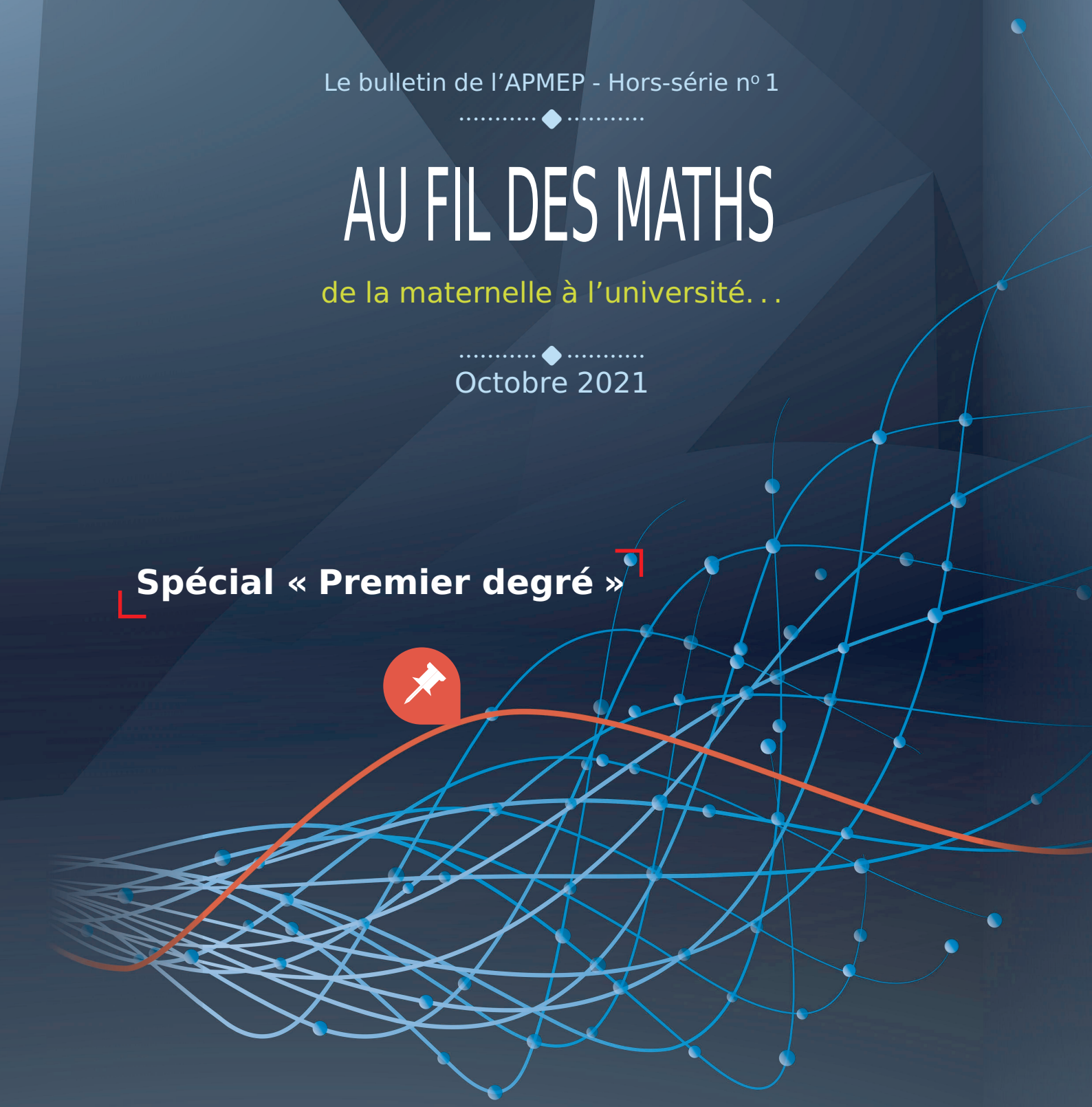
Le bulletin de l'APMEP - Hors-série n° 1

AU FIL DES MATHS

de la maternelle à l'université. . .

Octobre 2021

Spécial « Premier degré »



APMEP

Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public

ASSOCIATION
DES PROFESSEURS DE MATHÉMATIQUES
DE L'ENSEIGNEMENT PUBLIC

26 rue Duméril, 75013 Paris
Tél. : 01 43 31 34 05 - Fax : 01 42 17 08 77
Courriel : secretariat-apmep@orange.fr - Site : https://www.apmep.fr
Présidente d'honneur : Christiane Zehren

Au fil des maths, c'est aussi une revue numérique augmentée :
https://afdm.apmep.fr
version réservée aux adhérents. Pour y accéder connectez-vous à votre compte *via* l'onglet *Au fil des maths* (page d'accueil du site) ou *via* le QRcode, ou suivez les logos.

Si vous désirez rejoindre l'équipe d'*Au fil des maths* ou bien proposer un article, écrivez à aufildesmaths@apmep.fr

Annonceurs : pour toute demande de publicité, contactez Mireille Génin mcgenin@wanadoo.fr

AU FIL DES MATHS

ÉQUIPE DE RÉDACTION

Directeur de publication : *Sébastien Planchenault.*

Responsable coordinatrice de l'équipe : *Lise Malrieu.*

Rédacteurs : *Vincent Beck, Françoise Bertrand, François Boucher, Richard Cabassut, Séverine Chassagne-Lambert, Frédéric De Ligt, Agnès Gateau, Mireille Génin, Cécile Kerboul, Valérie Larose, Lise Malrieu, Sophie Roubin, Daniel Vagost, Thomas Villemonteix, Christine Zelty.*

« Fils rouges » numériques : *François Bouyer, Gwenaëlle Clément, Nada Dragovic, Laure Étévez, Marianne Fabre, Robert Ferréol, Yann Jeanrenaud, Céline Monluc, Christophe Romero, Agnès Veyron.*

Illustrateurs : *Pol Le Gall, Olivier Longuet, Jean-Sébastien Masset.*

Équipe TEXnique : *François Couturier, Isabelle Flavier, Anne Héam, François Pétiard, Guillaume Seguin, Sébastien Soucaze, Sophie Suchard, Michel Suquet.*

Maquette : *Olivier Reboux.*

Votre adhésion à l'APMEP vous abonne automatiquement à *Au fil des maths*.
Pour les établissements, le prix de l'abonnement est de 60 € par an.
La revue peut être achetée au numéro au prix de 15 € sur la boutique en ligne de l'APMEP.

Mise en page : François Pétiard
Dépôt légal : Octobre 2021
ISSN : 2608-9297

Éditorial

Venez et vous verrez !

C'est une tâche sérieuse que d'avoir à accueillir de nouveaux lecteurs ; je l'endosse avec joie. Elle est le juste retour de la main qui m'a été tendue lorsque j'ai pour la première fois bravé le sol des Journées Nationales de l'APMEP.

Je suis professeure des écoles et j'avais cru bon alors d'ajouter une mention au crayon sur l'étiquette d'identité qui m'avait été remise à l'inscription : « Nulle en maths ». Cette mauvaise fanfaronnade servait à prévenir tout interlocuteur que la discussion risquait de faire flop s'il s'aventurait sur des sujets *très* mathématiques.

Il existe encore des enseignants du premier degré qui vivent cette contradiction remarquable d'être les premiers enseignants de mathématiques et de se sentir illégitimes à les enseigner. *Nulle en maths*, cela en dit long sur la relation que bon nombre de Français entretiennent avec le souvenir de l'enseignement de cette discipline puisque la rencontre avec les mathématiques s'affirme en premier lieu dans le cadre de l'institution scolaire. Notre système scolaire engendre des professions qui utilisent au quotidien des notions mathématiques, les manipulent, les partagent, les enseignent ; il façonne malgré tout des dépréciations profondes sur l'échelle intime du rapport aux mathématiques. La phrase que j'aurais volontiers écrite au sortir des trois jours de conférences et d'ateliers était tout autre : « C'est ça les maths ! ». Ainsi les activités mathématiques demandaient de confronter des raisonnements et des savoirs techniques, de construire la capacité à choisir des moyens efficaces, rigoureux et même *jolis* d'accéder à un résultat valide, et non de brandir ce résultat comme seul fruit de l'activité. Faire des mathématiques, ce serait dorénavant une perspective de questionnement collectif au sein de ma classe.

À l'APMEP, la posture d'autorité que l'on rencontre fréquemment dans le rapport social de celui qui sait vers celui qui ne sait pas, n'a pas de raison d'être. En premier lieu du fait de toute absence de hiérarchie (dont on connaît la force de verrouillage pour la construction d'une coopération). Ensuite, de par la reconnaissance de l'identité professionnelle de chacun. Être professeur des écoles ou professeur de collège et de lycée, enseignant du supérieur, implique des gestes professionnels spécifiques et une aptitude didactique distincte ; s'il existe une posture dogmatique au sein de l'association, c'est celle-là.

J'ai plaisir à témoigner des temps de partage et d'échanges qui caractérisent les groupes et leurs discussions. J'ai la certitude qu'ils contribuent à la capacité d'engagement dans l'exercice de notre métier et à notre faculté de mise en mouvement, de renouvellement et de joie à construire une vie avec nos élèves. Adhérer à l'APMEP, c'est une amorce forte dans la possibilité d'un épanouissement professionnel fait d'expérimentations, de questionnements et de choix. C'est aussi certainement une possibilité de couper court à la reproduction d'une image des mathématiques puissamment sélective et potentiellement élitiste.

Ce hors-série d'*Au fil des maths* a la capacité de présenter cette force du collectif. Il est une fenêtre ouverte sur quelques ressources pour la pratique de classe et exalte la capacité de partage et d'échange du groupe. Il est une invitation à prendre part à la construction : bienvenue à tous ! Et au grand plaisir de vous rencontrer !

Agnès Gateau est enseignante à l'école élémentaire d'Étigny (89). Elle est aussi membre de la commission *Premier degré* de l'APMEP.

agnesgateau@gmail.com

© APMEP *Octobre 2021*

Présentation

L'APMEP (Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public), association régie par la loi de 1901, a été fondée en 1910. Elle s'engage et soutient toute action qui lui paraît propre à permettre un enseignement des mathématiques de qualité pour toutes et tous, de la maternelle à l'université. Elle est composée d'une vingtaine de commissions et groupes de travail nationaux, qui apportent leurs contributions aux prises de position et aux publications de l'association.

L'APMEP est présente sur l'ensemble du territoire par l'intermédiaire de vingt-cinq associations régionales, qui organisent notamment divers séminaires et colloques, dont les « Journées Nationales » annuelles depuis 1960. L'APMEP se veut être un lieu de libre parole, de confrontation d'idées et d'autoformation.

L'association ne vit que des cotisations de ses adhérents, des ventes de ses publications (dont les auteurs sont bénévoles), d'une redevance du CFC (Centre Français d'exploitation du droit de Copie), et de quelques recettes versées par des partenaires ; ses responsables et membres actifs ne bénéficient d'aucune décharge de service pour la gestion de l'association, mais l'aventure est passionnante ! Alors si vous souhaitez soutenir ou participer aux travaux de l'APMEP, n'hésitez plus et adhérez.

La revue *Au fil des maths*, le bulletin trimestriel de l'APMEP, s'adresse à tout enseignant de mathématiques, de la maternelle à l'enseignement supérieur. Il s'agit d'une revue professionnelle, tournée vers les préoccupations et besoins « de terrain », complémentaire de revues plus didactiques et théoriques telles que *Grand* $\mathbb{N}$ ou *Repères IREM*. L'équipe éditoriale publie dans chaque numéro un ou plusieurs articles en lien avec l'enseignement en école primaire. Vous serez probablement aussi intéressés par des articles tournés vers la Sixième, sources d'inspiration pour les classes de CM1 et CM2, qui donnent accès à des idées pour enseigner les mathématiques en vue du cycle 4.



Chaque numéro d'*Au fil des maths* est constitué de cinq rubriques principales, que vous découvrirez dans ce hors-série.

Page 11 **Avec les élèves**

Les articles de pratique de classe relatent des expérimentations ou présentent des ressources qui ont toutes été testées avec des élèves. Ils cherchent à en dégager à la fois les points forts et les limites. Vous pourrez y puiser des idées, cette fois très concrètes ; la plupart des activités sont quasiment « clé en main » mais sont bien sûr destinées à être adaptées au contexte dans lequel vous travaillez. Certains articles donnent lieu à des témoignages d'enseignants ayant testé la ressource ou le dispositif.

Page 85 **Ouvertures**

C'est le lieu des mathématiques pour réfléchir et approfondir. C'est aussi le lieu des articles qui sortent des sentiers battus, où l'on trouvera des idées originales, des liens avec d'autres disciplines.

Page 127 **Récréations**

Dans chaque numéro sont proposés de jolis problèmes à chercher, des énigmes et curiosités mathématiques : pour vos élèves parfois, pour vous toujours ! Une source d'inspiration, en tout cas.

Page 136 **Opinions**

Les articles de cette rubrique, souvent orientés sur la didactique, sont écrits par des auteurs actuels reconnus en recherche, avec l'objectif de se mettre à la portée de tout enseignant ou formateur. La plupart peuvent donc être utilisés tels quels pour se former, faire réfléchir ou approfondir un point de didactique. Ils sont émaillés d'exemples et accompagnés d'une bibliographie qui vous permettra d'aller plus loin sur le sujet, selon vos besoins.

Page 146 **Au fil du temps**

Des éléments d'histoire des mathématiques pour parfaire votre culture, des recensions d'ouvrages mathématiques. Parmi eux, quelques pépites pour l'école primaire, mais aussi des contenus de niveaux variés qui sauront aiguiser votre curiosité.

L'APMEP est heureuse de vous mettre à disposition ce hors-série en accès libre et gratuit. L'école maternelle et élémentaire est le premier lieu d'apprentissage des mathématiques, celui de la construction de concepts fondamentaux comme le nombre entier ; il était donc tout simplement naturel que ce premier hors-série d'*Au fil des maths* soit consacré au premier degré. Nous espérons que l'ensemble de ce numéro composé d'anciens articles augmentés de témoignages de collègues et de nouveaux articles vous sera utile à la fois pour votre culture mathématique et didactique personnelle, et dans votre pratique de classe.

Dans le même esprit que ce hors-série d'*Au fil des maths*, vous pourrez également participer aux *Mercredis de l'APMEP* qui se veulent être un espace dédié aux questions de l'enseignement des maths à l'école primaire ou encore à la commission *Premier degré*. Pour plus d'information, n'hésitez pas à consulter notre site.

En attendant, vous avez accès à la boutique en ligne, qui contient toutes les ressources « premier degré » éditées par l'association.

Pour adhérer à l'association, rendez-vous ici ou là (page 64).

Bonne lecture… et à bientôt parmi nous !

Sébastien Planchenault
Président de l'APMEP.
president.e@apmep.fr

© APMEP *Octobre 2021*

Mode d'emploi

pour une navigation aisée

dans ce hors-série

À la page 3, vous avez déjà découvert la signification des différentes couleurs des bandeaux verticaux le long des pages.

Le sommaire est en réalité triple :

- un sommaire général page 6 qui a la forme d'une table des matières classique ; vous retrouverez ce sommaire général en dernière page de ce numéro ;
- un sommaire thématique page 7 ;
- un sommaire par cycle pages 8 et suivante.

À la fin de chaque article, après la présentation de l'auteur de l'article, vous trouverez trois petits disques comme ceci : G T C

.

G Retour au sommaire général (en cliquant dessus) ;

T Retour au sommaire thématique (en cliquant dessus) ;

C Retour au sommaire par cycle (en cliquant dessus).

Bonne navigation !

© APMEP *Octobre 2021*

Sommaires

Sommaire général

Éditorial, présentation, mode d'emploi et sommaires 1
Éditorial 1
Présentation 2
Mode d'emploi 5
Sommaires 6
Avec les élèves 11
Décomposition des nombres en maternelle
Laurence Le Corf 11
Mouvement mathématique en Bretagne
Claudie Asselain-Missenard 18
La *course aux nombres*
Anne-France Acciari 28
Le Rallye Mathématique Transalpin
Christine Le Moal 31
Des caches multitâches
François Drouin 39
M@ths en-vie
Carole Cortay et Christophe Gilger 44
Math & Manips en géométrie au cycle 1
M.-F. Guissard, V. Henry, P. Lambrecht, P. Van Geet & S. Vansimpsen 52
Le nuancier de couleurs en cycle 3
Agnès Gateau 65
Le « coin marchande »
Élisabeth Boisson et Catherine Würtz 74
Ouvertures 85
MathCityMap
Groupe *Numatécol*, IREM de Lyon 85
Géométrie de bout de ficelle dans la cour de récré
Bernard Parzysz 92
Mathématiques contées
Marie Lhuissier 99
Avec le puzzle de Marine
François Drouin 108
Le jeu du manchon
Thérèse Escoffet & Christine Oudin 117
Ressources pour un professeur des écoles
Agnès Gateau 123
Récréations 127
Trois jeux de la brochure *Jeux Écollège 4*
Françoise Bertrand 127
Match Point une brochure *JEUX* pas comme les autres !
Jean Fromentin 134
Opinions 136
Vergnaud *versus* Singapour
Richard Cabassut 136
Manipuler en mathématiques. . . oui mais
Joël Briand 142
Au fil du temps 146
Matériaux pour une documentation 146

Sommaire thématique

Nombres et numération

Décomposition des nombres en maternelle
Laurence Le Corf 11

La *course aux nombres*
Anne-France Acciari 28

Des caches multitâches
François Drouin 39

Le nuancier de couleurs en cycle 3
Agnès Gateau 65

Le « coin marchande »
Élisabeth Boisson et Catherine Würtz 74

Manipuler en mathématiques. . . oui mais
Joël Briand 142

Géométrie

Des caches multitâches
François Drouin 39

***Math & Manips* en géométrie au cycle 1**
M.-F. Guissard, V. Henry, P. Lambrecht, P. Van Geet & S. Vansimpsen 52

Géométrie de bout de ficelle dans la cour de récré
Bernard Parzysz 92

Avec le puzzle de Marine
François Drouin 108

Le jeu du manchon
Thérèse Escoffet & Christine Oudin 117

Grandeurs et mesures

Mouvement mathématique en Bretagne
Claudie Asselain-Missenard 18

Résolution de problèmes

Le Rallye Mathématique Transalpin
Christine Le Moal 31

M@ths en-vie
Carole Cortay et Christophe Gilger 44

MathCityMap
Groupe *Numatécol*, IREM de Lyon 85

Vergnaud *versus* Singapour
Richard Cabassut 136

Langage

Le « coin marchande »
Élisabeth Boisson et Catherine Würtz 74

Mathématiques contées
Marie Lhuissier 99

Algorithmique et raisonnement

Trois jeux de la brochure *Jeux Écollège 4*
Françoise Bertrand 127

***Match Point* une brochure *JEUX* pas comme les autres !**
Jean Fromentin 134

Divers

Éditorial 1

Présentation
Sébastien Planchenault 2

Mode d'emploi 5

Ressources pour un professeur des écoles
Agnès Gateau 123

Matériaux pour une documentation 146

Sommaire par cycle

Divers

Éditorial 1

Présentation
Sébastien Planchenault 2

Mode d'emploi 5

Ressources pour un professeur des écoles
Agnès Gateau 123

Trois jeux de la brochure *Jeux Écollège 4*
Françoise Bertrand 127

***Match Point* une brochure *JEUX* pas comme les autres !**
Jean Fromentin 134

Cycle 1

Décomposition des nombres en maternelle
Laurence Le Corf 11

M@ths en-vie
Carole Cortay et Christophe Gilger 44

***Math & Manips* en géométrie au cycle 1**
M.-F. Guissard, V. Henry, P. Lambrecht, P. Van Geet & S. Vansimpsen 52

Le « coin marchande »
Élisabeth Boisson et Catherine Würtz 74

Le jeu du manchon
Thérèse Escoffet & Christine Oudin 117

Cycle 2

La *course aux nombres*
Anne-France Acciari 28

Le Rallye Mathématique Transalpin
Christine Le Moal 31

Des caches multitâches
François Drouin 39

M@ths en-vie
Carole Cortay et Christophe Gilger 44

Mathématiques contées
Marie Lhuissier 99

Le jeu du manchon
Thérèse Escoffet & Christine Oudin 117

Vergnaud *versus* Singapour
Richard Cabassut 136

Manipuler en mathématiques. . . oui mais
Joël Briand 142

Matériaux pour une documentation 146

Sommaire par cycle (suite)

Cycle 3

Mouvement mathématique en Bretagne
Claudie Asselain-Missenard 18

La *course aux nombres*
Anne-France Acciari 28

Le Rallye Mathématique Transalpin
Christine Le Moal 31

Des caches multitâches
François Drouin 39

M@ths en-vie
Carole Cortay et Christophe Gilger 44

Le nuancier de couleurs en cycle 3
Agnès Gateau 65

MathCityMap
Groupe *Numatécol*, IREM de Lyon 85

Géométrie de bout de ficelle dans la cour de récré
Bernard Parzysz 92

Mathématiques contées
Marie Lhuissier 99

Avec le puzzle de Marine
François Drouin 108

Le jeu du manchon
Thérèse Escoffet & Christine Oudin 117

Vergnaud *versus* Singapour
Richard Cabassut 136

Manipuler en mathématiques. . . oui mais
Joël Briand 142

Matériaux pour une documentation 146

© APMEP *Octobre 2021*

Agir avec L'APMEP !

En adhérant ou en parrainant un stagiaire

APMEP

Décomposition des nombres en maternelle

Faire découvrir les nombres et leurs utilisations en cycle 1... Dans cet objectif, Laurence Le Corf nous expose son projet « Création d'un journal du nombre » en Grande Section.

Cet article est paru dans le nº 530 (2018).

Laurence Le Corf
(contribution de Isabelle Gautheret)

Les instructions officielles

Les nouveaux programmes insistent particulièrement sur la stabilisation de la connaissance des petits nombres. Voici un extrait du BO nº 2 du 26 mars 2015 :

Stabiliser la connaissance des petits nombres

Au cycle 1, la construction des quantités jusqu'à dix est essentielle. Cela n'exclut pas le travail de comparaison sur de grandes collections. La stabilisation de la notion de quantité, par exemple trois, est la capacité à donner, montrer, évaluer ou prendre un, deux ou trois et à composer et décomposer deux et trois. Entre deux et quatre ans, stabiliser la connaissance des petits nombres (jusqu'à cinq) demande des activités nombreuses et variées portant sur la décomposition et recomposition des petites quantités (trois c'est deux et encore un ; un et encore deux ; quatre c'est deux et encore deux ; trois et encore un ; un et encore trois), la reconnaissance et l'observation des constellations du dé, la reconnaissance et l'expression d'une quantité avec les doigts de la main, la correspondance terme à terme avec une collection de cardinal connu.

L'itération de l'unité (trois c'est deux et encore un) se construit progressivement, et pour chaque nombre. Après quatre ans, les activités de décomposition et recomposition s'exercent sur des quantités jusqu'à dix.

Un peu plus loin, le BO donne les attendus en fin de grande section :

Étudier les nombres

- Avoir compris que le cardinal ne change pas si on modifie la disposition spatiale ou la nature des éléments.
- Avoir compris que tout nombre s'obtient en ajoutant un au nombre précédent et que cela correspond à l'ajout d'une unité à la quantité précédente.
- Quantifier des collections jusqu'à dix au moins ; les composer et les décomposer par manipulations effectives puis mentales. Dire combien il faut ajouter ou enlever pour obtenir des quantités ne dépassant pas dix.

- Parler des nombres à l'aide de leur décomposition.
- Dire la suite des nombres jusqu'à trente. Lire les nombres écrits en chiffres jusqu'à dix.

Je n'ai pas attendu la parution des programmes de 2015 pour travailler sur la décomposition des nombres, je le faisais déjà les années précédentes. Les nouveaux attendus de fin de maternelle m'ont juste confortée dans le fait de travailler cette notion en la ritualisant avec l'utilisation de supports pertinents.

