée par le calcul du χ^2 observé:

$$\chi^2_{\text{observé}} = 191.41 > \chi^2_{2;0.95} = 5.991$$

Pour mémoire, la comparaison entre une distribution observée caractérisée par les effectifs n_k (avec $\sum_{k=1}^{K} n_k = n$) et une distribution théorique caractérisée par les probabilités p_k se fait au moyen de la relation:

$$\chi^2_\nu = \sum_{k=1}^{K} \frac{[n_k - np_k]^2}{np_k}$$

Le degré de liberté ν de la distribution χ^2 est égal au nombre de valeurs (ici K) de la distributions moins un (les fréquences observées et les probabilités utilisées sont en nombre $K-1$, leur somme valant 1), auquel il faut soustraire le nombre d'estimations introduites dans le modèle pour son ajustement (ici, on estime λ à partir de la moyenne observée). Nous avons procédé au regroupement des lignes correspondant à trois et quatre accidents, ce qui explique le degré de liberté de la distribution (4-1-1).

5 Conclusion

IL nous a paru amusant de musarder dans les méandres de la mathématique actuarielle et de constater à quel point la fonction exponentielle y était devenue indispensable. Mais cette promenade n'est pas sans intérêt : elle prouve non seulement l'utilité et la pertinence de la démarche mathématique mais fournit également quelques applications simples, accessibles, capables de donner du sens à l'étude en apparence abstraite d'une fonction qui hante tous les programmes et tous les manuels.