Cette année, j'ai intégré dans ma circonscription un groupe expérimental sur la construction du nombre au cycle 1, mené par Pascal Percheron (IEN Saint-Brieuc-Est). Je travaille plus particulièrement la décomposition des nombres et la création d'un journal du nombre en m'inspirant de ce qui a été fait dans le cadre de la recherche ACE [1] (Arithmétique et Compréhension à l'École élémentaire) au cycle 2.

Mise en œuvre en classe

Séance 1 : manipulation individuelle avec les boîtes à décomposer

Lors d'un atelier dirigé, je propose à chaque enfant une *boîte à décomposer* bleue avec deux compartiments, une ardoise *Velleda* et un feutre.

Il s'agit pour les élèves d'essayer, par exemple, de trouver toutes les façons de faire 5. Pour cela, ils placent les pions dans les compartiments et dessinent ensuite ce qu'ils ont trouvé. Ils travaillent individuellement.

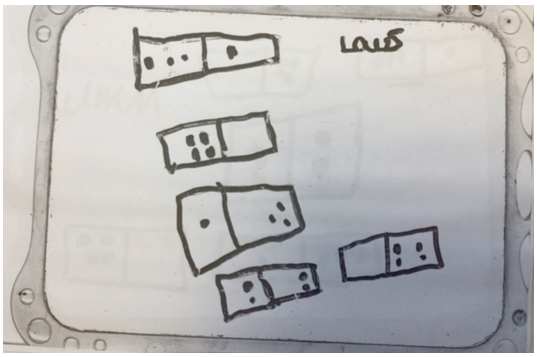
Pour les premiers nombres, je ne leur dis pas le nombre de possibilités mais au-delà de 5, je leur dis le nombre de boîtes à dessiner.

Je les aide lorsqu'ils me sollicitent et je garde une trace de leur recherche qu'ils retrouveront ensuite dans leur journal du nombre individuel.

Il est assez simple de différencier le travail : je peux faire quelques recherches avec un élève pour ensuite le laisser chercher seul, je peux demander à certains d'écrire sous les cases le nombre de pions, limiter le nombre de boîtes dessinées pour ne pas décourager les plus en difficultés.



Décompositions du nombre 5.



Décompositions du nombre 4.

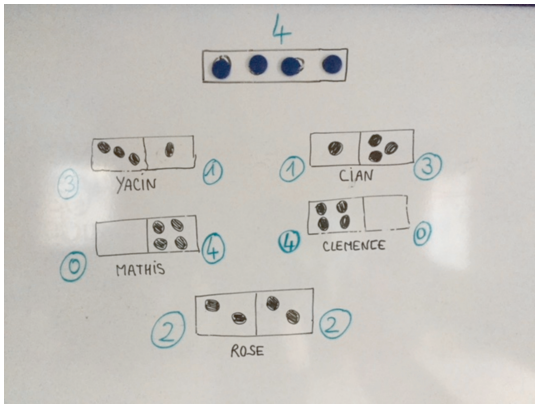
Par la suite, ce travail pourra être repris en atelier autonome au cours de l'année.

Séance 2 : élaboration collective d'une trace écrite

Tous les élèves de la classe sont désormais dans le coin regroupement face au tableau. Avec des aimants et les dessins des boîtes à décomposer, ils viennent déplacer les aimants pour montrer leurs différentes propositions, que le groupe classe valide ou non.

1. Le but de la recherche ACE-ArithmÉcole, menée conjointement par plusieurs équipes de recherche issues d'académies différentes, est d'améliorer les pratiques pédagogiques en apportant une aide concrète aux enseignants afin de mettre en œuvre une progression des apprentissages mathématiques sur le nombre au CP et au CE1. Vous pouvez consulter les documents sur le blog de l'INSPÉ de Bretagne.

La manipulation des aimants est importante car elle permet de ne pas avoir tout de suite une trace définitive : on peut recommencer, discuter, valider ou non.

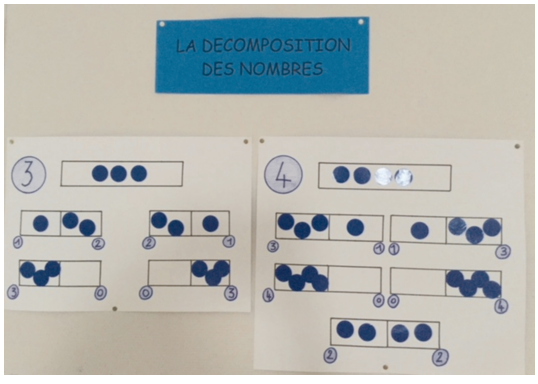


Décompositions du nombre 4.

Les élèves sont complètement partie prenante de leur apprentissage et surtout, les affichages de classe sont ainsi réalisés avec eux.

Depuis que je pratique ainsi, je trouve qu'ils réinvestissent plus facilement les affichages créés, notamment dans les diverses situations problèmes rencontrées.

Je garde une trace de cette séance en photographiant le tableau pour ensuite en faire une trace collective qui sera affichée sur le mur de la classe réservé à la connaissance des nombres. Cette fois, c'est moi qui fais la mise en page sur l'affiche car c'est le document référent (phase d'institutionnalisation). Il s'agit en fait de recopier au propre toutes les propositions trouvées collectivement sur le tableau.



Affichage dans la classe.

Séance 3 : travail individuel de réinvestissement, en atelier autonome

Sont mis à disposition des élèves : la *boîte à décomposer* bleue et des jetons si besoin (élément de différenciation : à ce stade, certains en ont encore besoin, d'autres pas), une feuille bleue format A5 et des papiers prédécoupés blancs (en fait deux rectangles comme les matrices de domino vierges).

Les élèves recherchent à nouveau toutes les façons de décomposer les nombres en utilisant ou non la boîte et en s'aidant si besoin de l'affichage collectif. Ils collent ensuite chaque décomposition sur la feuille bleue, feuille collée dans le journal du nombre dans un second temps.

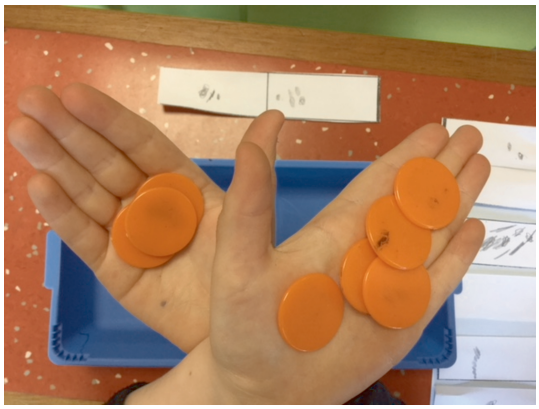
Cette étape me permet donc d'observer les stratégies individuelles et de repérer les difficultés persistantes.



Production écrite d'un élève autour des décompositions du nombre 4.

Lors des séances, les élèves ont pour habitude de retourner la boîte bleue pour utiliser en acte la

commutativité de l'addition (8 c'est « 3 et encore 5 » ou « 5 et encore 3 »). Une de mes élèves les plus fragiles m'a montré qu'elle trouvait les inverses en manipulant directement les pions dans ses mains qu'elle croise.

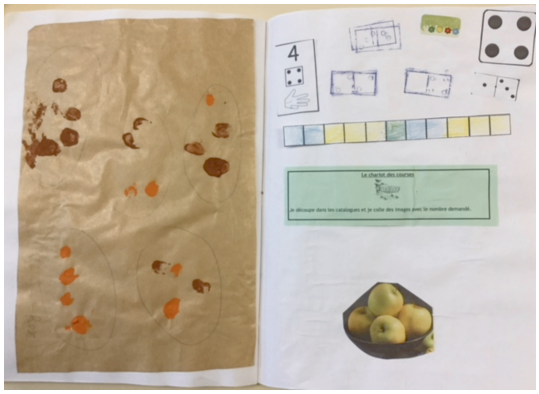


8 *c'est « 3 et encore 5 » ou « 5 et encore 3 ».*

Elle a montré aux autres sa stratégie lors d'un temps de bilan des activités.

Séances suivantes : création du journal du nombre

Afin d'avoir un support qui regroupe toutes nos activités autour de la décomposition du nombre, j'ai décidé de mettre en place un journal du nombre individuel.



Extrait du journal du nombre d'un élève.

Celui-ci retrace la démarche évoquée plus haut mais surtout permet aux élèves de se l'approprier bien au-delà des séances dirigées.

Chaque élève réalise son journal du nombre, qu'il complète et enrichit au fur et à mesure avec différentes façons de travailler la décomposition des nombres comme la peinture avec les doigts, les tampons, des collages d'objets…



Laurence Le Corf est enseignante en grande section de maternelle et directrice de l'école maternelle Curie à Saint-Brieuc (22). Elle est également PEMF (Professeur des Écoles et Maître Formateur) au sein de l'Institut National Supérieur du Professorat et de l'Éducation (INSPÉ) de Bretagne, sur le site de Saint-Brieuc (22).

laurence.le-corf@inspe-bretagne.fr

© APMEP *Octobre 2021*

Comment prolonger en CP le travail de Grande Section sur le « journal du nombre » ? Voici une proposition, mise en œuvre par Isabelle Gautheret, enseignante en CP. S'appuyant sur la méthode ACE, elle reprend le « journal du nombre » et l'utilise comme support pour d'autres activités comme le « jeu des annonces ».

Témoignage

Enseignante en classe de CP au sein d'un dispositif CP dédoublé, j'utilise avec mes collègues le « système d'enseignement » issu de la recherche ACE (Arithmétique et Compréhension à l'École élémentaire) depuis trois ans. L'élément le plus significatif réside, selon nous, dans l'appétence nouvelle des élèves pour le domaine des mathématiques. La construction des connaissances prend appui sur des situations ludiques et notamment un jeu, le « jeu des annonces », qui va évoluer tout au long de l'année en permettant à l'élève de construire des connaissances solides et comprendre le sens des écritures mathématiques.

Le jeu des annonces

Les joueurs produisent une annonce avec leurs deux mains qu'ils doivent désigner à l'oral (exemple : « *J'annonce 5 avec 3 sur une main et 2 sur l'autre* » ou « *J'annonce 3 et 2, cela fait 5* »). Un arbitre lance un dé (de 1 à 6). Les joueurs gagnent (un jeton) si l'annonce correspond au lancer, c'est-à-dire si le nombre de doigts montrés est le même que le nombre de points sur le dé.

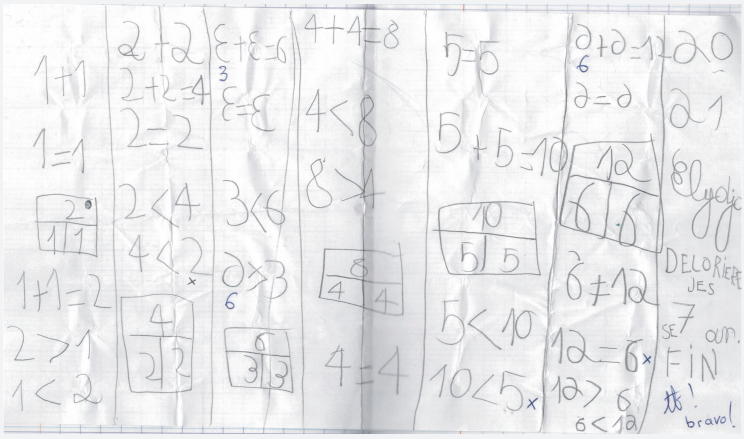


Figure 1. *Extrait d'une production totalement libre d'un élève de CP.*

Une difficulté importante, que peuvent rencontrer certains élèves lors de l'entrée en CP, consiste à passer d'une numération essentiellement orale en maternelle à une numération écrite, mais également à parvenir à l'abstraction des situations vécues. Dans ce système ACE, nous utilisons un « journal du nombre » qui a pour objectif de permettre aux élèves d'écrire des mathématiques, explorer, rechercher. L'élève est amené à produire des mathématiques, le plus souvent à partir d'incitations de l'enseignant mais également de façon plus libre (voir figure n° 1). Le « journal du nombre » constitue véritablement le moyen privilégié pour l'élève d'écrire des mathématiques (abstraction) à partir des pratiques vécues en classe.

La mise en place d'un tel outil dès la classe de Grande Section revêt plusieurs intérêts, bien décrits par Laurence Le Corf dans son article.

Tout d'abord, l'utilisation d'un outil commun contribue à rassurer les élèves en leur permettant de vivre et construire de nouvelles connaissances sur un support connu.

Par ailleurs, la pratique régulière du journal du nombre dès la classe de GS prépare l'élève à passer de la manipulation (par exemple, la boîte à décomposer et ses jetons en GS) à une représentation schématisée (dessin sur feuille des décompositions des premiers nombres) pour parvenir à l'écriture abstraite en mathématiques qui repose sur les nombres écrits (ce que nous voyons d'ailleurs sur les traces écrites en GS) et l'utilisation des signes + et =.



Figure 2. *Jeu des annonces à trois mains et un dé, arbitré par les deux élèves de dos.*

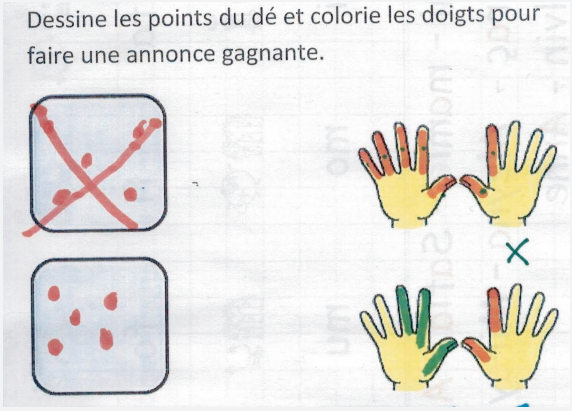
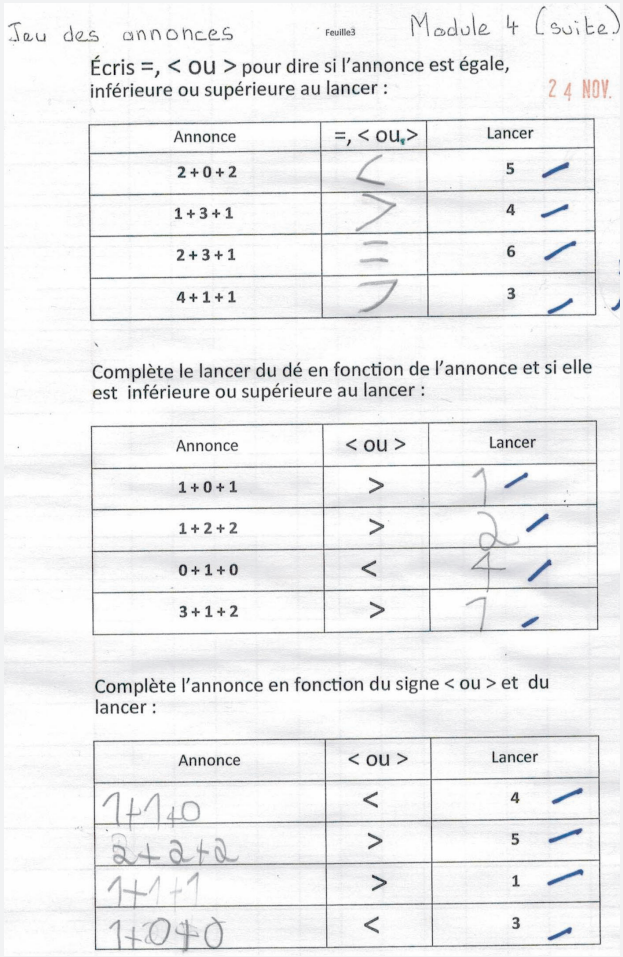


Figure 3. *Extrait du journal du nombre – Dessiner le jeu des annonces : où l'élève ayant repéré son erreur, barre seul et reprend en dessous.*



Jeu des annonces — Module 4 (suite)

Écris =, < ou > pour dire si l'annonce est égale, inférieure ou supérieure au lancer :

24 NOV.

Annonce	=, < ou >	Lancer
2+0+2	<	5
1+3+1	>	4
2+3+1	=	6
4+1+1	>	3

Complète le lancer du dé en fonction de l'annonce et si elle est inférieure ou supérieure au lancer :

Annonce	< ou >	Lancer
1+0+1	>	1
1+2+2	>	2
0+1+0	<	4
3+1+2	>	1

Complète l'annonce en fonction du signe < ou > et du lancer :

Annonce	< ou >	Lancer
1+1+0	<	4
2+2+2	>	5
1+1+1	>	1
1+0+0	<	3

Figure 4. *Extrait du journal du nombre – Comparer des annonces et des lancers.*

En effet, en CP, nos élèves vont vivre des situations additives avec le jeu des annonces pour lesquelles ils utiliseront leurs mains et l'oral (voir figure n° 2). Puis, ils seront amenés à représenter ces situations dans leur journal du nombre (voir figure n° 3). Enfin, après un travail sur le sens et l'intérêt de l'écriture chiffrée et du calcul, au travers des parties de jeu fictives, ils pourront passer à une phase écrite et réaliser une annonce écrite sous forme d'addition et la comparer à un lancer de dé(s), écrit, lui aussi, sous forme d'addition (voir figure n° 4). À partir d'un jeu, les élèves vont réussir à abstraire des situations de comparaison d'écritures additives. Enfin, la transmission du journal utilisé en GS vers le CP permettra aux élèves de revenir sur leurs productions et percevoir le chemin parcouru, ainsi que de poursuivre le travail réalisé en les amenant à compléter leurs premières productions avec les nouvelles connaissances acquises.

La pratique régulière du journal du nombre permet de rassurer et motiver les élèves. Ils prennent plaisir à écrire des mathématiques car ils écrivent ce qu'ils savent, ce qu'ils ont appris et compris, chacun à son rythme et nous constatons avec satisfaction des productions riches où l'élève s'attache à écrire tout ce qu'il sait ! (voir figures n°s 5 et 6).

Pour achever ce témoignage, nous pouvons mentionner le travail réalisé par les enseignants de GS de notre groupe scolaire. Afin de construire la liaison GS / CP en préparant au mieux les élèves, nos collègues de GS font découvrir le premier module d'ACE aux élèves en fin d'année. C'est avec entrain et confiance qu'ils retrouvent ce jeu en début de CP.

Voir la situation train / tour sur le site : Recherche ACE – Arithmétique et Compréhension à l'École élémentaire (espe-bretagne.fr)

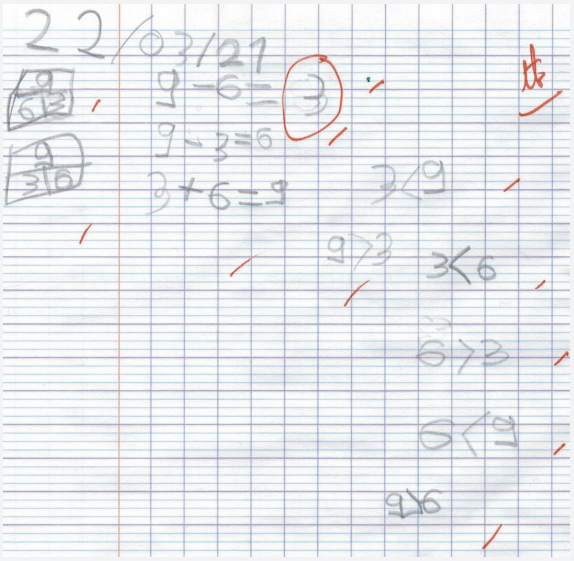


Figure 5. *Extrait de journal du nombre dans lequel il s'agit de résoudre un problème de différence. Le « 3 » étant ce qui est recherché, il est entouré. L'élève ajoute une autre soustraction, ainsi qu'une addition possible pour ce problème et compare tous les nombres.*

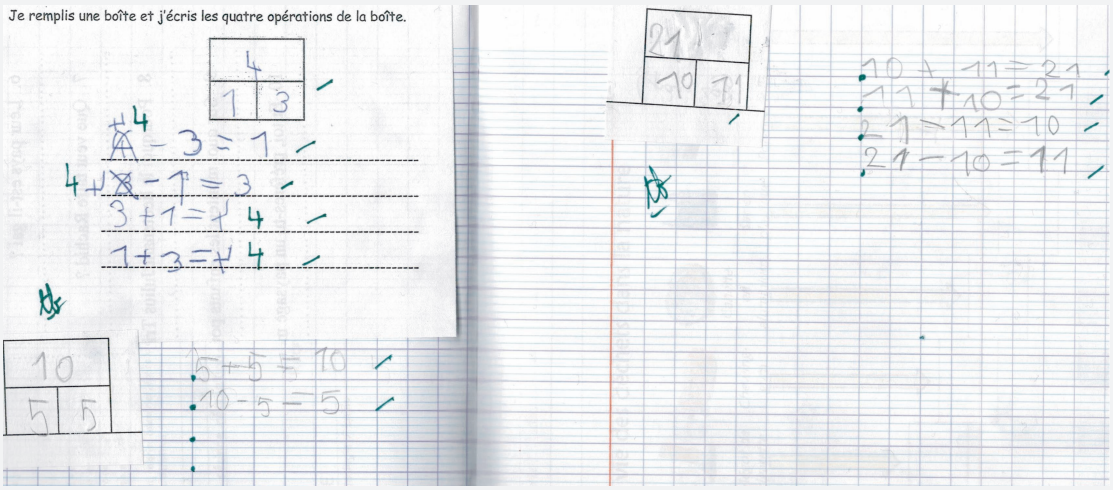


Figure 6. *Extrait de journal du nombre dans lequel il s'agit de remplir une « boîte » et d'écrire les quatre opérations possibles en découlant, après compréhension de leurs relations. L'élève va, ici, au-delà des nombres déjà travaillés (boîte avec 21).*

isabelle.gautheret@ac-rouen.fr

Mouvement mathématique en Bretagne

La semaine des mathématiques est une opération nationale qui, durant une semaine, met l'accent sur notre discipline dans les établissements scolaires du pays. L'initiative ministérielle a pris de l'ampleur ces dernières années, par un agréable effet boule de neige. Et cet encouragement donne maintenant lieu à de nombreux projets. En voici un exemple !

Cet article est paru dans le nº 533 (2019).

Claudie Asselain-Missenard
(contribution de Pascal Jacques)

Le projet que je vais raconter prend naissance en terre bretonne.

Le thème 2018 « mathématiques et mouvement » a inspiré Gwenaëlle, enseignante de CM1-CM2 dans une petite école des Côtes d'Armor. La commune étant bordée par la mer, il était tout naturel de s'intéresser au mouvement des marées, dans une région où elles comptent parmi les plus fortes de France (12 mètres de marnage[1] en grandes marées !). Le thème était de nature à intéresser les enfants. Ils vivent en milieu maritime. En même temps, leurs connaissances étaient très inégales, car la commune est aussi beaucoup tournée vers l'agriculture.

C'est en tant qu'ambassadrice des mathématiques (autoproclamée…), rôle que je joue depuis deux ans dans la classe, que j'ai été sollicitée par Gwenaëlle pour bâtir un projet à dérouler sur cette semaine.

Mon outil de travail dans la préparation ? L'annuaire des marées, et en particulier la page du mois de mars 2018. C'est étonnant de voir la foule de données numériques contenue dans ce petit opuscule que possèdent tous les pêcheurs à pied et navigateurs du secteur. Et tout ce qu'on y découvre, comme régularités et comme irrégularités, lorsque l'on veut bien s'y intéresser de près. Nous avons décidé de partager la classe en cinq groupes. Nous avons embauché dans nos amis du voisinage, qui ont souvent eu une vie liée à la mer, suffisamment de bénévoles pour que chaque groupe d'enfants soit encadré par un adulte. Et, à partir des données numériques de l'annuaire des marées, j'ai choisi cinq points d'entrée mobilisant des contenus mathématiques en lien avec les programmes. Chaque groupe a eu une mission : réaliser une affiche autour des données en sa possession. Cette mission a permis d'observer, de calculer, avec des entiers, des décimaux ou avec des heures et minutes, et de fabriquer des représentations graphiques des données.

Pour commencer…

Une introduction au thème, pour faire émerger les connaissances et représentations des enfants, a eu lieu le lundi matin. Les mouvements de la Terre, de la Lune et du Soleil ont été regardés de

1. Le marnage est la différence de hauteur d'eau entre une marée haute et une marée basse successives.

près. Gros succès de l'orange et du potimarron censés représenter la Terre et le Soleil, placés à une distance proportionnellement convenable.

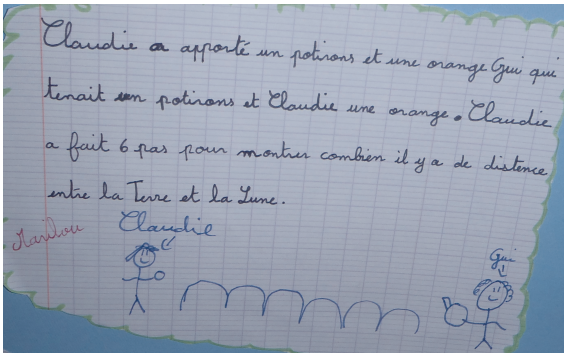


Figure 1. *L'orange et le potimarron (propos d'élève).*

.

Nous avons utilisé le tableau blanc interactif de l'école pour projeter des vidéos scientifiques explicatives. Il en existe beaucoup, souvent anglo-saxonnes. Canopé en propose aussi, dans un style plus enfantin. Pour ces phénomènes complexes, ce que permet l'image animée est vraiment une aide. Internet fourmille de propositions, le plus difficile étant de trouver la plus adaptée[2]. Pour éviter le trop compliqué, mais aussi le trop enfantin ou trop simpliste, le mieux est de se demander d'abord ce que l'on souhaite qui soit retenu au final, et de choisir les supports à montrer une fois cet objectif bien précisé dans sa tête.

Les enfants avaient beaucoup de questions, certains aussi beaucoup de connaissances. Nombreux avaient déjà été à la pêche à pied, en compagnie de leurs papys, nous ont-ils dit. . . Certains voient la mer de chez eux, mais parfois sans la regarder vraiment.

Les activités mathématiques autour des marées

Ensuite, dès l'après-midi, il n'y avait plus qu'à retrousser nos manches et à se mettre au travail : la réalisation de ces fameuses affiches, projet concret et devant nécessairement aboutir puisque les parents étaient d'ores et déjà conviés le vendredi soir pour voir l'exposition du travail de la semaine. Nous avons utilisé les deux temps d'activité périscolaire du lundi et du jeudi (deux fois une heure et demie). Nous avions préparé le travail autour de cinq thèmes (les données et objectifs pour chaque groupe sont disponibles en annexe 2) :

- un groupe travaillait à exploiter les indicateurs numériques donnés par l'annuaire notamment les heures des marées (système sexagésimal) :

Maths et mouvement : heure des marées, semaine du 12 au 18 mars (calculs)

Date	Pleine mer		Basse mer	
	matin	soir	matin	soir
lundi 12 mars	2 h 59	15 h 43	9 h 33	22 h 14
mardi 13 mars	4 h 14	16 h 45	10 h 49	23 h 15
mercredi 14 mars	5 h 06	17 h 31	11 h 41	
jeudi 15 mars	5 h 50	18 h 12	0 h 04	12 h 26
vendredi 16 mars	6 h 29	18 h 50	0 h 46	13 h 05
samedi 17 mars	7 h 07	19 h 27	1 h 25	13 h 45
dimanche 18 mars	7 h 44	20 h 03	2 h 02	14 h 22

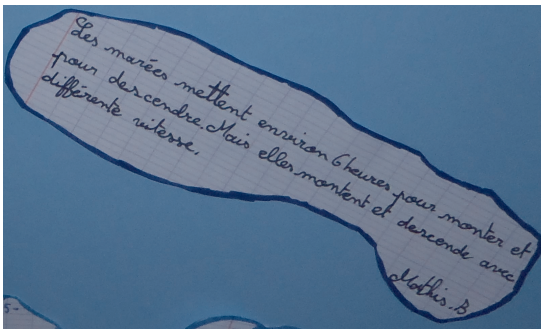


Figure 2. *Durée entre pleine mer et basse mer suivante.*

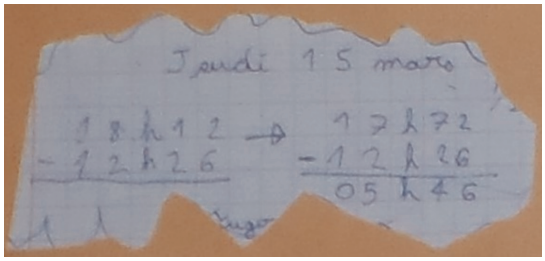


Figure 3. *Calcul de durée.*

2. Vous trouverez en annexe 1 une liste de liens vers des vidéos intéressantes.

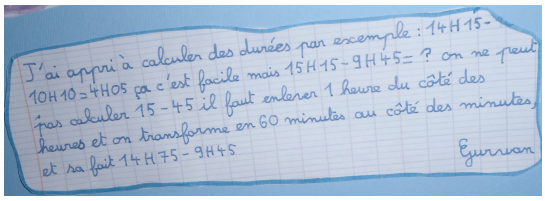


Figure 4. *Bilan élève sur le calcul des durées.*

- un autre travaillait sur les hauteurs des marées (décimaux avec deux chiffres après la virgule) données par le tableau ci-dessous :

Maths et mouvement : hauteur en mètres au-dessus du niveau 0, semaine du 12 au 18 mars (calculs)

Date	Pleine mer		Basse mer	
	matin	soir	matin	soir
lundi 12 mars	8,00	8,15	4,60	4,50
mardi 13 mars	8,55	8,80	3,95	3,80
mercredi 14 mars	9,25	9,30	3,25	
jeudi 15 mars	9,95	10,15	3,10	2,60
vendredi 16 mars	10,55	10,70	2,50	2,20
samedi 17 mars	11,05	11,05	2,00	1,60
dimanche 18 mars	11,40	11,35	1,60	1,25

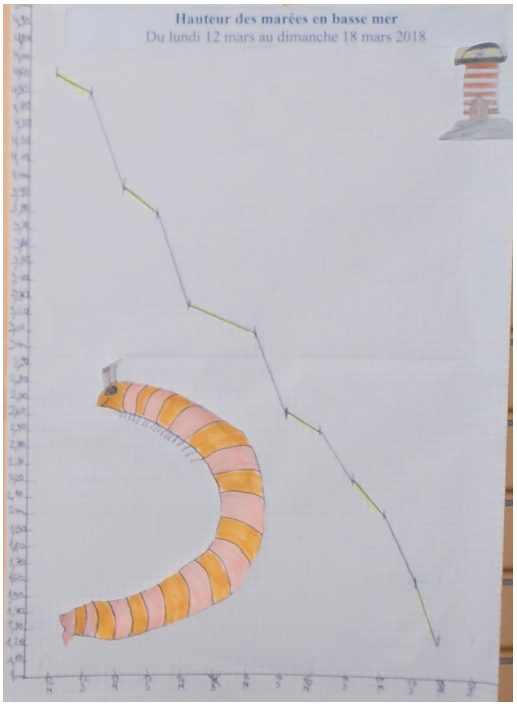


Figure 5. *Hauteur des marées en basse mer.*

- un troisième groupe travaillait sur le coefficient des marées (entier, celui-là) et sur le lien avec les phases de la Lune.

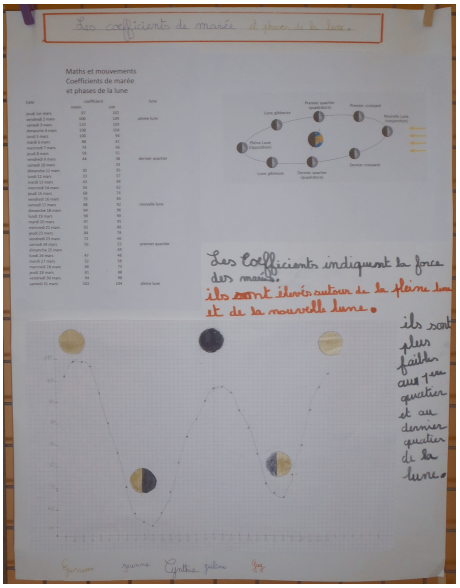


Figure 6. *Coefficients de marée et phases de la Lune.*

- en sus, les heures de lever et coucher du Soleil sur l'année (le 1er et le 15 de chaque mois) ont permis à un autre groupe de dessiner de très jolies sinusoïdes.



Figure 7. *Heures de lever/coucher du Soleil sur l'année.*

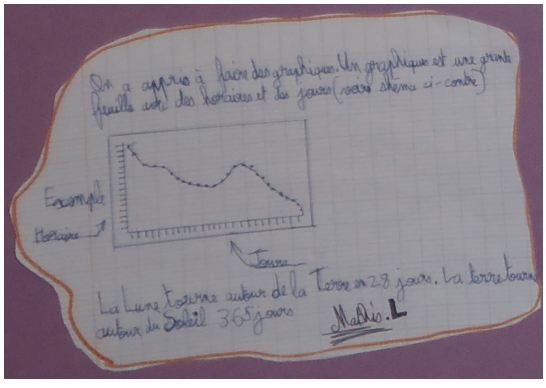


Figure 8. *Bilan élève sur les représentations graphiques.*

- enfin la « règle des douzièmes » a permis au cinquième groupe une petite incursion chez les fractions et dans le monde de la proportionnalité (ou non).

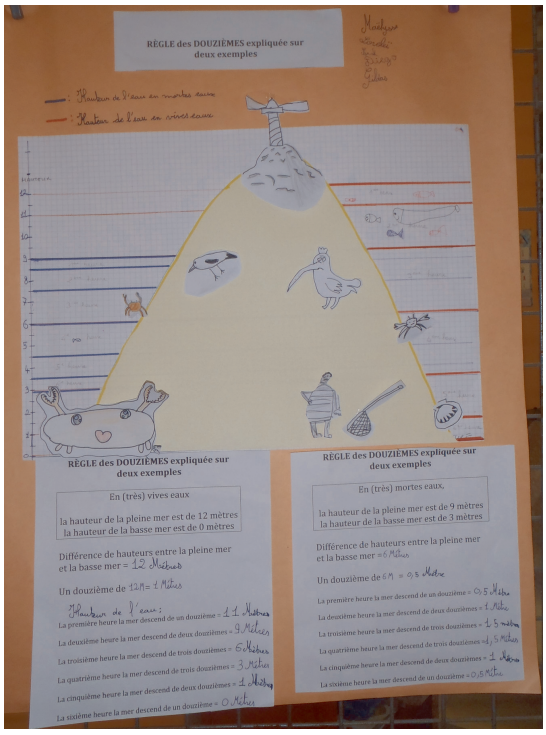


Figure 9. *Règle des douzièmes.*

Encore plus de maths. . .

Au-delà de ce projet thématique, les mathématiques ont vraiment été à l'honneur tout au long de la semaine. L'enseignante a pu retravailler sur les heures, minutes, secondes. Le calcul en système sexagésimal n'est plus très enseigné de nos jours, mais se révèle bien utile pour renforcer la compréhension profonde du mécanisme des retenues quand on calcule en écriture décimale. La classe était par ailleurs inscrite au *Kangourou des Mathématiques* et l'épreuve s'est déroulée le jeudi matin avec beaucoup de concentration et d'application. Et, comme si cela ne suffisait pas, j'ai organisé le vendredi matin le « défi tables de multiplication » promis depuis longtemps. En effet, je suis convaincue que la mauvaise connaissance des tables de multiplication est un handicap important pour les mathématiques au collège et au lycée. Et il s'avère que la motivation par une présence extérieure (moi) est un point d'appui pour le professeur de la classe, qui doit encourager ses élèves dans l'effort de mémorisation.

Bien entendu, à chaud juste après tout cela, et c'est le privilège du premier degré où l'enseignant est pluridisciplinaire, les élèves se sont exprimés par écrit sur leur perception de cette riche semaine, ce qu'ils y avaient appris, ce qu'ils avaient retenu, ce qu'ils avaient aimé. . . Travail qui, accompagné de la production de dessins décoratifs sur le thème de la mer, a permis de réaliser des affiches complétant ou illustrant celles déjà fabriquées. Outre les marques globales d'intérêt, et ce qui a été appris en faisant des mathématiques (dont les enfants n'ont pas forcément eux-mêmes conscience), ce travail écrit a montré que nos principaux objectifs en termes de connaissances scientifiques avaient été atteints : qui tourne autour de qui ? Et en combien de temps ? Quels sont les ordres de grandeur respectifs des trois corps célestes en jeu, et qui est près, qui est loin ? Quel mouvement est à l'origine de quoi (jour/nuit, saisons, marées) ?

Restait à réaliser l'accrochage et à accueillir dignement les parents venus en nombre le vendredi soir : un moment très gratifiant d'échange et de partage. Les enfants ont eu à cœur de montrer leur travail, d'expliquer aux adultes leurs affiches et de leur raconter tout ce qu'ils avaient compris. Les parents se sont montrés réellement intéressés, car concernés aussi par le fond de la question (c'est vraiment compliqué, les marées !) et pas seulement venus là par devoir parental. Et cela s'est fini, bien sûr, autour d'un verre de jus de fruit ou de cidre, d'un boulier (en souvenir d'une précédente sortie à l'exposition *Mathissime*, exposition itinérante produite à Bordeaux par l'association *Cap Sciences*) et de quelques casse-têtes négligemment posés sur les tables par une ambassadrice facétieuse, contente de voir que les parents aussi se prennent au jeu mathématique, pourvu qu'on les y incite.

Épilogue

Si j'ai eu envie de raconter cette expérience, ce n'est pas juste pour faire étalage d'autosatisfaction. Comme toute action pédagogique, celle-ci n'est pas reproductible à l'identique. Les conditions favorables et l'adhésion des enfants et des parents que nous avons eu la chance de voir réunies ici ne sont jamais garanties. Mais il y a malgré cela des enseignements à en tirer.

La satisfaction est au rendez-vous. Une satisfaction qui repose sur des bases solides, j'aurais envie de dire « démontrables ». À l'heure où l'inquiétude est palpable sur l'enseignement des mathématiques dans notre pays, le rapport, rédigé par Cédric Villani et Charles Torossian, contient une analyse des causes du malaise, ainsi que 21 mesures préconisées pour redresser la situation. Toutes sont estimables, mais le problème résiduel est celui de leur mise en œuvre.

À la lumière des 21 mesures de ce rapport, nous pouvons dire qu'il y a une certaine exemplarité dans notre travail de la semaine des maths décrit dans cet article. Gwenaëlle et moi sommes conscientes de la nécessaire priorité à donner au premier degré. Nous avons proposé dès le plus jeune âge un apprentissage des mathématiques fondé sur la manipulation et l'expérimentation, la verbalisation, l'abstraction (mesure 5). Nous avons pratiqué des partenariats institutionnels avec le périscolaire et favorisé localement le développement de ce secteur (mesure 7). Nous avons développé les échanges entre les autres disciplines (astronomie et physique)[3] et les mathématiques (mesure 8). Nous avons bâti un projet où les mathématiques occupaient une place importante (mesure 10). Nous avons cultivé le sens des (grands) nombres et des opérations (mesure 11). Nous avons travaillé à développer les automatismes de calcul par une pratique rituelle (mesure 12). Et surtout, nous avons mis en pratique (avant l'heure) l'idée d'un référent mathématique pour développer la formation continue entre pairs, et en équipe, à l'échelle locale, dans une logique de confiance (mesures 14 et 15).

D'accord, nous avons joué les bonnes élèves. Pas pour mériter un bon point (ceux-ci se font rares dans l'Éducation Nationale), mais parce que nous y croyons. Et parce que nous avions envie de prouver qu'il n'est pas si difficile que cela de passer du vœu pieux à la réalité. Avec des conditions nécessaires d'une certaine légèreté au final : une institutrice dynamique, une prof retraitée qui aime encore les maths et les enfants, quelques bénévoles qui ne demandent que cela, un peu de préparation. Plus un investissement sérieux en temps et en énergie la semaine de l'action, surtout pour l'enseignante de la classe. Une recette qui demande peu d'ingrédients, et qui, comme toute recette culinaire, peut avoir autant de variantes qu'il y a de cuisiniers. Si vous vous en emparez, je peux garantir que le produit fini aura ce goût personnalisé et toujours un peu inattendu qui en fait le charme.



Claudie Asselain-Missenard a pris une retraite méritée après de nombreuses années en poste dans l'académie de Versailles, puis celle de Paris.
claudie.m@club-internet.fr

© APMEP *Octobre 2021*

3. Une poursuite du travail a eu lieu en mai, avec deux jours d'ateliers astronomie, et une nuit d'observation, sous l'égide de l'association *Les Petits débrouillards*.

Annexe 1. Suggestions de vidéos relatives aux phases de la Lune et aux marées

Avec les élèves, nous avons utilisé les vidéos 1, 2, 6 et 7 de cette liste.

1. Mouvements de la Terre et de la Lune. CDP 2008. Vidéo en français, muet, clair. 5 min 59 s.
2. La Lune, satellite de la Terre. Canopé. 2 min 16 s.
3. Les phases de la Lune. Vidéo canadienne, en français. 7 min.
4. Moon phases activity for next time you see the Moon, by Emily Morgan. Vidéo en anglais. 4 min 15 s.
5. Phases Of The Moon For Kids. Learn Science With Elvis. Roving Genius. Dessin animé en anglais. 2 min 43 s.
6. Les marées. Canopé. 2 min.
7. La marée montante en *timelapse* vue de Kermouster. 2 min 15 s.

Annexe 2. Les données et objectifs pour chaque groupe

Cinq groupes, cinq affiches.

Groupe 1 (les cinq CM2)

Heure des marées

Maths et mouvement : heure des marées, semaine du 12 au 18 mars (calculs)

Date	Pleine mer		Basse mer	
	matin	soir	matin	soir
lundi 12 mars	2 h 59	15 h 43	9 h 33	22 h 14
mardi 13 mars	4 h 14	16 h 45	10 h 49	23 h 15
mercredi 14 mars	5 h 06	17 h 31	11 h 41	
jeudi 15 mars	5 h 50	18 h 12	0 h 04	12 h 26
vendredi 16 mars	6 h 29	18 h 50	0 h 46	13 h 05
samedi 17 mars	7 h 07	19 h 27	1 h 25	13 h 45
dimanche 18 mars	7 h 44	20 h 03	2 h 02	14 h 22

Travail attendu : à partir du tableau des heures de pleines mers et basses mers de la semaine du 12 au 18 mars, observer, écrire des remarques, faire des calculs (temps entre pleine mer et basse mer suivante, temps entre deux pleines mers consécutives, constat de la non constance stricte, énoncé de la règle « il y a environ six heures entre une pleine mer et la basse mer suivante. . . » et la confronter aux données. . .)

Outils mis en œuvre : calcul sur les durées, soustractions en système sexagésimal.

« Bonus » : certains élèves pourront aussi réaliser un graphique des heures de haute mer et de basse mer (travail difficile, sur feuille double dépliée) en prenant l'échelle suivante :

- en horizontal : les jours, de lundi à dimanche, tous les 3 cm ;
- en vertical : les heures de 3 h à 21 h, un petit carreau pour un quart d'heure, soit 2 cm pour une heure.

Groupe 2 (5 élèves de CM1)

Hauteur des marées

Maths et mouvement : hauteur en mètres au-dessus du niveau 0, semaine du 12 au 18 mars (calculs)

Date	Pleine mer		Basse mer	
	matin	soir	matin	soir
lundi 12 mars	8,00	8,15	4,60	4,50
mardi 13 mars	8,55	8,80	3,95	3,80
mercredi 14 mars	9,25	9,30	3,25	
jeudi 15 mars	9,95	10,15	3,10	2,60
vendredi 16 mars	10,55	10,70	2,50	2,20
samedi 17 mars	11,05	11,05	2,00	1,60
dimanche 18 mars	11,40	11,35	1,60	1,25

Travail attendu : à partir du tableau des hauteurs de pleines mers et basses mers de la semaine du 12 au 18 mars, produire un graphique pour les hautes mers avec les jours en horizontal et les hauteurs en vertical et un deuxième graphique pour les basses mers.

Outils mis en œuvre : production d'un graphique, réfléchir aux unités, utiliser les nombres décimaux pour placer les points, les joindre par une ligne continue.

Conseil graphique :

Pleine mer, sur feuille double ouverte prise en hauteur :

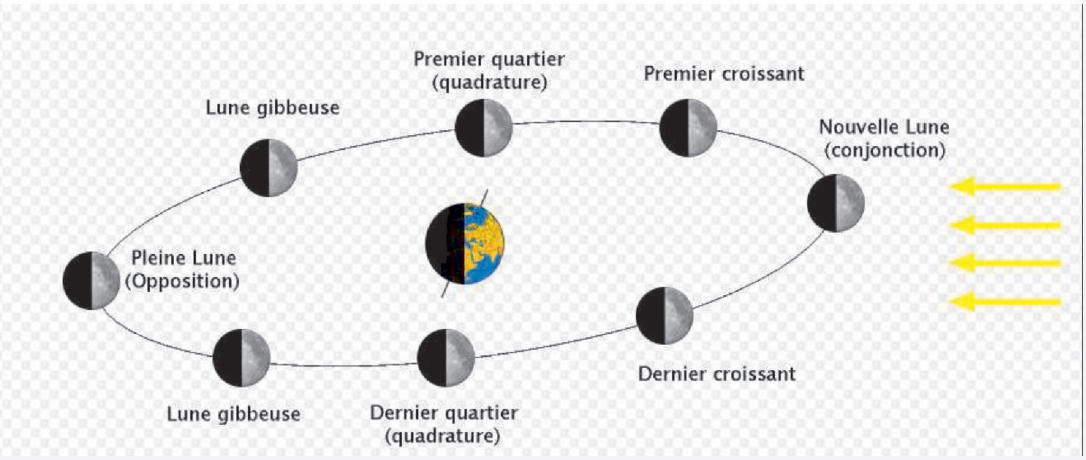
- en horizontal, tous les 2 cm : 12 matin, 12 soir, 13 matin, 13 soir...
- en vertical : les hauteurs de 8 m à 12 m avec 20 petits carreaux entre 8 m et 9 m et ainsi de suite... Graduer l'axe vertical en 8 ; 8,10 ; 8,20 ; 8,30...

Basse mer :

- en horizontal, tous les 2 cm : 12 matin, 12 soir, 13 matin, 13 soir...
- en vertical : les hauteurs de 1 m à 5 m avec 10 petits carreaux entre 1 m et 2 m et ainsi de suite...

Groupe 3 (4 élèves de CM1)

Coefficient de marée et phases de la Lune



Travail attendu : observer les données et comprendre les notions de pleine lune, nouvelle lune, premier quartier. Exprimer le lien entre ces données et le coefficient de marée. Écrire des phrases résumant les observations. Traduire les données par un tableau de variation du coefficient en fonction du jour. Éventuellement, production d'un graphique avec les jours en horizontal et les coefficients en vertical (feuille double dépliée).
Outils mis en œuvre : calcul du nombre de jours séparant deux pleines lunes, en déduire la durée du « tour » lunaire, observer et rédiger le lien avec la marée et les autres observations.

Groupe 4 (5 élèves de CM1)

Lever et coucher du Soleil

Heure de lever et coucher du Soleil (en heure d'hiver)

Date	Lever	Coucher	Date	Lever	Coucher	Date	Lever	Coucher
1er janv.	09:04	17:25	1er mai	05:53	20:24	1er sept.	06:30	19:51
15 janv.	08:59	17:42	15 mai	05:32	20:43	15 sept.	06:49	19:22
1er févr.	08:42	18:08	1er juin	05:15	21:03	1er oct.	07:12	18:49
15 févr.	08:20	18:31	15 juin	05:10	21:13	15 oct.	07:32	18:20
1er mars	07:54	18:53	1er juil.	05:15	21:15	1er nov.	07:58	17:50
15 mars	07:26	19:15	15 juil.	05:27	21:07	15 nov.	08:21	17:30
1er avr.	06:50	19:40	1er août	05:47	20:47	1er déc.	08:43	17:17
15 avr.	06:22	20:01	15 août	06:06	20:24	15 déc.	08:58	17:14

Travail attendu : à partir du tableau des heures de lever du Soleil, établir un graphique des heures de lever du Soleil. Faire de même pour les couchers. Calcul de la durée du jour en été, en hiver. . .
Outils mis en œuvre : production d'un graphique, réfléchir aux unités, utiliser les divisions de l'heure pour placer les points, les joindre par une ligne continue. Soustraction en système sexagésimal.
Conseil graphique (sur feuille double dépliée) :
Levers :

- en horizontal, tous les centimètres, 1er janvier, 15 janvier, 1er février, 15 février, . . .
- en vertical : les heures de 5 h à 9 h, avec un petit carreau pour 5 minutes (c'est-à-dire 6 cm pour 1 heure).

Couchers :

- en horizontal, tous les cm, 1er janvier, 15 janvier, 1er février, 15 février, . . .
- en vertical : les heures de 17 h à 21 h 15 min, avec un petit carreau pour 5 minutes (c'est-à-dire 6 cm pour 1 heure).

Groupe 5 (4 élèves de CM1)

Règle des douzièmes

Règle des douzièmes expliquée sur deux exemples

En (très) mortes eaux :	En (très) vives eaux :
• la hauteur de la pleine mer est de 9 mètres ; • la hauteur de la basse mer est de 3 mètres.	• la hauteur de la pleine mer est de 12 mètres ; • la hauteur de la basse mer est de 0 mètre.
Différence de hauteurs entre la pleine mer et la basse mer =	Différence de hauteurs entre la pleine mer et la basse mer =
Un douzième de =	Un douzième de =
La première heure, la mer descend de un douzième =	La première heure, la mer descend de un douzième =
La deuxième heure, la mer descend de deux douzièmes =	La deuxième heure, la mer descend de deux douzièmes =
La troisième heure, la mer descend de trois douzièmes =	La troisième heure, la mer descend de trois douzièmes =
La quatrième heure, la mer descend de trois douzièmes =	La quatrième heure, la mer descend de trois douzièmes =
La cinquième heure, la mer descend de deux douzièmes =	La cinquième heure, la mer descend de deux douzièmes =
La sixième heure, la mer descend de un douzième =	La sixième heure, la mer descend de un douzième =

Travail attendu : compléter les feuilles de données. Ensuite représenter par un graphique les hauteurs d'eau en mortes eaux, puis un graphique en vives eaux.

Outils mis en œuvre : division par 12 dans des cas simples, proportionnalité, production d'un graphique.

Conseil graphique : feuille simple, mêmes unités pour les deux graphiques.

- en horizontal, tous les 2 cm, marée haute, 1 h après, 2 h après, . . . jusqu'à 6 h après = marée basse ;
- en vertical : les hauteurs de 0 m à 12 m, avec 1 mètre représenté par 4 petits carreaux (soit 2 cm).

Pascal Jacques, enseignant à l'école primaire de Chaumot (89) et référent mathématique de circonscription (RMC), nous livre ses impressions suite à la lecture de l'article *Mouvement mathématique en Bretagne* de Claudie Asselain-Missenard.

Réaction

Le travail proposé montre la richesse d'une approche pédagogique globale. En lisant cet article, je ne me doutais ni de la complexité du système des marées, ni des angles d'approche permettant aux élèves d'en prendre possession.

La complexité est ici bienfaitrice et permet aux plus performants de trouver un autre niveau d'expression, et aux enfants ayant peut être moins d'appétence pour le système scolaire, de trouver un sens à des apprentissages qui leurs paraissent opaques dans les tâches scolaires habituelles.

J'ai également été surpris par la richesse des concepts mathématiques abordés, et il semble qu'une bonne part du programme du cycle 3 puisse y trouver sa place.

Enfin, il m'a semblé important que ces travaux complexes puissent être valorisés par des actions de partage avec un public extérieur, par exemple lors d'une exposition.

L'existence même de cet article et de son support de diffusion répond aux mêmes exigences de partage, au sein cette fois de la communauté enseignante.

Bref, ce type d'expérience collective donne envie de se plonger plus systématiquement dans des activités pédagogiques globales permettant, grâce aux mathématiques et plus généralement aux sciences, l'appréhension d'un monde auquel nous avons tendance de plus en plus à tourner le dos.

Pascal Jacques

La *course aux nombres*

Comment développer, chez nos élèves, des aptitudes pour le calcul mental et construire de multiples automatismes numériques et géométriques ?
Eh bien, vous pouvez, entre autres, inscrire vos élèves (entre 6 et 20 ans) à la course aux nombres, *qu'Anne-France Acciari vous décrit dans cet article.*

Cet article est paru dans le n° 534 (2019).

Anne-France Acciari
(contribution de Coralie Wehrlé)

Créée par le service pédagogique de l'AEFE (Agence pour l'enseignement français à l'étranger), la *course aux nombres* était proposée en 2020/2021 dans sept académies, auxquelles s'ajouteront les académies de Nantes, Montpellier et Rennes à la rentrée prochaine. Les sujets sont d'ailleurs conçus par des équipes de professeurs du 1er degré et du 2nd degré des académies participantes. Nouveauté pour la rentrée 2021 : un groupe de travail APMEP sera chargé, entre autre, de rédiger le sujet de cycle 3.

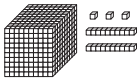
11)	Combien de milliers y a-t-il dans un million ?	… milliers
12)	Complète.	1 000 × … = 1 000 000
13)	L'unité est le petit cube (◰). 	Il y a … unités en tout.
14)	Au judo, il y a 40 garçons et 3 fois plus de filles.	Il y a … enfants en tout.

Figure 1. *Extrait du sujet 6e – mars 2019.*

Depuis six ans, tous les élèves de mon collège participent à cette épreuve d'un nouveau type. Gratuite et simple à organiser, la *course aux nombres* fait maintenant partie de nos grands rendez-vous de l'année. Elle a lieu en général lors de la semaine des mathématiques et n'est pas réservée aux collégiens : les élèves d'école élémentaire, de lycée professionnel, général et technologique (y compris STS) peuvent participer.

Il s'agit pour les élèves de répondre individuellement à 30 questions en neuf minutes. Le sujet se présente sous forme d'une feuille A4 et est envoyé, au format pdf, à l'adresse électronique de l'établissement au moins une semaine avant la passation des épreuves.

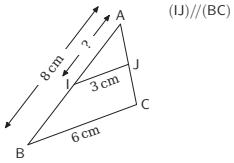
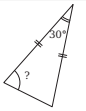
11)	Quel est le plus grand nombre ? $\frac{7}{3}$ $\frac{9}{11}$ 2	
12)	$\sqrt{144}$	
13)		AI = … cm
14)		? = …°
15)	1,25	
16)	Moyenne des nombres : 15 28 5 12	

Figure 2. *Extrait du sujet 3e – mars 2019.*

L'idée est de travailler les fondamentaux et de développer des automatismes dans divers domaines : numération, procédures de calcul, grandeurs et mesures, proportionnalité, etc. Cette démarche s'inscrit parfaitement dans les objectifs définis par les programmes scolaires et la pratique des questions flash. Neuf minutes, c'est court, mais il s'agit d'une course ! D'ailleurs, nous préparons maintenant nos élèves en les entraînant régulièrement. Cette pratique est devenue un rituel et les objectifs sont multiples. Tout d'abord, elle permet d'installer tout de suite une ambiance de travail. Ensuite, lors de la correction, on observe beaucoup d'interactions entre élèves. C'est l'occasion de confronter les différentes stratégies et de faire un travail sur l'erreur. Certains chapitres peuvent ainsi être déroulés tout le long de l'année, grâce à une progression adaptée.

Après avoir corrigé les tests de ses élèves, l'enseignant peut saisir la moyenne de ses classes et les noms des élèves ayant obtenu un score supérieur ou égal à 20/30. Ceux-ci recevront alors un diplôme nominatif et les classes ayant une moyenne supérieure ou égale à 20 un diplôme de classe. Comme pour les récompenses individuelles, le 1er prix est décerné à ceux qui ont 27 ou plus, le 2e à ceux qui ont entre 24 et 26 et enfin le 3e prix à ceux qui ont entre 20 et 23.



DIPLÔME

décerné à

la classe de sixième 4

CLG NELSON MANDELA de ILLKIRCH CEDEX

pour son 2e prix

au concours de la course aux nombres 2019

En 6e, il y a deux particularités. En effet, pour le cycle 3, le concours se passe en deux temps[1] : une épreuve en mars et une épreuve en juin. De plus, afin de permettre aux collègues de réfléchir à différentes stratégies à mettre en place pour aider les élèves à préparer la *course aux nombres*, une gazette disponible en ligne est proposée. Celle-ci comporte trois numéros pour le moment et explicite les choix de questions des concepteurs des sujets des années antérieures.

Cette gazette permet aussi de s'inscrire dans une démarche de travail de préparation sur les trois années du cycle 3.

Les élèves apprécient vraiment beaucoup ce concours. Ils réalisent assez vite des progrès grâce aux entraînements, et pour nous, enseignants, la *course aux nombres* peut être un outil de travail vraiment efficace, notamment pour travailler la compétence « calculer » en créant des automatismes. Faire expliciter les différentes procédures permet de réaliser un travail sur l'erreur et de travailler la compétence « communiquer ». Cette course individuelle peut ainsi être l'occasion de divers travaux collectifs : les élèves peuvent comparer les différentes stratégies, mais aussi réaliser un sujet à proposer à d'autres classes ou à une classe d'un niveau inférieur.

Vous trouverez les gazettes, les sujets des années précédentes, ainsi que les renseignements pour participer sur l'internet, ici.

Anne-France Acciari enseigne au collège Nelson Mandela à Illkirch. Elle est présidente de la Régionale Alsace de l'APMEP et est membre d'un groupe de travail sur la *course aux nombres*.

afacciari@gmail.com

© APMEP *Octobre 2021*

L'APMEP fait maintenant partie de l'aventure. Un groupe de travail *Automatismes* vient juste d'être créé. Son but est de réfléchir à la construction de fondamentaux et au développement d'automatismes. Entre autres choses, il sera chargé de créer les sujets *course aux nombres* cycle 3. Si vous souhaitez y participer, n'hésitez pas à écrire à l'adresse suivante : afacciari@gmail.com.

			Question	Réponses	Intentions
Conversions	CM1	Mars 2018	4 mm + 7 cm	..... mm	Afin de *travailler les deux aspects du système métrique* • aspect « position » : l'ordre a été inversé (4 mm + 7 cm plutôt que 7 cm + 4 mm) pour que ne s'installe pas la procédure consistant à reprendre l'ordre du tableau de conversion. • aspect « décimal » : l'une des unités de mesure dépasse 9 (ici 24) pour permettre d'utiliser la relation 10 mm = 1 cm. Ces deux exemples sont à mettre en parallèle avec le travail de numération 4U + 7D et 24U + 7D.
	CM2	Mars 2018	24 mm + 7 cm	..... cm	
	6e	Mars 2018	Complète.	$1\,m^3$ = ... L	$1\,m^3 = 1\,000$ L est un « fait numérique » à installer. Cette situation sera l'occasion de rappeler qu'*on parle rarement du kL car nous disposons du* m^3. ⟶ On pourra tout de même indiquer qu'avec la signification du préfixe kilo, 1 kL = 1 000 L, donc $1\,m^3 = 1\,000$ L.

1. Depuis 2020, deux épreuves sont aussi organisées en cycles 2, 3 et 4.

Coralie Wehrlé enseigne en classe de CE2/CM1 et CM2 à l'école Lixenbuhl à Illkirch. Désormais adepte de la *course aux nombres*, elle l'utilise couplé à un autre dispositif, *jogging maths*.

Témoignage

Course aux nombres, *une meilleure acquisition des notions enseignées*

J'ai découvert la *course aux nombres* l'an passé. Chaque question touche à différents domaines mathématiques (numération, calcul, géométrie, grandeur et mesure et problème). Les élèves ont un temps limité pour y répondre. Cette formule rapide et efficace leur plaît beaucoup.

Une métacognition au service des autres élèves

Lors de nos entraînements à la *course aux nombres*, j'utilise la correction pour que des élèves viennent au tableau expliquer leur manière de raisonner sur certaines questions plus délicates. Le but étant de montrer qu'il existe différentes manières de résoudre une question mathématique, certaines plus rapides que d'autres. J'insiste sur la dédramatisation de l'erreur en interrogeant des élèves qui n'ont pas trouvé le résultat ou dont le résultat n'est pas juste. La classe les aide, alors, à mener une réflexion. L'important est donc de pouvoir expliquer ou de construire son raisonnement et non de donner une réponse juste.

Activité ritualisée

Mes trois niveaux de classe, une classe de CE2/CM1 et une classe de CM2, ont des *courses aux nombres* régulièrement pour entretenir et mieux mémoriser les notions vues. Parfois certaines notions n'ont pas encore été abordées, j'en profite alors pour faire une mini-leçon de cinq minutes expliquant cette dernière. Les élèves sont souvent très fiers de comprendre une nouvelle notion enseignée de façon informelle. Je précise évidemment pour ceux qui n'ont pas tout saisi de ne pas s'en faire car nous y reviendrons plus en détails.

Mes élèves sont très à l'aise dans cet exercice car ils connaissent le principe de par les *joggings maths* que nous pratiquons quotidiennement. Le *jogging maths* consiste à poser, oralement, cinq questions sur différents domaines mathématiques auxquelles les élèves répondent en quelques secondes. La correction collective se fait à la fin des cinq questions. Voici un lien pour des *joggings maths* pour chaque niveau, la première année correspondant au CP : .

Il y a moins de questions que dans la *course aux nombres* mais le principe est identique. En effet comme il n'existe pas assez de sujets de *course aux nombres* pour en faire tous les jours, je me base aussi sur une progression de *joggings maths*, que j'ai découverts au Québec.

Je pratique ce rituel depuis trois ans et je compte bien le continuer quels que soient les niveaux que j'aurai. Je crois que la ritualisation et l'explication par les pairs, que ce soit en maths ou en français, sont primordiales pour la mémorisation et la compréhension des apprentissages.

coralie.wehrle2@gmail.com

Le Rallye Mathématique Transalpin

Que ce soit en primaire, au collège ou au lycée, ce n'est pas toujours simple de trouver de « bons » problèmes pour mettre les élèves en situation de recherche. Christine Le Moal présente ici le Rallye Mathématique Transalpin et ses problèmes de recherche ainsi que tous les outils qui ont été développés sur lesquels il est aisé de s'appuyer. Une ressource très riche du CE2 à la classe de Seconde. N'hésitez pas à vous lancer !

Cet article est paru dans le n° 535 (2020).

Christine Le Moal
(contribution de Géraldine Comptier, Vincent Eparvier & Félicia Védrine)

Présentation

En Franche-Comté, environ 400 classes de Sixième, Cinquième et Quatrième participent chaque année au Rallye Mathématique Transalpin (RMT). Ce rallye est une confrontation entre classes, chaque classe doit résoudre sept problèmes en 50 minutes et fournir, pour chaque problème, une réponse argumentée unique. Ces problèmes sont systématiquement des petites énigmes contextualisées où se cachent un peu de mathématiques : logique, combinatoire, arithmétique, calculs numériques et proportionnalité, géométrie, suites, fonctions et probabilités pour les deux catégories les plus élevées. L'attribution des points dépend de la rigueur des démarches et de la clarté des explications fournies.

Le rallye s'effectue en trois étapes (éventuellement quatre) : en décembre, une épreuve d'entraînement à l'issue de laquelle la décision est prise d'inscrire ou non la classe, en février et en avril deux épreuves du type décrit ci-dessus et, pour les dix meilleures classes (par niveau) à l'issue de ces deux épreuves, une épreuve finale en mai, toujours du même type.



Le RMT est un rallye international. Plus de vingt sections, soit environ 4 000 classes, l'organisent, essentiellement en Italie, mais aussi en Belgique, en Suisse et au Luxembourg. Il s'adresse à des élèves depuis le CE2 (catégorie 3) jusqu'à la Seconde (catégorie 10)[1].

Tout au long de l'année, dans chaque pays participant, les différentes sections fabriquent, choisissent, adaptent, enrichissent le stock des problèmes. Lors de journées d'études internationales, les animateurs des différents pays participants déterminent les exploitations didactiques des problèmes du RMT et produisent des analyses *a priori* (pour aider l'enseignant à anticiper le travail des élèves) et *a posteriori* (pour rendre compte de réussites et d'échecs d'élèves par catégorie). Ces travaux sont accessibles sur le site de l'association ARMT [1] et les problèmes et leurs analyses sont regroupés dans une banque de problèmes[2] [2].

En quoi proposer ce type de problèmes aux élèves contribue-t-il à leurs apprentissages mathématiques ?

Le groupe de l'IREM de Besançon qui gère l'organisation du RMT en Franche-Comté travaille également à promouvoir auprès des enseignants la recherche de problèmes dans leur pratique régulière de la classe. En effet, beaucoup de professeurs inscrivent leurs classes pour participer au concours, mais n'utilisent pas les problèmes à d'autres moments que lors des trois épreuves annuelles. Or l'apprentissage de la résolution de problèmes ne se fait pas en quelques séances ponctuelles. Il faut mettre plus souvent les élèves en situation pour leur permettre de construire des méthodes de recherche et de mobiliser des connaissances anciennes. Pour illustrer ce propos, appuyons-nous sur quelques travaux de recherche.

Par exemple, Catherine Houdement [3], chercheuse en didactique des mathématiques à Rouen, définit plusieurs sortes de problèmes arithmétiques :

- des problèmes qu'elle a appelés « basiques » : *« il s'agit des problèmes qui constituent des éléments "simples" du raisonnement au sens de la chimie de Mendeleïev »* (problèmes à une étape, ou problèmes à deux données numériques où il faut trouver la troisième, ou proportionnalité simple, ou problèmes sans trop d'informations et où celles-ci sont connectées) ;
- elle distingue ensuite deux sortes de problèmes qui ne seraient pas basiques :
  * d'abord *« des "problèmes complexes" qui sont des agrégats de "problèmes basiques" »* (il faut connecter les informations qui sont dans le texte ou il faut qualifier la réponse),
  * et ensuite *« des "problèmes atypiques" définis justement par leur caractère non routinier, le fait qu'on suppose que les élèves ne disposent pas de stratégies connues pour les résoudre, qu'ils doivent en inventer de toutes pièces, en s'appuyant sur leurs connaissances passées, notamment leur mémoire des problèmes »*.

Le psychologue cognitiviste Jean Julo souligne quant à lui l'importance de la représentation (mentale) dans le processus de résolution de problèmes. Il ne suffit pas de comprendre l'énoncé au sens sémantique du terme, il faut aussi comprendre les relations complexes entre le but donné et les conditions de réalisation de ce but. D'après lui, nous aurions chacun une *mémoire des problèmes* qui nous permettrait de reconnaître et de traiter des problèmes « ressemblants »[3] de façon presque « automatique ». Et nous enrichissons cette mémoire grâce à la résolution *réussie* de problèmes que *nous menons à terme* [4] et [5].

En conclusion, pour retirer les bénéfices de la recherche de problèmes, il faut s'engager dans

1. Les catégories 1 et 2 n'existent pas.
2. Dans la revue numérique, vous pouvez voir un diaporama expliquant l'utilisation de cette banque de problèmes.
3. Point de vue du résolveur.

une pratique régulière avec le souci de faire réussir les élèves par eux-mêmes, accepter qu'ils essaient, échouent, recommencent, en leur donnant des coups de pouce si besoin mais sans « tuer » le problème : « *trop expliquer, c'est empêcher de comprendre* » selon les recommandations du GFEN[4].

Contribution du RMT à la résolution de problèmes

Pour s'engager dans une telle démarche, le RMT est une source très riche. Il propose des problèmes complexes ou atypiques. Confronter les élèves à la résolution de tels problèmes favorise la construction et l'utilisation de connaissances et développe leur inventivité stratégique. Cela permet aussi à l'enseignant d'évaluer (formativement) chez les élèves la connaissance (voire la méconnaissance) de notions déjà enseignées. De plus, le travail collaboratif des élèves pendant la recherche participe positivement à la construction des savoirs ; il stimule leur intérêt pour la résolution de problèmes de mathématiques.

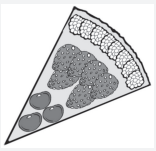
Pour anticiper les difficultés et préparer les coups de pouce, on trouvera dans la banque de problèmes des analyses *a priori* (analyse générale de la tâche, démarches attendues des élèves, obstacles prévisibles) et des analyses *a posteriori* s'appuyant sur des productions d'élèves. Ces analyses permettent de repérer les connaissances minimales nécessaires à la résolution du problème et si besoin d'envisager des problèmes basiques à construire au préalable. Elles permettent également d'anticiper certaines stratégies, certaines erreurs, de repérer les déficits de connaissances des élèves et d'envisager des variantes pour simplifier ou au contraire complexifier le problème en fonction du niveau scolaire des élèves [6].

Un exemple

En cette année 2019, le problème « *La tarte aux fruits* » faisait partie des problèmes de l'épreuve d'entraînement des classes de Sixième en Franche-Comté :

LA TARTE AUX FRUITS (Cat. 4, 5, 6, 7)[5]
Pauline a invité ses amis pour fêter son anniversaire. Son papa a confectionné une excellente tarte aux fruits et, pour contenter tout le monde, il l'a découpée en parts de mêmes dimensions et avec le même nombre de fruits sur chaque part de tarte.
La fête est finie, Pauline constate qu'il reste une seule part de tarte. Sur cette part elle compte 17 fruits et elle s'exclame : « *Tu as vraiment utilisé beaucoup de fruits pour faire la tarte, papa !* »

Ce dessin représente la part de tarte posée sur la table, vue du dessus :



Combien de fruits le papa de Pauline a-t-il utilisés en tout pour décorer la tarte entière ? Montrez comment vous avez trouvé votre réponse.

Le groupe qui l'a cherché dans ma classe de 6e y a passé très peu de temps et a répondu : « $8 \times 17 = 136$ *donc il y a 136 fruits.* » Cette réponse est fausse car il faut 9 parts pour reconstituer la tarte entière.

Quand j'ai fait le bilan de l'épreuve d'entraînement, j'ai indiqué rapidement qu'ils n'avaient pas trouvé la bonne réponse à ce problème mais sans le corriger, car je voulais le réutiliser plus tard dans l'année au moment du travail sur les angles. J'ai alors consulté l'analyse *a priori* de ce problème disponible dans la banque :

ANALYSE *A PRIORI*

Tâche mathématique Déterminer le nombre de secteurs circulaires superposables en lesquels un disque a été partagé, à partir du dessin d'un des secteurs (dont l'angle mesure 40°), pour trouver le nombre total d'objets disposés sur le disque, sachant que sur chaque secteur il y en a 17.

. . ./. . .

4. Groupe Français d'Éducation Nouvelle.
5. 24e rallye mathématique transalpin, 2e épreuve, problème no 6.

. . ./. . .

Analyse de la tâche

- Se représenter la tarte et comprendre qu'elle a été partagée en parts égales, de la même forme, de mêmes dimensions, avec le même nombre de fruits. Comprendre que les parts étant l'une à côté de l'autre, deux parts voisines ont un « côté » en commun.
- Comprendre que pour trouver le nombre total de fruits utilisés, il faut reconstituer la tarte entière, de manière à connaître le nombre de parts en lesquelles la tarte a été découpée.
  Pour reconstruire la tarte, on peut procéder de différentes manières.
  * Découper une part égale à celle qui est dessinée (à partir d'une autre copie de l'énoncé ou en utilisant une feuille de papier calque), la poser à côté de la part donnée, en marquer le contour et continuer de même à reporter cette part sur le dessin de proche en proche, jusqu'à compléter toute la tarte. Compter le nombre des parts ainsi dessinées (9) (stratégie 1).
  * Ou bien, à partir du dessin d'une part, dessiner une autre part égale en pliant la feuille le long d'un côté de la première part et en traçant l'autre côté par transparence et continuer ainsi de suite (stratégie 2).
  * Ou bien, tracer un cercle ayant pour centre la « pointe » de la part de tarte et pour rayon le « côté » de cette part, reporter l'arc ou la corde ou l'angle au centre, compter le nombre d'arcs, de cordes ou de secteurs angulaires (stratégie 3).
  * Ou bien, mesurer au rapporteur l'angle de la part de tarte (40°) et déterminer le nombre de parts en calculant $360 \div 40 = 9$ (stratégie 4).
  * Il est aussi possible de dessiner les parts de tarte « à l'œil », mais cette procédure a peu de chances de donner le nombre exact de parts (stratégie 5).
- Multiplier le nombre de fruits d'une part par le nombre de parts : $17 \times 9 = 153$.

L'analyse de la tâche m'a permis de constater que les procédures possibles étaient nombreuses (cinq différentes citées) et qu'elles correspondaient bien aux attendus du programme :

> ***Angles***
>
> - *Identifier des angles dans une figure géométrique.*
> - *Comparer des angles, en ayant ou non recours à leur mesure (par superposition, avec un calque).*
> - *Reproduire un angle donné en utilisant un gabarit.*
>
> *. . .*
> - *Utiliser le rapporteur pour :*
>   - *Déterminer la mesure en degrés d'un angle*
>   - *. . .*

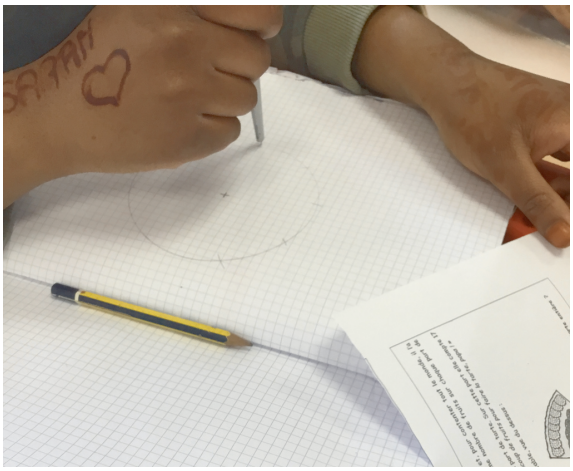
Le moment venu, j'ai donc proposé ce problème à toute la classe. Nous n'avions pas encore évoqué la notion d'angle, c'était donc pour moi l'occasion de constater quelles étaient leurs connaissances sur cette notion.

Comme d'habitude lorsque nous travaillons sur la recherche de problèmes, les élèves s'installent en groupes. Je leur explique qu'ils ont droit à tous les outils à leur disposition (cahier de leçons, livre, dictionnaire, calculatrice, matériel de géométrie) et qu'ils peuvent découper, dessiner et écrire sur l'énoncé. Je leur fournis aussi des feuilles de brouillon, du papier calque et d'autres énoncés.

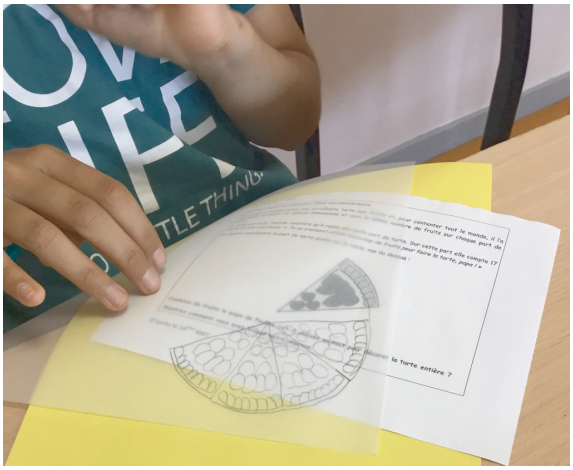
J'ai pu alors observer différentes stratégies :

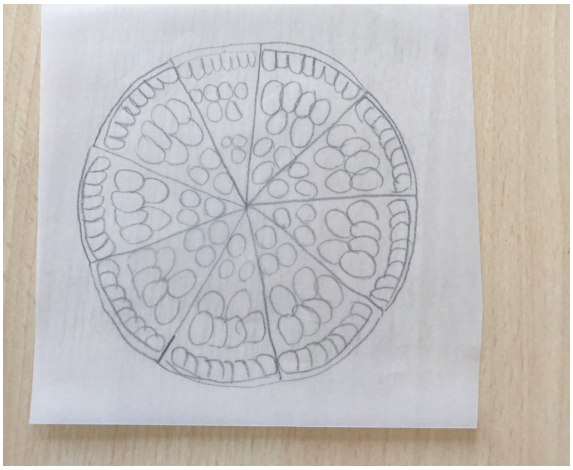
- Un groupe a évalué « à l'œil » 8 parts (stratégie 5), mais quand je lui ai demandé de vérifier sa réponse, il s'est alors impliqué dans une reproduction des parts pour obtenir la tarte entière et s'est rendu compte de son erreur.

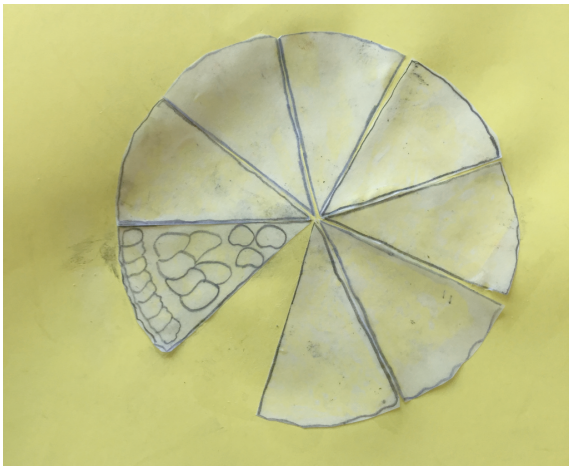
- Stratégie 3 avec report de l'arc :



- La plupart des groupes ont utilisé la stratégie 1, avec dessin ou non des fruits.







Mais ils se sont rendu compte qu'avec la précision de leurs découpages et collages, la dernière part était souvent trop petite.

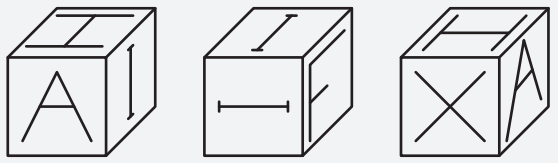
Pourtant aucun élève n'a eu l'idée de mesurer l'angle au sommet de la part de tarte (stratégie 4) ; la notion abstraite d'angle (une grandeur) n'était pas une connaissance disponible pour eux. Nous l'avons donc travaillée par la suite, ce qui a permis de valider la réponse du problème : 9 parts et 153 fruits.

Ce problème utilisé comme découverte d'une notion était très intéressant car atypique. De premier abord, il avait plutôt l'air d'un problème de proportionnalité, et il s'est révélé être un très bon support pour introduire la nécessité de comparer des angles, de trouver des relations entre eux.

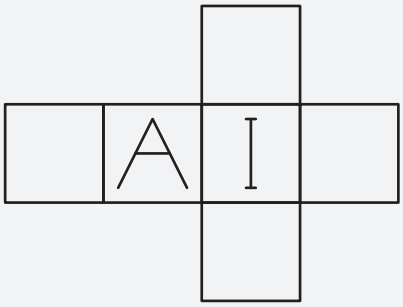
Autre exemple : recherche dans la banque sans idée préalable du problème

Je souhaite travailler sur la visualisation dans l'espace. Je cherche dans la banque de problèmes en utilisant le critère « familles », je choisis « 3D/VS/-changer de point de vue », et parmi les problèmes proposés, en fonction de la catégorie et du résumé des situations, je choisis « *Lettres sur le cube, ral.18.II.16* ».

16. LETTRES SUR LE CUBE (Cat. 7, 8, 9, 10)
Roberto a construit un cube.
Il a écrit une lettre sur chaque face.
Il a ensuite photographié son cube dans plusieurs positions.
Voici trois de ces photos :



Carlo trouve que le cube de son ami Roberto est très intéressant et décide de construire, pour lui-même, un cube parfaitement identique.
Il a préparé un patron de son cube, avec les six faces qu'il va plier et coller avec du papier adhésif transparent.
Il a déjà dessiné le A et un I sur deux des faces.



Dessinez les lettres des quatre autres faces du cube de Carlo pour qu'elles se retrouvent dans les mêmes positions que sur le cube de Roberto.
Y a-t-il plusieurs possibilités de placer les lettres sur ces quatre faces ?
Si oui, faites un dessin pour chaque possibilité.

La lecture des résultats et des procédures, obstacles et erreurs relevés m'apprend que ce problème est plutôt bien réussi, que la difficulté se trouve dans le placement des lettres F et I et dans la recherche de plusieurs solutions.

Mais surtout, l'exploitation didactique me donne des pistes pour aider les élèves qui auront des difficultés :

- construire un développement du cube, y noter les lettres et vérifier ;
- décrire oralement le mouvement qui permet de passer du cube dans sa première position (image de gauche) à sa troisième position (image de droite) et noter les positions de la lettre H dans ce mouvement ;
- confronter les observations des différents élèves pour déterminer celles qui sont les plus efficaces dans la procédure d'identification des faces.

Ce problème existe également avec des figures géométriques à la place des lettres pour les catégories 3, 4 et 5 (c'est-à-dire CE2, CM1 et CM2) : « *Le cube décoré, ral.3.F.04* ». Je peux donc anticiper les difficultés qui pourraient apparaître pendant la séance, proposer à certains groupes, peut-être, le problème des catégories inférieures, apporter des cubes, du papier pour qu'ils puissent découper et construire.

Conclusion

Les problèmes du RMT et leurs fiches d'exploitation que l'on trouve dans la banque de problèmes sont donc une source très riche pour les enseignants, dès le cycle 3. Proposer de résoudre en classe un problème en ayant au préalable des éléments sur les obstacles que les élèves peuvent rencontrer et des pistes pour les aider est rassurant et permet de gagner beaucoup de temps. Alors n'hésitez pas à vous lancer ! Vous constaterez que vos élèves y prendront vite goût et qu'ils seront très inventifs dans leurs stratégies.

Références

[1] ARMT. *Site de l'association ARMT*. . 2019.

[2] ARMT. *Banque de problèmes de l'ARMT*. . 2019.

[3] Catherine Houdement. « Résolution de problèmes arithmétiques à l'école ». In : *Grand* $\mathbb{N}$ n° 100 (mai 2017). , pp. 59-78.

[4] J. Julo. *Représentation des problèmes et réussite en mathématiques*. Rennes : Presses Universitaires de Rennes, 1995.

[5] J. Julo. « Aider à résoudre des problèmes. Pourquoi ? Comment ? Quand ? » In : *Actes du XXVIIe colloque inter-IREM des formateurs et professeurs de mathématiques chargés de la formation des maîtres*. Grenoble : Université Joseph Fourier, 2001.

[6] Francine Athias et al. « Comprendre un énoncé, expliquer à l'écrit une procédure, expliciter oralement une procédure ». In : *La Gazette de Transalpie* nº 8 (octobre 2018). , pp. 162-170.

[7] B. Anselmo et M. Henry. « Les problèmes du Rallye Mathématique Transalpin, une ressource pour la formation des enseignants ». In : *La Gazette de Transalpie* nº 5 (janvier 2017). , pp. 39-52.

[8] Graziella Telatin. « Utilisation en classe des problèmes du RMT ». In : *La Gazette de Transalpie* nº 3 (octobre 2013). , pp. 131-138.

Christine Le Moal est professeure de mathématiques au collège Voltaire à Besançon et coresponsable du groupe « Rallye Mathématique Transalpin » de l'IREM de Besançon.

christine.le-moal@ac-besancon.fr

© APMEP *Octobre 2021*

Géraldine Comptier, Vincent Eparvier et Félicia Védrine, enseignent en cycle 3 à l'école Michel Servet (Lyon 1er) et ont testé avec leurs classes le Rallye Mathématique Transalpin. Ils sont convaincus de ses apports en ce qui concerne la résolution de problèmes.

Témoignage

Pourquoi le RMT

Les classes de cycle 3 de l'école Michel Servet participent pour la troisième année au Rallye Mathématique Transalpin. Celui-ci s'inscrit pleinement dans la volonté de pratiquer la résolution de problèmes dans une autre dynamique, en faisant varier les types de problèmes, les supports, les protocoles proposés.

L'équipe enseignante trouve un réel intérêt à l'utilisation de la typologie de Vergnaud pour la résolution de problèmes, la mise en place régulière de résolutions de petits défis et une formule interclasses avec notamment des classes de Sixième des deux collèges de secteur. Les élèves sont donc déjà confrontés à des situations de recherche, que ce soit en individuel ou en petits groupes.

Le RMT apporte d'autres choses

Avant tout de par le protocole : la classe, dans un temps déterminé, ne doit rendre qu'une seule résolution explicite de chacun des sept problèmes proposés ; cela engendre une collaboration beaucoup plus large que la simple mise en œuvre par petits groupes. L'effacement de l'enseignant est aussi un élément primordial dans la prise en main des élèves. Ils s'accaparent le rallye, l'enseignant n'étant plus un vecteur entre eux et le savoir. Livrés à eux-mêmes si l'on peut dire, ils deviennent les « sachants et sachantes », capables de réussir par eux-mêmes. De plus, le principe par lequel des dizaines de classes participent en même temps au rallye ajoute à la stimulation des élèves qui veulent faire au mieux.

Ce que l'on remarque dans la classe

Au départ, la crainte de voir des élèves s'auto-exclure ou se reposer sur le groupe a toujours été démentie. Chacun prend sa part, parfois en individuel, plus souvent en groupe. Durant les cinquante minutes que dure le rallye, cependant, l'implication évolue.

Après une phase qui ressemble à de l'excitation devant la découverte des problèmes, chacun se pose et cherche, après avoir repéré le ou les problèmes qui lui semble le plus motivant, parce que plus visuel, plus court, avec plus de nombres, mettant en œuvre des notions géométriques ou autre. La variété de niveaux et de types de problèmes permet aux élèves qui sont moins à l'aise de s'impliquer.

Rapidement les élèves s'associent en petits groupes de recherche. Seuls des experts partent en solitaire. En effet, les problèmes étant suffisamment complexes, le cheminement n'a rien d'une évidence de prime abord.
Une fois les premiers résultats affichés, se mettent en place deux stratégies parallèles. Se répartir les problèmes restants pour arriver au bout des résolutions, ce qui se fait facilement, et vérifier ce qui a été fait, ce qui est moins évident.
Au fil du temps qui passe, les élèves changent de problèmes, réussissent, abandonnent, se retrouvent bloqués, comparent leurs résultats. Et, généralement, passée une demi-heure, un petit groupe baisse les bras, ayant donné l'énergie qu'il leur semble nécessaire. Ils laissent aux (estimés) plus experts la mission de terminer pour eux.

Remarques après plusieurs participations

Les problèmes proposés sont toujours renouvelés et tout à fait adaptés aux élèves. Au fil des années, le protocole est assimilé. Aussi, la collaboration en groupe-classe semble plus évidente. La notion de problème complexe est à présent familière des élèves, et on n'entend plus guère le traditionnel « Faut faire quel calcul ? ». Tous les élèves se sentent investis et capables. Ils en oublient le côté « mathématique » pour une mission de recherche ludique. Tous les élèves sont inclus et trouvent une place dans le processus collectif. Les résultats ne sont pas réclamés ou attendus particulièrement. La participation prime. Les élèves sont tout de même curieux de connaître leur positionnement par rapport aux autres, comme dans toute compétition qui donne lieu à un classement.
Le RMT est donc une expérience positive et constructive pour nos élèves que nous sommes prêts à renouveler.

geraldine.comptier@ac-lyon.fr

Des caches multitâches

Depuis quelques années, François Drouin intervient dans les classes de Françoise et Philippe Paquot à Sampigny (Meuse) pour faire vivre des activités parues dans les brochures Jeux École.
En juin 2018, ils ont utilisé les caches de la récente brochure Jeux École 3 – nombres et calculs *pour calculer et jouer avec la symétrie orthogonale.*

Cet article est paru dans le nº 532 (2019).

François Drouin

Pour les deux types d'activité (calculs et symétrie), les caches utilisés ont été découpés quelques jours auparavant. À Sampigny, la classe de Cours Moyen est un cours double. Les séances ont duré une heure trente avec les CM1 -– CM2 et une heure quinze avec les CE2, durées de mise en œuvre des activités de calcul décrites dans cet article. Le travail s'est fait individuellement, une aide pouvant être apportée par le voisin de table.

Des activités de calcul avec des caches

Toutes les activités décrites dans ce paragraphe sont décrites dans la brochure *Jeux École 3 – nombres et calculs* que nous nommerons simplement *Jeux École 3* par la suite. Cette brochure est disponible sur le site de l'APMEP.

L'activité page 137

Elle a été mise en œuvre avec les élèves de CE2.

L'objectif est de placer les caches proposés sur les grilles de nombres de sorte que la somme des nombres rouges visibles soit supérieure à la somme des nombres bleus (ou inférieure ou égale). On peut mettre chacun des deux caches dans la grille de gauche ou de droite et ce dans le sens souhaité (simple rotation du cache) ou après un retournement des caches.

S'il y a plusieurs solutions pour placer les caches de sorte à obtenir une inégalité, il n'en existe qu'une seule pour l'égalité.



Choisis les deux pièces dessinées ci-dessus.
Place ces deux pièces sur les deux grilles ci-contre pour que les conditions demandées soient respectées.
Représente en dessous chacune des solutions en coloriant les emplacements des pièces.

4	62	25
36	27	71
18	49	34

23	82	19
45	54	34
17	61	8

4	62	25
36	27	71
18	49	34

23	82	19
45	54	34
17	61	8

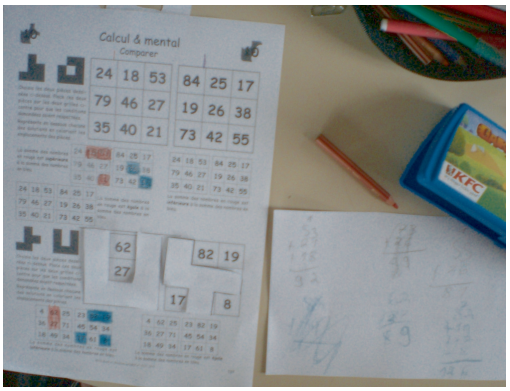
la somme des nombres en rouge est **inférieure** à la somme des nombres en bleu.

4	62	25
36	27	71
18	49	34

23	82	19
45	54	34
17	61	8

la somme des nombres en rouge est **égale** à la somme des nombres en bleu.

Les élèves ont à colorier leurs solutions sur leur feuille d'activité. Les photocopies distribuées étaient en noir et blanc, les nombres en rouge ont été considérés comme les nombres des tableaux de gauche et les nombres bleus ceux des tableaux de droite. Les élèves ont mis des repères de couleurs sur la feuille de travail et ont conservé ces couleurs pour leurs coloriages.



Les élèves ont posé les deux caches au hasard la première fois puis ils ont calculé les sommes restantes et ont pu ainsi trouver l'une des inégalités possibles. Les opérations ont été posées sur les cahiers de brouillon, mais certains élèves ont essayé de faire mentalement certains calculs. Ensuite les élèves ont inversé les caches puis ont joué à les retourner pour trouver d'autres solutions. Les « sommes égales » ont été sans surprise les plus difficiles à trouver : en effet il n'existe qu'une seule solution ! Les élèves ayant réussi ont indiqué aux autres quel cache ils ont placé à gauche (ou à droite).

L'activité page 135

Elle a été mise en œuvre avec les élèves de CM1.

Les élèves ont à colorier les emplacements des caches sur leur feuille d'activité pour montrer comment obtenir les nombres 1 200, 21 100, 13 210 et la plus grande somme possible. Ces entiers sont étudiés en fin de cycle 2. En début de cycle 3, les réinvestir régulièrement dans des calculs est encouragé.

La consigne de l'activité a été comprise par la plupart des élèves. Des aides individuelles ont été apportées à certains.



Choisis les quatre pièces dessinées ci-dessus.
Place ces quatre pièces sur les quatre grilles ci-contre pour que la **somme** des nombres encore visibles soit égale au résultat souhaité.
Représente en dessous chacune des solutions en coloriant les emplacements des pièces.

1		1
10		100

		100
	1 000	
10 000		10

1 000		10
	10 000	
		10

1		1 000
	10	
		10 000

L'activité page 138



Choisis les deux pièces dessinées ci-dessus. Place ces deux pièces sur les deux grilles ci-contre pour que les conditions demandées soient respectées. Représente en dessous chacune des solutions en coloriant les emplacements des pièces.

0,5	1,9	2,07
0,8	1,6	2,1
1,5	2,7	3,3

1,2	2,01	1,7
0,3	2,9	1,8
2,4	1,5	2,6

Elle a été mise en œuvre avec les élèves de CM2.

Comme pour l'activité page 137, les élèves ont à colorier leurs solutions sur leur feuille d'activité pour montrer comment obtenir la somme des nombres rouges supérieure à la somme des nombres bleus (il en est de même pour des sommes inférieures ou égales).

Les remarques à propos de la mise en œuvre de cette activité en CM2 sont très semblables à celles concernant la mise en œuvre de l'activité en CE2 (gestion de la couleur dans le document original, explicitation de certaines consignes). Les calculs ont été faits mentalement ou en posant les opérations sur le cahier de brouillon. La possibilité de solutions multiples n'a pas été évoquée avec les élèves. L'utilisateur de la brochure *Jeux École 3* en trouvera le nombre en fin du dossier « Calcul & Mental ».

Les nombres décimaux commencent à être étudiés en CM1, les réinvestir régulièrement en CM2 est une nécessité.

En CM1, l'activité de recherche de la plus grande somme possible a motivé les élèves, deux d'entre eux ont obtenu le maximum indiqué dans *Jeux École 3*.

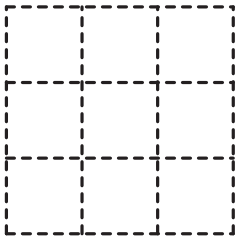
En CM2, les « sommes égales » ont été également les plus difficiles à trouver : les élèves ayant réussi ont en aide indiqué aux autres quel cache serait placé à gauche (ou à droite).

Des activités de géométrie avec les caches

Les élèves ayant les caches en main, nous avons conçu une séance pour les réinvestir en géométrie. Nous commençons par deux activités sans les caches permettant de travailler la notion d'axe de symétrie d'une figure.

L'activité « Croquer »

L'activité « croquer » (page 128 dans *Jeux École 3*) propose la recherche des différentes possibilités de cacher deux carreaux « unités » sur les neuf composant un carré 3×3. Nous l'avons proposée aux élèves de CM.



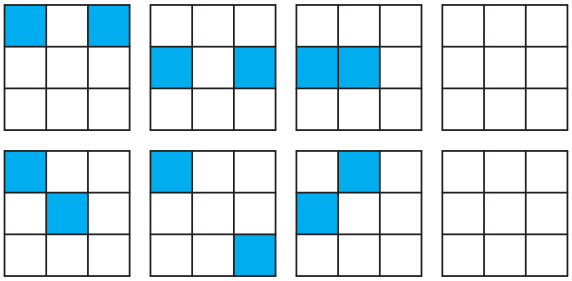
Les élèves de CM1 ont cherché les placements admettant un axe de symétrie de ces deux pions carrés, ceux de CM2 ont cherché les placements non symétriques de ces deux pions carrés.

Chaque élève a eu à sa disposition 2 carrés (aux dimensions des cases du carré 3×3) découpés dans des plastiques divers.

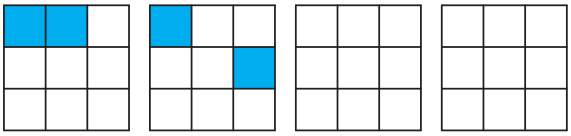
Ils ont entouré d'une même couleur les dessins d'une même pièce.

Le document suivant projeté au tableau a permis de constater quelques oublis dans la recherche des élèves de CM1. Ceux de CM2 ont trouvé les deux caches possibles, la réunion des travaux des deux niveaux de la classe a permis d'obtenir l'ensemble des positions possibles des deux pions carrés.

CM1 : placements pour des pièces admettant un axe de symétrie

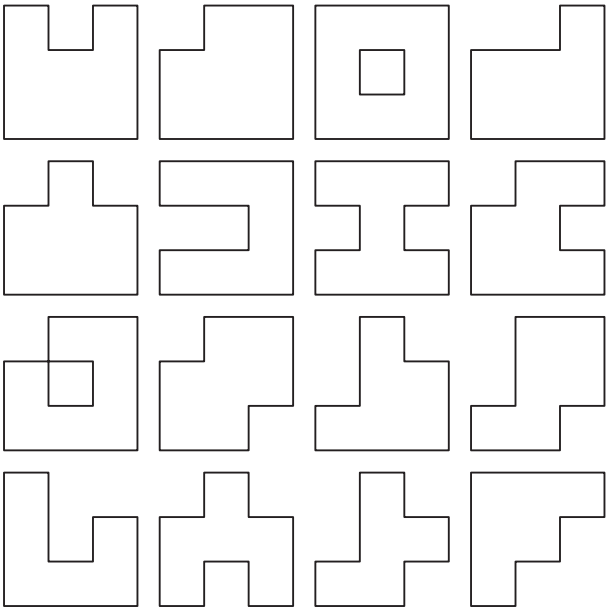


CM2 : placements pour des pièces n'admettant pas d'axe de symétrie



Recherche d'axes de symétrie

Les élèves étant au point sur la notion d'axe de symétrie, nous avons terminé notre séance par la recherche des axes de symétrie des caches en adaptant les questions au double niveau.

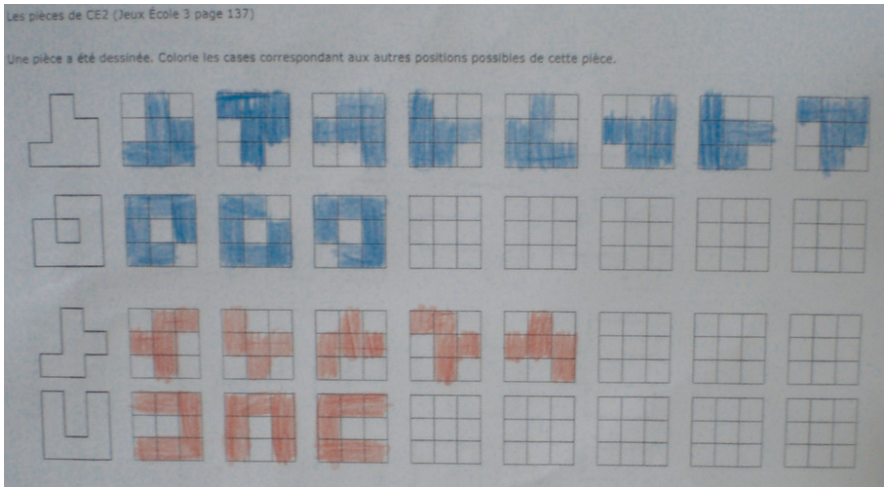


Les élèves de CE2 avaient pour consigne de rechercher les axes de symétrie des caches dessinés sur la feuille distribuée. À la question « combien de pièces sont dessinées ? », l'enseignante et moi-même étions contents de constater qu'en juin, des réponses comme « 16 dessins car 4 fois 4 » devenaient naturelles.

Les élèves ont tracé en rouge les axes, quelques vérifications ont été faites par pliage et transparence au travers d'une fenêtre de la classe. Certains axes de symétrie ont été oubliés, la découverte des quatre axes d'un des dessins a permis à une élève de faire le lien avec les quatre axes du carré.

Un complément possible

Nous avions prévu de faire trouver et dessiner les différentes formes des caches après rotation et retournement. Cette activité peut permettre d'aider les élèves à trouver davantage de solutions dans le cadre des activités décrites dans la partie précédente.



Trouver les différentes positions possibles pour un cache permet de constater qu'une même pièce peut avoir plusieurs positions et que les pièces ayant des axes de symétrie ont moins de positions possibles car lorsqu'on les retourne, on en retrouve une déjà trouvée par rotation. Sur un tableau ou un écran, on ne peut pas plier, il est alors bien utile de solliciter une autre image mentale.

Par manque de temps, les élèves de Cours Moyen n'ont pas pu faire cette activité en ma présence. En CE2, les élèves les plus en avance ont pu commencer la recherche. Ils ont utilisé leurs caches en papier pour visualiser les positions avant de les dessiner.

En conclusion

Les élèves n'ont pas été perturbés par cette succession d'activités géométriques et numériques ou par l'intrusion d'une question de dénombrement pendant une activité géométrique. Associer la présence d'un axe de symétrie à un retournement de pièce (ou à l'image mentale d'un retournement de pièce) devra être poursuivi.

Les lecteurs désirant mettre en œuvre les activités complétant celles de *Jeux École 3* trouveront l'ensemble des documents utilisés en classe en suivant le lien .

François Drouin, professeur retraité, est un membre actif du groupe « Jeux et Mathématiques » de l'APMEP.

francois.drouin2@wanadoo.fr

© APMEP *Octobre 2021*

M@ths en-vie

M@ths en-vie, vous connaissez ? Un beau projet initié par Carole Cortay et Christophe Gilger, qui a pour objectif de montrer aux élèves depuis le cycle 1 jusqu'au lycée que les mathématiques sont bien ancrées dans la vie réelle ! Les auteurs proposent diverses activités, notamment au travers de photographies, pour lesquelles un traitement mathématique est nécessaire. N'hésitez pas à parcourir le site .

Cet article est paru dans le n° 531 (2019).

Carole Cortay et Christophe Gilger
(contribution de Déborah Quéré, Audrey Dufoix, Mélanie Merchan, Christophe Caplain & Arnaud Lierville)

Présentation générale du dispositif

M@ths en-vie est un projet interdisciplinaire en français et mathématiques avec utilisation d'outils et ressources numériques. Il vise à améliorer les compétences des élèves en mathématiques et notamment en résolution de problèmes en prenant appui sur des photos numériques ou des ressources en ligne.

Il repose sur deux objectifs principaux :

- développer la perception des élèves sur les objets mathématiques qui les entourent ;
- ancrer les mathématiques au réel afin d'améliorer la compréhension en résolution de problèmes.

L'intégration des outils numériques dans la démarche pédagogique se fait sur deux plans :

- production, recherche et utilisation de supports numériques réels (photos et ressources en ligne) ;
- utilisation d'outils numériques pour produire, échanger, coopérer et mutualiser.

Toutes les activités proposées dans M@ths en-vie tournent autour de photos numériques prises dans l'environnement quotidien des élèves. Un simple appareil photo dans la classe peut permettre de se lancer dans les différentes activités. En exerçant les élèves à repérer des situations réelles pouvant faire l'objet d'un investissement mathématique, ils se créent un répertoire de représentations qu'ils pourront ensuite mobiliser dans des situations similaires.

À travers les photographies réalisées par les élèves et utilisées dans le cadre de ce dispositif :

- ils construisent l'intérêt d'apprendre les mathématiques parce que cette discipline s'inscrit dans leur réalité de tous les jours ;
- ils mettent du sens derrière chaque donnée et mettent alors en œuvre des procédures de résolution cohérentes ;
- ils construisent des ordres de grandeur et exercent un regard critique sur les solutions de leurs problèmes.

L'utilisation de la photo permet alors de construire ce temps intermédiaire entre une situation vécue, réelle et la construction d'une représentation abstraite visée par l'exercice scolaire.

M@ths en-vie s'inscrit évidemment pleinement dans les nouveaux programmes de 2015 (actualisés en 2018 pour les cycles 2 à 4). Bien qu'ayant une dominante mathématique, ce dispositif permet de balayer d'autres disciplines et notamment de travailler de nombreuses compétences liées à la maîtrise de la langue écrite et orale. Il permet aussi de développer des compétences liées au numérique : usage d'un appareil photo ou de

tablettes numériques lors de « sorties mathématiques », d'outils collaboratifs tel Padlet [1] pour construire des énoncés de problèmes à partir de photos prises par les élèves, d'un blog ou d'un site d'école pour publier les problèmes, de réseaux sociaux (Twitter, Edutwit [2]...) pour participer à des projets collaboratifs entre classes...

Riches et diverses, les activités autour des photographies peuvent être déclinées pour tous les niveaux et mises en œuvre dans la classe avec des modalités variées, comme le montrent les exemples suivants.

« Sortie mathématique » autour des formes en cycle 1

Le principe

Il s'agit, dans la classe, dans l'école ou dans le quartier, de prélever des éléments mathématiques qui serviront de supports à la conception de problèmes. Cette sortie permet :

- d'aiguiser le regard des élèves sur le monde mathématique qui les entoure ;
- de se constituer des bibliothèques de photos appartenant à l'environnement proche des élèves afin de faire vivre les différentes activités.

Même si un panel d'images est proposé sur le site afin de donner des pistes et des idées aux collègues intéressés, il est important de comprendre que le projet repose avant tout sur **une démarche** : celle d'engager les élèves dans une observation fine de leur environnement afin d'y débusquer les notions mathématiques présentes dans le quotidien. La photo permet de garder une trace de cette observation et de la mettre en mémoire pour s'y référer par la suite lors de différentes activités. Il est indispensable de faire vivre aux élèves cette expérience de collecte. Des photos apportées par l'enseignant ne rempliraient pas ce rôle de lien entre une réalité vécue et l'abstraction recherchée.

Point de vigilance : la photographie n'est pas toujours fidèle à la réalité !

Des distorsions risquent d'apparaître sur la photo selon l'angle de prise de vue. Le contrôle des perspectives ne sera pas forcément possible dans les situations réelles. Par exemple, les lignes verticales d'une tour auront tendance à converger et les propriétés géométriques fixées par les photos ne pourront pas forcément être vérifiées. C'est un obstacle qu'il faudra surmonter ou anticiper afin de ne pas déstabiliser les élèves.

Un exemple de scénario pédagogique en cycle 1 sur les formes géométriques

Objectifs mathématiques

- reconnaître et savoir nommer quelques formes et solides ;
- construire des connaissances et des repères sur quelques formes ;
- décrire des objets et leurs caractéristiques.

But de l'activité

Repérer et photographier tout ce qui a une forme ronde et valider collectivement les photos des élèves.

Consigne élève

« Cherchez un objet qui a une forme ronde et prenez–le en photo. Vous serez par groupe de trois élèves. »

Critères de réussite

- Pour l'enseignant : l'élève a trouvé des objets ronds.
- Pour l'élève : je suis capable de valider ma photo en référence avec un objet témoin.

1. Padlet est un outil collaboratif en ligne qui permet de créer et de partager des murs virtuels.
2. Edutwit est un « mini twitter » spécialement dédié aux écoles primaires.

Modalités d'organisation

Deux séances :

- Séance 1 (15 à 30 min ; groupes de deux ou trois) : les élèves prennent des photos. Au départ, on explore un espace connu tel que la classe. Puis on étend le périmètre à l'école et au quartier.
- Séance 2 (grand groupe, ou atelier pour favoriser la parole de tous) : on visionne les photos ; on les valide ou non. Le rejet d'une photo doit être justifié par les élèves.

Aide / Différenciation

Si l'élève a du mal à reconnaître les formes rondes, on peut passer par le toucher, le geste ou le corps : reconnaître par le toucher, décrire un cercle avec le corps, faire un rond avec le bras, faire un rond dans un bac à sable. . .

Interdisciplinarité

Mobiliser le langage dans toutes ses dimensions :

- vocabulaire spécifique : rond, cercle, anneau, boule, . . .
- échanges entre pairs lors de la prise de vue ;
- justification orale dans le groupe.

Conseils pratiques

- Privilégier les tablettes, plus faciles à prendre en main par les petits (cadrage).
- Si la classe ne dispose que d'un appareil, l'activité reste bien entendu possible : l'élève qui veut prendre une photo justifie son choix oralement auprès de l'enseignant qui le valide en direct.
- Utiliser un vidéoprojecteur pour permettre la validation collective.

Pour aller plus loin. . .

- Décliner cette activité pour les carrés, les rectangles, les lignes courbes, les lignes droites, les spirales, les ponts. . . Suivre la progression de la classe en graphisme.
- Créer un imagier de formes géométriques et/ou réaliser une affiche où le lexique est illustré par une photo.

Résolution de problèmes en cycle 2

Le principe

- L'enseignant crée des problèmes à partir des photos prises par lui-même ou par les élèves.
- Le support numérique proposé n'est pas une simple illustration : il contient un ou des éléments mathématiques qu'il est nécessaire de prélever pour pouvoir résoudre le problème.

Travailler à partir de photos de la vie quotidienne des élèves va leur permettre de se constituer des répertoires de situations. En effet, parfois, certains n'entrent pas dans la tâche car ils ne se représentent pas le problème. En parallèle on pourra travailler avec les élèves sur la modélisation des différents problèmes. Il s'agira cette fois–ci d'élaborer des modèles de problèmes avec leur résolution associée auxquels l'élève pourra faire référence pour résoudre son problème. On initiera collectivement les élèves dans cette démarche avant qu'elle puisse être appropriée en autonomie. On s'appuiera sur la classification de Vergnaud qui propose une typologie des problèmes additifs, soustractifs, multiplicatifs et de division.

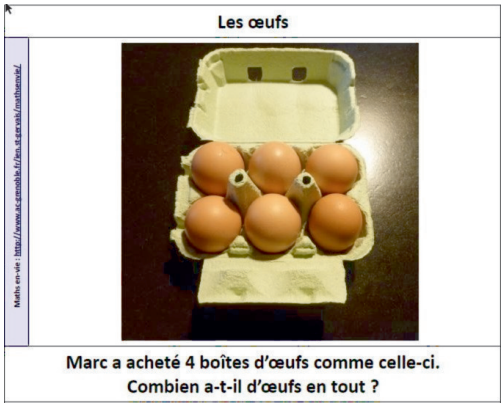
Un retour d'expérience

Nous avons soumis deux problèmes à 179 élèves de neuf classes différentes de CP, CE1 (en très grande majorité) et CE2, au sein de quatre écoles avec des profils très divers.

Problème 1 :



Problème 2 :



Les deux problèmes ont été réalisés par les élèves dans la même séance et dans cet ordre.

Dans le problème 1, classique, les deux données sont présentes dans l'énoncé et la photo n'est qu'une simple illustration du problème, n'apportant aucune information ou représentation.

Dans le problème 2, une seule donnée nécessaire à la résolution du problème est présente dans l'énoncé, mais la photo permet d'apporter la donnée manquante et offre une représentation de la situation (œufs organisés et dénombrables).

Sur les 179 élèves concernés par cette évaluation, 160 ont mis en œuvre une démarche de résolution correcte pour les deux problèmes (multiplication, addition réitérée, schématisation et comptage des unités, surcomptage…), soit 89 % de réussite.

Sur les dix-neuf élèves n'ayant pas réussi ou réalisé le premier problème, on a pu remarquer que, dans le deuxième problème, leur démarche a été soutenue par la photo :

- treize ont entamé une procédure de résolution correcte (schématisation des quatre boîtes d'œufs puis comptage, utilisation de l'addition réitérée et même de la multiplication) ;
- deux ont donné comme réponse 6 et se sont, semble-t-il, contentés de compter le nombre d'œufs dans la boîte (problème de lecture ou de compréhension de consigne ?).
- Pour quatre élèves, les procédures des deux problèmes n'ont pu être interprétées.

Le faible échantillon de cette expérimentation ne nous permet pas de conclure avec certitude de l'efficacité réelle de l'aide apportée par la photo. Cependant, 13 élèves ont réussi à se représenter concrètement la situation, à donner du sens à ce qu'ils faisaient et à mettre en œuvre une démarche de résolution correcte sur le second problème.

Nous notons donc que :

- la grande majorité des élèves en difficulté ou en échec sur le premier problème a entamé une procédure de résolution correcte pour le second ;
- les élèves ayant ajouté les deux données (4 et 5) sur le premier problème, n'ont pas reproduit cette erreur sur le second ;
- la représentation proposée sur le second problème a amené les élèves qui n'avaient pas fait ou pas su se représenter la situation à réaliser un schéma correct.

> Si l'utilisation de la photographie n'est pas nécessaire pour tous, elle a néanmoins permis d'engager tous les élèves et notamment les plus en difficulté dans une réflexion mathématique.

Création de problèmes par les élèves en cycle 3

Le principe

- L'élève (ou l'enseignant) choisit un support numérique (photo, page web…) avec un (ou des) élément(s) mathématique(s).
- L'élève rédige un problème à partir de ce support.
- Le problème est proposé à d'autres élèves de la classe.

Un retour d'expérience en CM1/CM2

Classe hétérogène de 29 CM : 16 CM1 et 13 CM2.

Ci-dessous, les étapes que l'enseignante (Mme Sandrine Chabault) s'est fixées pour mettre en place le dispositif.

1°) Première période

Le travail s'est déroulé sur six à sept séances. À partir d'une photo choisie dans la banque de photos, l'enseignante a demandé aux élèves d'inventer seul(e) ou en binôme, un problème avec la contrainte suivante : on doit utiliser la photo pour pouvoir résoudre le problème.

Un exemple :



« Je suis parti d'une altitude de 2 237 mètres. Quel dénivelé ai-je effectué une fois arrivé au col ? »

Lors de la mise en commun, les élèves ont déterminé les productions qui devaient être écartées puis ont dégagé plusieurs critères afin de définir ce qu'était un énoncé de problème « dans l'esprit M@ths en-vie » :

- il faut que l'énoncé soit en rapport avec la photographie ;
- on ne doit pas pouvoir résoudre le problème si on ne voit pas la photo ;
- l'énoncé du problème doit nous amener à résoudre un problème mathématique, à faire une ou des opérations ;
- l'énoncé doit avoir du sens et être cohérent.

2°) Période suivante :

Lors de deux séances, les élèves ont ensuite essayé de chercher au sein de l'école des situations pouvant donner lieu à un problème mathématique. Ils ont alors fait une « sortie mathématique », pris des photos qu'ils ont déposées sur des ordinateurs de l'école. Ils ont ensuite inventé des problèmes, et se sont aperçus qu'une même photo pouvait donner lieu à plusieurs énoncés. Un travail spécifique en français sur la construction d'une question et l'explicitation d'un énoncé a été nécessaire pour surmonter les difficultés repérées.

S'est ensuivie une discussion sur le niveau de classe auquel les problèmes pouvaient correspondre. Ils ont été proposés à toutes les classes de l'école, de la MS au CM2 en fonction de leur difficulté.

Voici un exemple de problème à destination des MS/GS :



« Le petit train a autant de roues d'un côté que de l'autre. Combien en a-t-il au total ? »

Les points positifs

- la motivation des élèves dans la création de leurs problèmes et leur résolution ;
- des élèves moins complexés face aux problèmes proposés et entrant davantage dans la résolution à la suite du projet ;
- l'émulation dans les autres classes et le lien avec toute l'équipe.

Conclusion

D'autres usages de la photographie sont possibles et décrits sur le site M@ths en-vie : n'hésitez pas à aller les découvrir. . . Une mallette, à destination des formateurs, est disponible pour faire connaître le dispositif lors d'animations pédagogiques (format de deux à trois heures). Elle comprend une trame de l'animation avec le matériel utilisé pour faire vivre des activités aux participants. N'hésitez pas à nous la demander !

Référence

[1] Ressources M@ths-en-vie à destination des enseignants.

Carole Cortay est conseillère pédagogique dans le 1er degré. Christophe Gilger est Enseignant Référent pour les Usages du Numérique (E-RUN) et Professeur des Écoles Maître Formateur en mathématiques (PÉMF). Ils travaillent tous deux dans la circonscription de Saint-Gervais / Pays du Mont-Blanc (Haute-Savoie, académie de Grenoble) pilotée par Philippe Roederer, Inspecteur de l'Éducation Nationale (IEN).

carole.cortay@ac-grenoble.fr

christophe.gilger@ac-grenoble.fr

G T C

© APMEP *Octobre 2021*

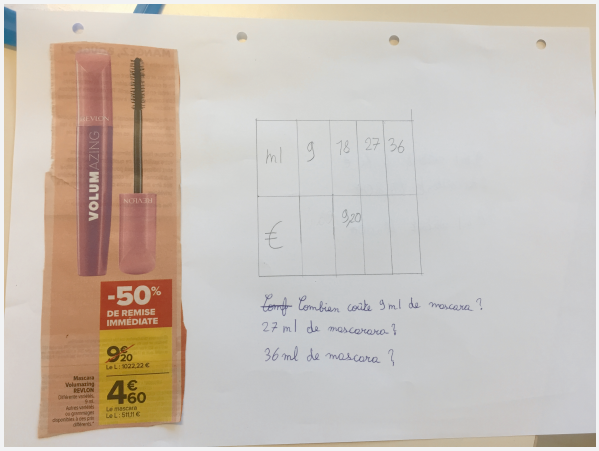
La Société Mathématique de France (SMF) a récompensé cette opération pédagogique innovante dans le domaine des mathématiques en lui décernant, en juin 2018, le prix Jacqueline Ferrand.

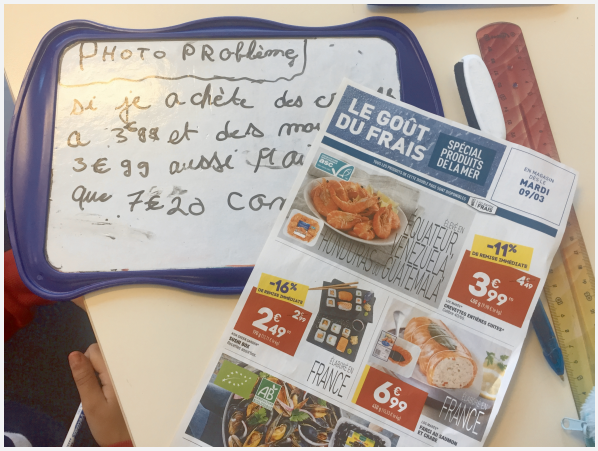


Dans le cadre du plan math, Déborah Quéré, Audrey Dufoix et Mélanie Merchan, trois enseignantes de l'école Louis Aragon de Vernouillet, ont découvert le dispositif M@ths-en-vie et se sont lancées. Leurs témoignages sont recueillis par Christophe Caplain et Arnaud Lierville, RMC dans l'Eure-et-Loir.

Retours d'expérience

En tant que professionnelles, qu'est-ce qui vous a intéressées dans la démarche M@ths-en-vie ?





DQ : j'ai apprécié ce dispositif qui a permis aux élèves de se rendre compte de l'importance des mathématiques (et plus précisément de la résolution de problèmes) dans la vie de tous les jours. D'autre part, il est intéressant de proposer des supports variés aux élèves afin de combattre la systématisation non réfléchie.

AD : ce dispositif permet d'aborder les maths d'une façon différente : moins scolaire, avec une mise en relation de ce que les élèves connaissent, de ce à quoi ils sont confrontés dans la vie de tous les jours. Les mathématiques deviennent plus parlantes et surtout les élèves comprennent de manière concrète que cela leur sert quotidiennement.

MM : j'ai été intéressée par le fait d'ancrer les mathématiques dans la vie pratique, car les photos parlent spontanément aux élèves.

Quels sont les bénéfices que vous avez pu noter auprès des élèves ?

DQ : cela a permis un attrait plus fort pour les élèves. Cela a également permis de faciliter la manipulation grâce à la visualisation de la situation facilitée par l'image.

AD : j'ai noté un meilleur investissement et une meilleure compréhension. Les élèves sont contents rien qu'en entendant « photo-problème ». Alors que le mot « problème » avait plutôt tendance à les angoisser. Cela rend la chose plus ludique.

MM : les élèves entrent plus facilement dans l'activité. Certains ne sont pas (ou moins) bloqués par leurs difficultés de lecture. Ils retiennent plus facilement les données du problème.



Quelles sont les limites ou les contraintes que vous relevez à propos de cette démarche ?

DQ : j'ai trouvé plus difficile de créer des photos-problèmes pour le cycle 3. Lorsque l'on demande aux élèves de créer eux-mêmes des photos-problèmes, ils restent dans des notions assez simples. D'autre part je trouve que le site M@ths-en-vie propose davantage de situations pour les cycles 1 et 2.

AD : certaines situations peuvent ne pas être parlantes du tout pour les élèves, car ils n'ont jamais vu ou connu ce qui est mis en jeu.

MM : je n'ai pas utilisé suffisamment de photos-problèmes en classe pour en trouver les limites.

Pouvez-vous nous expliquer ce que vous avez pu mettre en place en équipe autour de cette façon de faire vivre la résolution de problèmes ?



DQ : nous n'avons pas spécialement travaillé en équipe autour de la résolution de problèmes.

AD : nous en avons beaucoup parlé et nous avons mis en commun les réactions de nos élèves. Il y a eu également quelquefois création de photos-problèmes et diffusion à une autre classe par exemple.

MM : l'an dernier, nous avons essayé de réaliser, par classe, une banque de photos-problèmes (avec les photos apportées par les élèves), dans le but de faire tourner ces banques entre les classes de cycle 3. Mais personnellement, le manque de temps ne m'a pas permis de mener le projet à son terme et de le réinvestir.

christophe.caplain@ac-orleans-tours.fr
arnaud.liervielle@ac-orleans-tours.fr

Math & Manips en géométrie au cycle 1

Des Math & Manips *à tester dans vos classes de maternelle ! Les auteures partagent ici quelques situations favorisant l'apprentissage de connaissances spatiales et géométriques par la manipulation.*

Cet article est paru en deux parties : dans le n° 537 et dans le n° 539.

M.-F. Guissard, V. Henry, P. Lambrecht, P. Van Geet & S. Vansimpsen

Introduction

Dans les classes de maternelle et d'élémentaire, les enseignants sont habitués à faire manipuler les élèves. Toutefois, certaines manipulations sont, plus que d'autres, susceptibles d'installer des concepts mathématiques fondamentaux. Dans la recherche intitulée « *Math & Manips*, des manipulations pour favoriser la construction des apprentissages », une équipe du CREM [1] s'est efforcée de proposer des activités où la nécessité de la manipulation est réellement motivée par le savoir visé, où l'expérimentation fournit la réponse à une question pertinente.

Notre but était de mettre en évidence pour les enseignants l'aspect mathématique des concepts abordés ainsi que les compétences qui sont développées par chacune des *Math & Manips*, mais aussi de montrer en quoi elles contribuent à une meilleure compréhension de notions parfois abstraites.

Le présent article décrit quelques-unes des activités destinées aux élèves de l'école maternelle ; la plupart d'entre elles ont pour cadre le monde sous-marin. Ces séquences d'apprentissage sont axées sur deux thèmes principaux : l'organisation spatiale et la géométrie.

Notons que ces deux thèmes font évidemment déjà l'objet de nombreuses séances de psychomotricité dans les classes. Celles-ci sont indispensables au développement de l'enfant, lui permettent de prendre conscience de son corps et l'aident à structurer l'espace et le temps. C'est pourquoi de telles séances de psychomotricité sont absolument nécessaires avant la mise en œuvre des ateliers proposés.

La partie intitulée « Repérage dans l'espace » aborde, par des activités de codage et décodage de consignes orales ou imagées, des questions de topologie comme l'intérieur et l'extérieur, les itinéraires, les notions au-dessus et en dessous.

Par un travail sur des assemblages de cartes, des empreintes et des puzzles, la partie intitulée « Reconnaissance de formes » amène les enfants à repérer des symétries dans des figures et à reconnaître, assembler et comparer des formes géométriques simples.

Chaque séquence d'apprentissage est organisée en plusieurs ateliers de difficultés diverses qui visent des apprentissages différents, de façon à permettre à l'enseignant de moduler les activités en fonction de l'âge des enfants et de leur niveau. Chaque atelier se déroule avec un groupe de quatre ou cinq élèves, pendant que les autres élèves sont occupés à une tâche autonome.

Nous avons privilégié des activités où l'enfant est amené à faire des choix et à les justifier avant de manipuler, et qui de plus sollicitent différents modes de transmission de l'information (oral, visuel, gestuel, ...) et impliquent des transferts d'un mode à l'autre. Ces caractéristiques qui nous ont paru essentielles ont guidé nos choix tout au long du travail.

1. Centre de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques, à Nivelles en Belgique.

De plus, l'ensemble des manipulations s'appuie sur un matériel facilement réalisable et réutilisable à différents niveaux. Ce matériel est disponible sur le site du CREM.

1. Repérage dans l'espace

Lors des ateliers de cette séquence, les objectifs d'apprentissage pour les enfants sont d'associer le vocabulaire spatial à l'action, de s'approprier certaines notions de topologie et de se familiariser avec la notion d'ordre.

Intérieur et extérieur

Dans le langage courant, l'expression « à l'intérieur de » est souvent traduite par le terme « dans » ; de même l'expression « à l'extérieur de » est associée à « hors de ». Dans les ateliers proposés, l'enseignant veillera à exprimer chaque fois une même localisation de différentes manières.

Bien que la notion d'intérieur soit mieux perçue par les élèves de l'école maternelle, souvent sollicités pour placer un objet à l'intérieur d'un autre, nous travaillons les deux notions simultanément tant elles nous semblent indissociables l'une de l'autre.

Des cercles et des poissons

Cette première activité consiste à compléter un plateau de jeu à l'aide de cartes représentant les notions d'« intérieur » et d'« extérieur ». La distinction entre ces deux notions passe par l'association d'un mot au dessin correspondant.

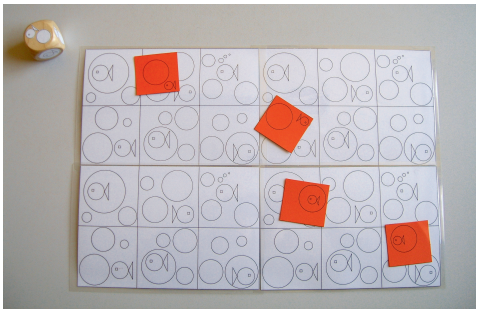


Figure 1

L'enseignant dispose au centre de la table quatre plateaux de jeu « Des cercles et des poissons » assemblés de manière à constituer un seul grand plateau composé de 24 cases (figure 1). Il place à côté, faces dessinées visibles, un tas de cartes « intérieur » — sur lesquelles un poisson se trouve à l'intérieur d'un cercle — et un tas de cartes « extérieur » — sur lesquelles un poisson se trouve à l'extérieur d'un cercle.

Notons que sur les plateaux, l'emplacement du poisson par rapport au cercle est variable, que ce soit à l'intérieur ou à l'extérieur.

Il montre aux élèves un dé « poissons intérieur/extérieur », dé dont trois faces représentent un poisson à l'intérieur d'un cercle et les trois autres faces un poisson à l'extérieur d'un cercle, et donne la consigne :
« *Lance le dé, décris aux autres la position du poisson que tu vois sur la face du dé puis prends une carte « intérieur » ou « extérieur » selon ce que tu as décrit et place-la sur une case libre correspondante. Passe ensuite le dé à ton voisin.* »

Il faut tout d'abord s'assurer que l'enfant décrit correctement le dé, ce qui peut faire l'objet d'une première discussion. Ensuite, si l'enfant prend une mauvaise carte, ou la place à un mauvais endroit sur le plateau de jeu, l'enseignant lui explique son erreur. L'élève remet alors la carte où il l'a prise et recommence son tour. Lorsqu'un élève lance le dé et se rend compte que toutes les cases correspondantes sont déjà occupées, l'enseignant demande quelles sont les cartes qu'il faut prendre pour compléter le plateau de jeu.

Échos des classes

Lorsque les cartes sont imprimées sur papier blanc, les enfants ne distinguent pas facilement les cases occupées sur le plateau de jeu. C'est pourquoi nous conseillons de les imprimer sur du papier de couleur.

Dé codé

On utilise cette fois un « dé codé », sur lequel trois faces montrent un point à l'intérieur d'une forme géométrique (triangle, carré, cercle), et trois faces montrent un point à l'extérieur de ces mêmes formes. Ceci amène l'élève à décoder la symbolisation des mots intérieur et extérieur représentés sur les faces de ce nouveau dé.

L'enseignant distribue à chaque élève un plateau de jeu décoré de nombreux cercles. Il dépose sur la table un tampon encreur représentant un poisson et le dé. Il demande aux élèves de décrire, pour chaque face, la position du point par rapport à la forme géométrique qui s'y trouve et donne ensuite la consigne :
« Lance le dé et, suivant le dessin affiché, estampille ta feuille à un endroit adéquat. »

Avant d'agir, il est important que l'élève explique ce qu'il a lu sur le dé et indique l'endroit où il va estampiller sa feuille.

Cette activité peut être simplifiée en remplaçant, dans un premier temps, le dé codé par le dé poissons.

L'étang

L'enseignant commence par lire aux enfants une histoire ou une comptine dans laquelle il est question de poissons qui sont à l'intérieur ou à l'extérieur d'un étang.

Ensuite, il l'analyse avec eux pour découvrir tous les poissons qui se trouvent dans l'histoire et en créer une représentation à partir de douze cartes à décorer par les enfants en fonction du nom qui leur est donné dans la comptine. Voici un exemple de comptine.

La famille poisson

La famille poisson
Vit dans un étang
Calme et reposant
Comme une grande maison

Mais lors de grands vents
Pires qu'un ouragan
Poisson en or, tu restes dehors
Poisson d'argent, tu es dedans
Poisson rieur, à l'extérieur
Poisson pleureur, à l'intérieur

La famille poisson
Vit dans un étang
Calme et reposant
Comme une grande maison

Lors de grands beaux temps
C'est l'chambardement
Poisson gourmand, tu restes dedans
Poisson junior, tu vas dehors
Poisson râleur, à l'extérieur
Poisson rêveur, à l'intérieur

La famille poisson
Vit dans un étang
Calme et reposant
Comme une grande maison

Lors de brises légères
Quand le jour se lève
Poisson tambour-major, tu vas dehors
Poisson pétillant, hors de l'étang
Poisson dormeur, à l'intérieur
Poisson couleur, à l'intérieur

Lorsque les poissons sont décorés, l'enseignant place sur la table le plateau de jeu représentant l'étang, annonce qu'il va relire lentement l'histoire et donne la consigne suivante :
« Quand tu entends parler d'un poisson qui se trouve dans l'eau, prends son image et place-la à l'intérieur de l'étang. Si l'histoire parle d'un poisson se trouvant hors de l'eau, place le poisson correspondant à l'extérieur de l'étang. »

Les élèves associent, chacun à leur tour, le poisson décrit par la comptine à sa représentation. À chaque phrase, un enfant prend l'image du poisson correspondant et la place à un endroit adéquat sur le plateau de jeu. Les élèves associent ainsi une information auditive à une représentation imagée.

Quand un élève place un poisson, les autres élèves l'observent et corrigent si nécessaire. Il est intéressant de montrer aux élèves qu'une multitude d'endroits correspondent à chaque information (figure 2).

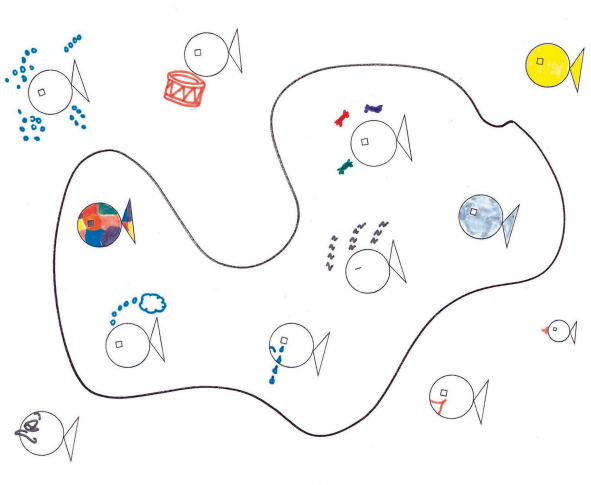


Figure 2

Remarquons que certains élèves ne perçoivent pas la surface de l'étang à la seule vue de son contour. Cependant colorier l'intérieur de l'étang dénaturerait l'activité puisque l'intérieur serait alors simplement apparenté à une couleur.

Dans la vie quotidienne, certaines consignes ne demandent pas d'être entendues entièrement pour être correctement appliquées. Quand on dit à l'élève de ranger les jouets « dans le bac », il n'est pas forcément attentif au mot « dans » lorsqu'il applique la consigne. La comptine proposée est écrite de manière à ce que l'élève ne puisse anticiper l'emplacement du poisson.

Itinéraires

Le but de l'activité est de favoriser l'appropriation de la notion d'ordre. Les élèves l'exercent ici au travers de tracés et de codages d'itinéraires.

Tracer un itinéraire et le coder

Cette activité consiste pour les enfants à tracer un itinéraire à partir d'une bandelette et, inversement, à reconstituer une bandelette pour un itinéraire donné.

Chaque enfant reçoit une feuille sur laquelle sont représentés six éléments marins — poisson, algue, étoile de mer, méduse, corail et coquillage — et un crayon. L'enseignant montre alors aux élèves une bandelette reprenant les mêmes images. Il leur demande de « tracer » avec le doigt, sur leur feuille, un chemin qui suit l'ordre des éléments marins tels qu'ils apparaissent sur la bandelette. Cette étape, destinée à vérifier que tous les enfants comprennent la consigne, se fait collectivement. Ensuite, l'enseignant distribue à chaque élève une bandelette et un crayon puis donne la consigne suivante :
« Trace sur la feuille l'itinéraire qui suit l'ordre des éléments marins de ta bandelette. »

L'enseignant s'assure que chaque itinéraire tracé soit clair pour que le chemin puisse être lu facilement par un autre enfant dans la suite de l'activité. Après avoir éventuellement rectifié les itinéraires, l'enseignant retourne les bandelettes pour cacher la face dessinée. Il distribue à chaque élève six cartes reprenant les mêmes éléments marins et donne la consigne suivante :
« Change de place avec ton voisin. Observe le chemin tracé sur la feuille que tu as devant toi. Place ensuite les cartes, dans l'ordre des éléments rencontrés sur ce chemin, en partant du poisson. »

Lorsque chaque élève a réalisé l'exercice, l'enseignant demande à chacun de retourner la bandelette qui se trouve devant lui afin de vérifier l'ordre des éléments marins (figure 3). Remarquons qu'un chemin dont les éléments seraient placés dans l'ordre correct mais de droite à gauche (figure 4) sera validé, même si par la suite l'enseignant veillera à privilégier le sens gauche-droite. Dans ce cas, la bandelette qui sert à la vérification sera tournée pour faciliter la comparaison comme l'illustre la figure 5.

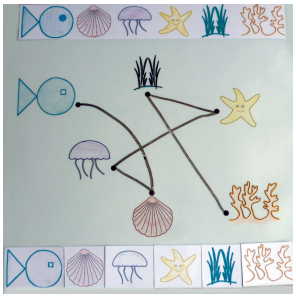


Figure 3

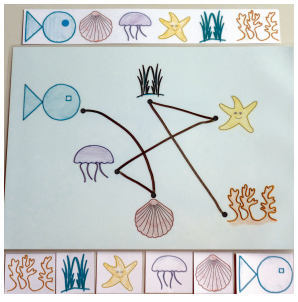


Figure 4

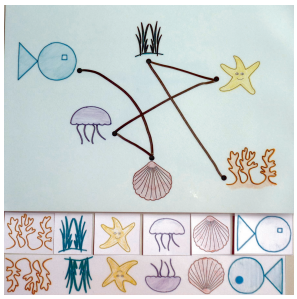


Figure 5

À la fin de l'activité, chaque enfant place dans son cahier la feuille sur laquelle il a tracé un itinéraire et la bandelette correspondante. Par la suite, l'enseignant peut recommencer l'activité en utilisant par exemple des feuilles plastifiées et des feutres effaçables.

Échos des classes

Certains enfants placent les cartes sans tenir compte du chemin tracé mais uniquement de l'ordre dans lequel les dessins apparaissent sur la feuille en le lisant de gauche à droite (figure 6). L'enseignant veillera à rectifier si la vérification par la bandelette n'est pas suffisante.

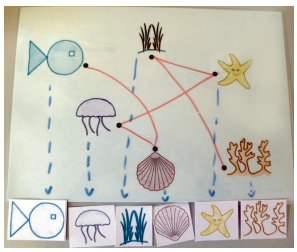


Figure 6

Associer une bandelette à un itinéraire

Il s'agit à présent de retrouver parmi un ensemble de bandelettes celle qui correspond à un itinéraire tracé. L'enseignant distribue à chaque élève trois (ou davantage) bandelettes et une feuille avec les six éléments marins sur laquelle il a tracé préalablement un itinéraire correspondant à une des bandelettes. Les itinéraires seront différents pour chaque élève. Il donne la consigne suivante : *« Parmi les trois bandelettes que tu as devant toi, retrouve celle qui correspond à ton itinéraire sachant qu'il débute au poisson. »*

Une fois l'activité réalisée et corrigée par l'enseignant, les élèves remettent la bandelette avec les deux autres. Ils changent ensuite de place afin de refaire l'exercice avec un chemin différent, les chemins n'étant pas tous du même niveau de difficulté.

Échos des classes

À ce stade, les élèves sont capables d'identifier parmi un ensemble de bandelettes celle qui correspond à un itinéraire. En revanche, face à une bandelette donnée, il leur est difficile de décider si elle correspond ou non au chemin tracé. L'explication avancée par les enseignants des classes maternelles est qu'il est plus facile pour un enfant de cet âge de « choisir » la bandelette qui convient que d'« écarter » celle qui ne convient pas.

Au-dessus et en dessous

Dans les séances de psychomotricité, les élèves de maternelle sont souvent invités à se placer « sur », « sous », ou « au-dessus », « en dessous » d'éléments divers. Dans les activités décrites ci-après, on amène les élèves à utiliser ces repères spatiaux dans d'autres contextes, en plaçant un objet dans une position relative par rapport à d'autres. Les notions « au-dessus » et « en dessous » sont introduites simultanément.

L'arche

Les enfants devront placer une carte au-dessus ou en dessous d'un objet en fonction du code lu sur un dé.

Nous utilisons les cartes représentant les six éléments marins de l'activité précédente, un objet représentant une arche sous-marine sur et sous lequel il est possible de placer des cartes (figure 7).



Figure 7

Dans un premier temps, l'activité se déroule sans dé. L'enseignant pose l'arche sous-marine au milieu de la table, il met les cartes des éléments marins en un tas et donne la consigne suivante : *« Place une carte au-dessus ou en dessous de l'arche suivant ce que je te dis. »*

L'élève prend une carte du tas. L'enseignant indique si la carte doit être placée « au-dessus » ou « en dessous » de l'arche. L'élève dépose sa carte en exprimant son action qui est alors validée collectivement.

Après un premier tour de table, l'enseignant poursuit en intégrant le dé « au-dessus/en dessous ». Il commence par identifier, avec les élèves, les différentes faces. Sur deux d'entre elles, un poisson se trouve au-dessus d'une ligne, sur deux autres faces, le poisson est dessiné en dessous de la ligne. Quant aux deux dernières faces, elles sont neutres, seul le poisson est représenté, laissant l'élève choisir « au-dessus » ou « en dessous ». Il est important de préciser aux élèves qu'il s'agit de décrire la position du poisson par rapport à la ligne et non l'inverse. L'enseignant donne la consigne suivante :
« Prends une carte "éléments marins" puis lance le dé. En fonction du dessin lu sur la face du dé, dépose ta carte au-dessus ou en dessous de l'arche, tout en décrivant ton action. Si la face du dé ne donne aucune indication, choisis l'endroit où tu souhaites la placer en annonçant ce choix aux autres élèves. »

Les élèves jouent à tour de rôle. En fonction de la carte tirée et de la face du dé, l'explication de l'élève pourrait ressembler à : *« j'ai pris le corail et je le mets au-dessus de l'arche »* ou encore *« je place la méduse en dessous de l'arche »*.

Notre objectif étant d'apprendre aux élèves à distinguer des positions et non pas à maîtriser du vocabulaire, dans les explications qu'ils fournissent, nous avons choisi de ne pas insister sur la différence entre « sur » et « au-dessus de » ni entre « sous » et « en dessous de ».

Échos des classes

Chez les petits, certains ne s'exprimant pas encore de manière compréhensible, ils se contentent de prendre une carte et de la placer au bon endroit. Néanmoins, il est important que l'enseignant les incite à verbaliser l'action réalisée.

Des élèves disent « en dessus » et « au-dessous ». C'est alors l'action liée à la parole qui permet de voir si la notion est comprise ou non par rapport à l'indication du dé.

Construction de tours

Les enfants vont construire des tours composées de trois blocs de jeu de construction de couleurs différentes — un bloc bleu, un rouge et un vert — à partir d'informations comportant les mots « sur », « sous », « au-dessus », « en dessous » et « entre ». Les notions « sur » et « sous » sont travaillées d'abord séparément puis simultanément.

L'enseignant donne à chaque élève un bloc de chaque couleur et lui demande de construire une tour à l'aide de ces trois blocs. Cette première consigne a pour seul objectif de vérifier que la notion de tour correspond pour tous à un empilage vertical des trois blocs.

La consigne est ensuite précisée :
« Construis une tour de trois blocs dans laquelle le bloc vert se trouve sur le bloc rouge. »

Chaque élève construit une tour puis la dépose sur la table. L'enseignant vérifie avec les élèves que l'information donnée a bien été respectée. Deux tours différentes peuvent apparaître : une tour « bleu-rouge-vert » et une tour « rouge-vert-bleu ». Si l'une de ces tours n'est pas représentée, l'enseignant la construit et la dépose à côté des autres tours. Les élèves constatent que deux « modèles » sont possibles et devraient prendre conscience qu'une instruction supplémentaire est nécessaire pour que toutes les tours soient identiques.

La consigne est alors précisée :
« Construis une tour dans laquelle le bloc vert est sur le bloc rouge et où le bloc rouge est sur le bloc bleu. »

Une fois les tours construites et les constructions vérifiées, l'enseignant donne une nouvelle consigne en modifiant l'ordre des couleurs. D'autres constructions sont ensuite proposées en utilisant uniquement le mot « sous ». Pour chaque construction, l'enseignant peut donner la première partie de la consigne et attendre que les élèves la réalisent avant de donner la seconde partie de la phrase.

Ensuite, l'enseignant donne des consignes comportant les deux notions simultanément comme : *« construis une tour dans laquelle le bloc bleu est sur le bloc vert et sous le bloc rouge »*. Un élève pourrait dire que, dans ce cas précis, le bloc bleu est « entre » les blocs rouge et vert. Cette remarque fait le lien avec la consigne suivante :
« Construis une tour où le bloc vert se trouve entre le bloc rouge et le bleu. »

Les élèves déposent leur tour sur la table afin de les comparer. Deux modèles de tours répondent aux informations données à savoir bleu-vert-rouge et rouge-vert-bleu. L'enseignant amène les élèves à comprendre qu'une information complémentaire est nécessaire si on souhaite que toutes les tours soient identiques. Sa consigne devient alors la suivante :
« Construis une tour où le bloc vert se trouve entre le bloc rouge et le bleu, et où le bloc vert est sous le bloc bleu. »

Chaque élève modifie sa tour s'il le juge nécessaire, en fonction de l'information supplémentaire entendue. Sur la table, toutes les tours devraient être identiques.

Échos des classes

Les élèves s'attachent toujours à construire leur tour en déposant les blocs sur leur base. Ainsi pour la dernière consigne, lorsque leur tour ne respecte pas la deuxième contrainte, ils reconstruisent la tour plutôt que de la retourner.

Description de tours

Les élèves se munissent de leurs trois blocs. L'enseignant propose à un élève « architecte » de construire, à l'abri du regard des autres, une tour de trois blocs. Puis il lui donne la consigne suivante :
« Décris ta tour en utilisant les mots "sur", "sous", "entre" pour que tes copains puissent construire chacun une tour identique à la tienne. »

Des informations redondantes ou contradictoires pourraient être formulées. Une information redondante comme *« le bloc rouge est sur le bloc vert »* suivie de *« le bloc vert est sous le bloc rouge »* ne permet pas d'avancer dans la construction. Des informations contradictoires telles que *« le bloc rouge est sur le bloc vert »* et *« le bloc vert est sur le bloc rouge »* rendent la construction impossible.

L'enseignant sera attentif à ce que l'élève exprime toujours la position d'un bloc par rapport à un autre ou par rapport à la table. Dire *« le bloc rouge est au-dessus »* n'est pas complet, même si l'on comprend bien que, pour l'élève, cela veut dire que le bloc rouge est au sommet de la tour.

Lorsque tous les enfants ont construit leur tour, toutes les tours sont déposées sur la table. Les vérifications et corrections peuvent alors s'effectuer. L'activité est ensuite répétée plusieurs fois pour que chaque élève puisse prendre le rôle de l'architecte.

Échos des classes

Malgré la précision de la consigne, certains élèves décrivent spontanément leur tour avec des phrases telles que *« il y a d'abord le bloc vert, puis le rouge et puis le bleu »*. L'enseignant rappelle alors que la tour doit être décrite en utilisant les mots « sur », « sous », « au-dessus », « en dessous » ou « entre ».

Description de tours avec contraintes

Il s'agit à présent de décrire des tours de trois blocs en utilisant exclusivement certains mots pour indiquer les positions relatives des blocs.

L'enseignant demande à un élève de construire une tour de trois blocs à l'abri du regard des autres. Il demande à un autre élève de lancer le dé « au-dessus/en dessous » utilisé dans l'activité précédente puis donne à l'élève architecte la consigne suivante :
« Si le poisson est au-dessus de la ligne, utilise uniquement les mots "sur" ou "au-dessus" pour décrire ta tour.
Si le poisson est en dessous de la ligne, utilise uniquement le mot "sous" ou "en dessous".
Si la face du dé n'indique pas de position pour le poisson, les mots "sur" (ou "au-dessus") et "sous" (ou "en dessous") doivent être utilisés dans tes informations. »

L'élève architecte donne des renseignements aux autres élèves en respectant les informations données par les faces du dé afin que chacun d'eux construise une tour identique à la sienne. Les indications peuvent être données en plusieurs phrases avec un temps d'arrêt marqué entre les informations.

Lorsque chaque élève a construit sa tour et l'a déposée sur la table, la tour cachée est dévoilée et on procède à la vérification. On répète l'activité pour que chaque élève ait l'occasion de prendre le rôle de l'architecte.

2. Reconnaissance de formes

Les compétences visées par cette séquence sont de reconnaître des figures qui présentent une symétrie d'axe vertical, de retrouver l'image d'une figure par symétrie axiale, et d'identifier différentes formes géométriques par l'analyse informelle de leurs caractéristiques.

Symétrie

L'objectif est de reconstituer des figures géométriques en respectant une symétrie axiale.

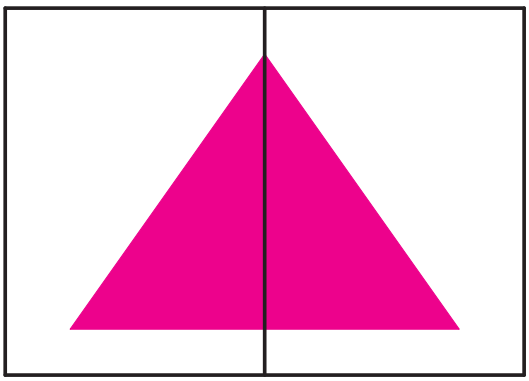


Figure 8

À partir d'un jeu de cartes « solo » comportant une seule forme d'une seule couleur (la figure 8 montre une paire de ce jeu), l'enseignant reconstitue sur la table toutes les paires symétriques. La figure 9 montre la fiche qui permet de réaliser le jeu complet de cartes.

Il laisse aux élèves un temps d'observation et puis leur demande pourquoi il a placé les cartes par deux de cette manière.

L'objectif est de permettre aux élèves de se familiariser avec les cartes symétriques.

L'enseignant peut, dans un premier temps, proposer aux enfants de parler de « cartes amies » pour désigner les paires symétriques.

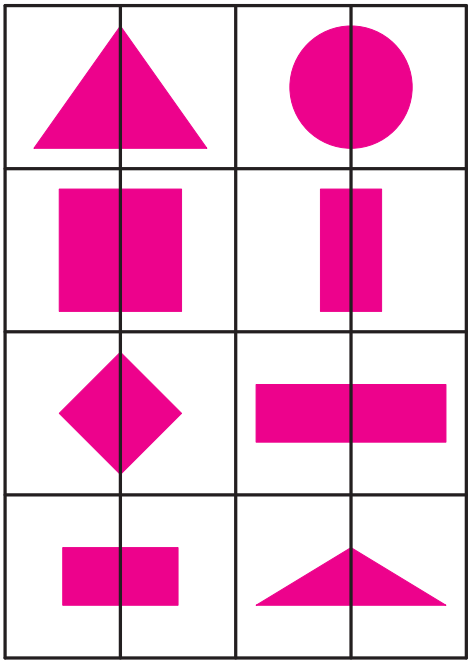


Figure 9

Devant les élèves, l'enseignant reprend une carte de chaque paire et reconstitue des paires dont certaines sont symétriques et d'autres pas. Il demande d'indiquer les paires symétriques et de justifier pourquoi les autres ne le sont pas ; il récupère au fur et à mesure les paires non symétriques. Ensuite, après avoir reconstitué les paires symétriques, il prend une carte de chaque paire, parfois celle de gauche, parfois celle de droite. Il mélange les cartes collectées et les dispose en une pile devant les élèves puis donne la consigne :

« Prends la première carte de la pile et place-la à côté de sa carte amie pour reconstituer les formes que nous venons d'observer ».

Les élèves réalisent un assemblage chacun à leur tour. Une fois qu'ils sont capables de reconstituer des paires symétriques, l'enseignant intègre huit paires de cartes « solo » de l'autre couleur. Il dispose sur la table une carte de chacune des seize paires et empile les cartes restantes. Il donne alors la consigne suivante :

« Prends la première carte de la pile et place-la à côté de sa carte amie pour reconstituer des formes d'une seule couleur ».

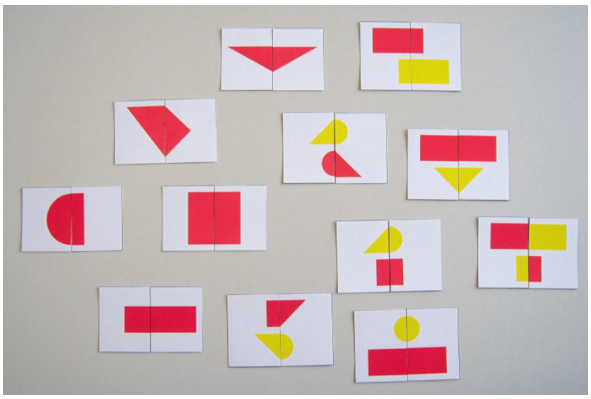


Figure 10

L'enseignant peut réaliser la même activité plusieurs fois tout au long de l'année en la complexifiant grâce à des cartes « duo » (deux formes) d'une couleur ou de deux couleurs. La figure 10 présente différents types de cartes, avec des paires symétriques et d'autres non symétriques.

Échos des classes

La perception de la symétrie d'une figure est déjà très présente intuitivement chez les élèves. Ils arrivent d'emblée à reconnaître des paires symétriques et des paires qui ne le sont pas. La difficulté de l'activité réside principalement dans l'identification de la carte symétrique.

Empreintes

Avant de commencer l'activité, l'enseignant explique ce qu'est une empreinte. Il peut en faire la démonstration en enduisant de peinture une face plane d'une boîte et en l'appliquant sur une feuille de papier. Par la suite, il montre qu'on peut obtenir le même effet en contournant cette face de la boîte et en coloriant l'intérieur de la forme ainsi tracée. Ce sont les surfaces ainsi obtenues que nous appelons « empreintes » dans cette activité.

Nous travaillons uniquement avec les empreintes de faces planes, l'objet ne peut ainsi ni glisser ni rouler lorsqu'on trace le contour d'une face. Par exemple, les seules empreintes d'un cylindre

prises en considération seront des disques. Remarquons que des empreintes assez différentes, non planes, sont obtenues en enfonçant des objets dans du sable par exemple. Ces dernières ne font pas l'objet de cette activité.



Figure 11

L'activité nécessite un ensemble de boîtes, au moins deux boîtes de plus que le nombre d'élèves du groupe, et si possible deux boîtes différentes ayant une empreinte commune. Par exemple : prismes droits à bases triangulaires, à bases hexagonales ou octogonales, à bases carrées, pyramides, boîtes cylindriques, boîtes à base ovale. Un échantillon de dix boîtes permet de nombreuses comparaisons intéressantes.

Empreintes libres

Il s'agit de faire découvrir aux élèves différentes formes obtenues par des empreintes de boîtes.

L'enseignant dépose les boîtes en vrac sur la table, afin qu'elles ne soient pas toutes présentées dans une position habituelle. Il choisit une boîte et réalise sur une feuille l'empreinte d'une de ses faces en la contournant à l'aide d'un feutre et en coloriant l'intérieur de son tracé. Il insiste sur le fait que l'empreinte d'une face correspond à toute la surface colorée et non à son contour. L'enseignant distribue quelques feuilles et un feutre à chaque élève puis donne la consigne suivante :
« *Choisis une boîte et dessine des empreintes* ».

Les élèves devraient dessiner plusieurs empreintes en plaçant leur boîte de différentes manières sur leur feuille. Par exemple, une boîte en forme de prisme droit à bases triangulaires peut donner des empreintes triangulaires et des empreintes rectangulaires. Si nécessaire, l'enseignant encourage l'élève à dessiner plus qu'une seule empreinte, dans la mesure du possible, sans pour autant lui demander de les dessiner toutes.

Si un élève dessine deux empreintes identiques, c'est l'occasion de faire remarquer que les faces correspondantes de la boîte sont identiques. Cette première manipulation a pour but de familiariser l'élève avec la notion d'empreinte et non de trouver toutes les empreintes possibles d'une même boîte.

Association



Figure 12

L'étape suivante consiste à associer des faces planes de boîtes à des formes géométriques à partir de leurs empreintes.

L'enseignant place sur la table des grandes feuilles sur lesquelles sont dessinées les empreintes de toutes les faces des boîtes présentées aux élèves. Il donne la consigne suivante :

« Choisis une boîte puis ensuite retrouve ses différentes empreintes ».

À tour de rôle, chaque élève choisit une boîte, regarde une de ses faces et cherche l'empreinte qui lui correspond. Il dépose alors la boîte sur cette empreinte. Si l'association est correcte, la boîte se positionne exactement sur l'empreinte.

La vérification est faite par le groupe puis l'élève poursuit en choisissant une autre face de la même boîte. Lorsque l'élève, aidé par le groupe, a trouvé toutes les empreintes possibles de sa boîte, la boîte est retirée de la table.

La démarche inverse est travaillée également. L'enseignant montre une empreinte dessinée et donne la consigne :
« Montre la face d'une boîte qui correspond à cette empreinte et vérifie ton choix ».

L'élève choisit une boîte et montre une face du solide qui correspond à l'empreinte. L'élève vérifie son choix en déposant la face de la boîte choisie sur l'empreinte. La boîte est ensuite remise avec les autres boîtes. Puis, c'est l'élève qui a trouvé une boîte correcte qui désigne une empreinte pour le suivant.

Si l'échantillon de boîtes le permet, l'enseignant peut faire trouver aux élèves deux boîtes ayant une face qui donne la même empreinte. Ces deux faces sont alors identiques, on peut les « coller » l'une contre l'autre.

Ressemblance

Pour terminer, on demande aux enfants d'associer la face d'une boîte à une figure géométrique, quelles que soient ses dimensions.

L'enseignant dispose sur la table les différentes boîtes, des gommettes et les quatre formes de couleur représentant un carré, un triangle équilatéral, un rectangle et un disque, puis donne les consignes suivantes :
« Choisis une boîte et montre une de ses faces. Si possible, identifie cette face à l'une des figures géométriques proposées. Prends une gommette de même couleur que la figure et applique-la sur la face indiquée ».

Chacun à son tour, un élève montre une face et repère la figure correspondante parmi les formes se trouvant sur la table. De ce fait, il apprend à observer la forme d'une figure indépendamment de ses mesures, et indépendamment du solide. Lorsqu'il a placé une gommette sur une face identifiée, il replace la boîte sur la table. Si l'élève montre une face plane qui ne correspond à aucune figure de référence, il ne met pas de gommette et explique pourquoi. L'élève suivant choisit une face, sur la même boîte ou sur une autre, et fait le même exercice.

Deux faces avec des gommettes de même couleur sont associées à une même figure, mais ne sont pas pour autant superposables. Une boîte parallélépipédique ayant six gommettes de la même couleur sera soit un cube (composé de faces carrées identiques) soit un parallélépipède rectangle (composé de paires de rectangles identiques).

Notons pour l'enseignant que, si les faces carrées ou circulaires sont bien semblables[2] à la figure de référence, il n'en est pas de même pour les rectangles qui, eux, peuvent être très différents : il y a des rectangles « très allongés » et des rectangles « presque carrés ». Il est important de montrer aux élèves que les faces rectangulaires d'une même boîte peuvent être très différentes bien qu'elles soient identifiées par une gommette de même couleur.

L'activité peut également se faire en sens inverse à savoir, choisir une figure géométrique et chercher une face de boîte qui lui correspond.

Échos des classes

Lorsque les élèves participent à deux activités successivement, ils reprennent systématiquement la boîte choisie lors de la première activité

2. Deux figures sont semblables si l'une est l'agrandissement ou la réduction de l'autre. Les angles correspondants sont alors égaux et le rapport des longueurs correspondantes est constant. Par exemple, un dessin à l'échelle est semblable à l'original.

pour réaliser la deuxième. L'enseignant peut intervenir en encourageant chacun à prendre une boîte différente.

Conclusion

Il reste essentiel de travailler les notions de topologie par le corps, comme c'est le cas lors des séances de psychomotricité qui sont couramment pratiquées avec les tout petits. Cependant, il nous semble important d'accorder suffisamment d'attention à la prise de conscience des positions relatives d'objets extérieurs à l'enfant. C'est cet aspect que nous avons voulu développer dans nos activités dévolues au « Repérage dans l'espace ». La partie intitulée « Reconnaissance de formes » est consacrée à une approche précoce des formes géométriques, y compris la notion de symétrie orthogonale. Cette partie est complétée par l'activité « Puzzles de formes géométriques » qui s'intéresse notamment aux équivalences d'aires. Cette dernière activité a été publiée dans le numéro 535 d'*Au fil des maths*. La mise au point de telles activités d'apprentissage pour les enfants de maternelle et les expériences menées dans des classes nous ont convaincus davantage de l'importance de prendre le temps de mettre en place ces différentes notions avec les jeunes enfants.

Références

[1] Marie-France Guissard et al. « Des puzzles en cycle 1 ». APMEP. In : *Au fil des maths* n° 535 (2020), pp. 13-18.

[2] Marie-France Guissard et al. « Des manipulations pour favoriser la construction des apprentissages en mathématiques ». In : *De la prime enfance à l'âge adulte*. Sous la dir. de M.-F. Guissard et V. Henry coordinatrices. . Nivelles : CREM, 2017.

Marie-France Guissard, Valérie Henry, Pauline Lambrecht, Patricia Van Geet et Sylvie Vansimpsen ont constitué un groupe de chercheurs au CREM (Centre de Recherche sur l'Enseignement des mathématiques) à Nivelles, en Belgique.

info@crem.be

© APMEP *Octobre 2021*



JEUX-Écollège 4

Une brochure APMEP pour la rentrée



Après Match Point en 2019, voici **JEUX-Écollège 4** dans la continuité des brochures JEUX-École 1, 2 et 3 du groupe JEUX de l'APMEP. Si JEUX-École 3 propose des activités sur les nombres et le calcul, celle-ci porte sur l'algorithmique et le raisonnement.

JEUX-École + JEUX-Collège = JEUX-Écollège ! Comme les trois précédentes, les activités portent sur les cycles 2 et 3, et donc aussi la 6ème. Mais la plupart des huit dossiers de cette nouvelle brochure proposent des fiches d'activités de plus en plus complexes qui concernent donc aussi le cycle 4.

Les activités « en débranché » peuvent constituer une première étape pour initier les élèves à la notion d'algorithme indépendamment du matériel disponible au sein de l'école.

Cette nouvelle brochure **JEUX-Écollège 4** répond complètement à cette déclaration des programmes officiels sur l'algorithmique, et pas uniquement pour une simple initiation !

Brochure APMEP n° 1025 — coédition ACL - Les éditions du Kangourou
Format A4 couleur, 144 pages (72 feuillets non reliés)
Prix public : 22 € — Prix adhérent ou abonné : 15,40 €

*

* *

Pourquoi adhérer ?

Adhérer à l'APMEP, c'est :

- recevoir par voie postale le trimestriel *Au fil des maths*, revue professionnelle destinée à tous les enseignants de mathématiques, de la maternelle à l'université ;
- avoir accès à la revue numérique *Au fil des maths*, indispensable pendant de la revue « papier », qui propose des articles inédits, des compléments à certains articles et des ressources vidéo ;
- être tenu·e informé·e de l'actualité mathématique au niveaux national et régional (manifestations, publications, activités de l'association, etc.) par le BGV, lettre d'information bimestrielle ;
- avoir accès aux brochures éditées par l'association à un tarif préférentiel, notamment aux brochures *Jeux école* ou *Jeux écollège*. L'ensemble des ressources éditées par l'APMEP est disponible dans la boutique en ligne.

Adhérer à l'APMEP, c'est aussi montrer son attachement à un enseignement des mathématiques de qualité, pour tous les élèves. Pour connaître les positions défendues par l'association, c'est ici.

Si vous avez l'envie de vous investir dans l'association aux côtés d'autres collègues motivés, la Commission « Premier degré » est faite pour vous ! Tous les détails (sans engagement) en écrivant à : commission.premier-degre@apmep.fr.

Vous pouvez adhérer en ligne pour l'année 2022 ici.

Le nuancier de couleurs en cycle 3

Comment introduire les fractions en cycle 3 ? Agnès Gateau décrit ici une activité interdisciplinaire très riche autour d'un nuancier de couleurs pour découvrir les fractions comme proportions.

Agnès Gateau
(contribution de Richard Cabassut)

Contexte et questions

À l'entrée du cycle 3, la découverte d'un monde autre que celui des entiers naturels est une révolution. En accompagnant cette découverte, j'ai toujours l'impression d'ouvrir la route vers une exploration sidérante et quasi sidérale ; avec les fractions, les élèves accèdent à des signes jusque-là incompréhensibles et ce petit pas, pour une communauté de classe, prend des allures de grand pas dans les mathématiques.

C'est une responsabilité que d'établir un lien de confiance entre les élèves et la fraction. Au cours du cycle 3 et au-delà, les savoirs liés à l'écriture fractionnaire vont se complexifier. Quelques entrées rayonnantes dans l'univers de la fraction virent à l'état de perdition après quelques années, comme l'indiquent les enseignants du second degré. Si le scintillement de la nouvelle étoile s'éteint en raison des significations multiples qu'elle endosse et de la difficulté des élèves à convoquer ces différents aspects, alors l'école a un rôle à jouer pour étayer davantage cet enseignement.

Reconnaître une fraction simple, placer une fraction sur une droite numérique, résoudre un problème relevant de l'aspect quotient d'une écriture fractionnaire, etc. sont des actions que les élèves sont amenés à réussir. Pourtant, ces capacités ne garantissent pas la compréhension d'un aspect spécifique de la fraction, celui d'exprimer une proportion, car elles peuvent relever uniquement d'une technicité. La désignation orale des fractions contient exactement cette proportion exprimée comme une « part proportionnelle » : *un tiers* désigne le résultat d'une opération mentale qui consiste à envisager la partie évoquée en raison de la proportion d'un tout qu'elle exprime. Il me semble que l'association du mot *proportion* à la découverte de l'écriture fractionnaire est primordiale. L'élève doit construire dialectiquement la conceptualisation et la compréhension de l'écriture fractionnaire. Cette dernière dévoile, rend visible, la relation qui existe entre deux éléments signifiés dans une écriture.

L'expérimentation décrite est une situation qui a émergé dans le premier tiers de cette année. Elle s'est déroulée sur toute une matinée ; le premier degré offre cette possibilité de disposer du temps pour mener à bien une activité. Elle a été construite en fonction de la vie de la classe et des sujets qui avaient cours. Elle n'a pas valeur de modèle, mais propose de donner à voir une façon de travailler l'aspect proportion de la fraction dans une classe multi-niveaux.
La dévolution opérée permet d'interroger l'activité mathématique à l'école élémentaire, en particulier dans son appui sur la vie réelle. Résoudre des problèmes c'est potentiellement rencontrer des situations réelles que l'école permet. Faire des mathématiques à l'école, c'est aussi analyser les modèles choisis dans leur pertinence et leur utilité sociale. La pluridisciplinarité est une richesse pour la construction des savoirs. Cette caractéristique spécifique du primaire est une énergie renouvelable et même potentiellement… colorée !

Comment est venue l'activité sur le nuancier de couleurs ?

Pour lancer la progression annuelle des travaux utilisant l'écriture fractionnaire, j'engage la construction de l'aspect « proportion » de la fraction auprès des CM1 et des CM2. La fraction révélera son ubiquité à travers différentes situations issues du monde familier de l'élève. Je souhaite que ces premières rencontres soient à la fois « robustes » et « marquantes ». Il me faut « sauter » sur toutes les occasions rencontrées dans les divers sujets d'études abordés et faire un pas de côté pour faire avancer la classe dans la connaissance des objets mathématiques.

Première interrogation avec la fraction « proportion » dans son usage social

Je vérifie que tous les élèves décryptent les écritures 24/24 et 7/7. C'est sans problème pour eux : elles désignent des ouvertures au public ou des possibilités d'avoir usage de quelque chose « vingt-quatre heures sur vingt-quatre » ou « sept jours sur sept ».

En sciences

Une situation de mélange de liquide aboutit à l'usage des fractions pour décrire des strates de liquides colorés (qu'on imagine de masses volumiques différentes). Après l'invention des « cocktails colorés », les CM1 aidés des CM2 vont décrire avec des fractions le contenu de chaque « éprouvette ».



Coloriage des cocktails qui seront représentés par des écritures fractionnaires.

Ces écritures sont les transcriptions des observations. Un exemple : « Pour obtenir le mélange A, on a versé une dose sur six de liquide violet, puis deux doses sur six de liquide orange puis trois doses sur six d'un autre liquide violet ». On constate que d'autres expressions ont été parallèlement utilisées : « On a versé un centilitre de liquide violet, deux centilitres de liquide orange et trois centilitres d'un autre liquide violet ».

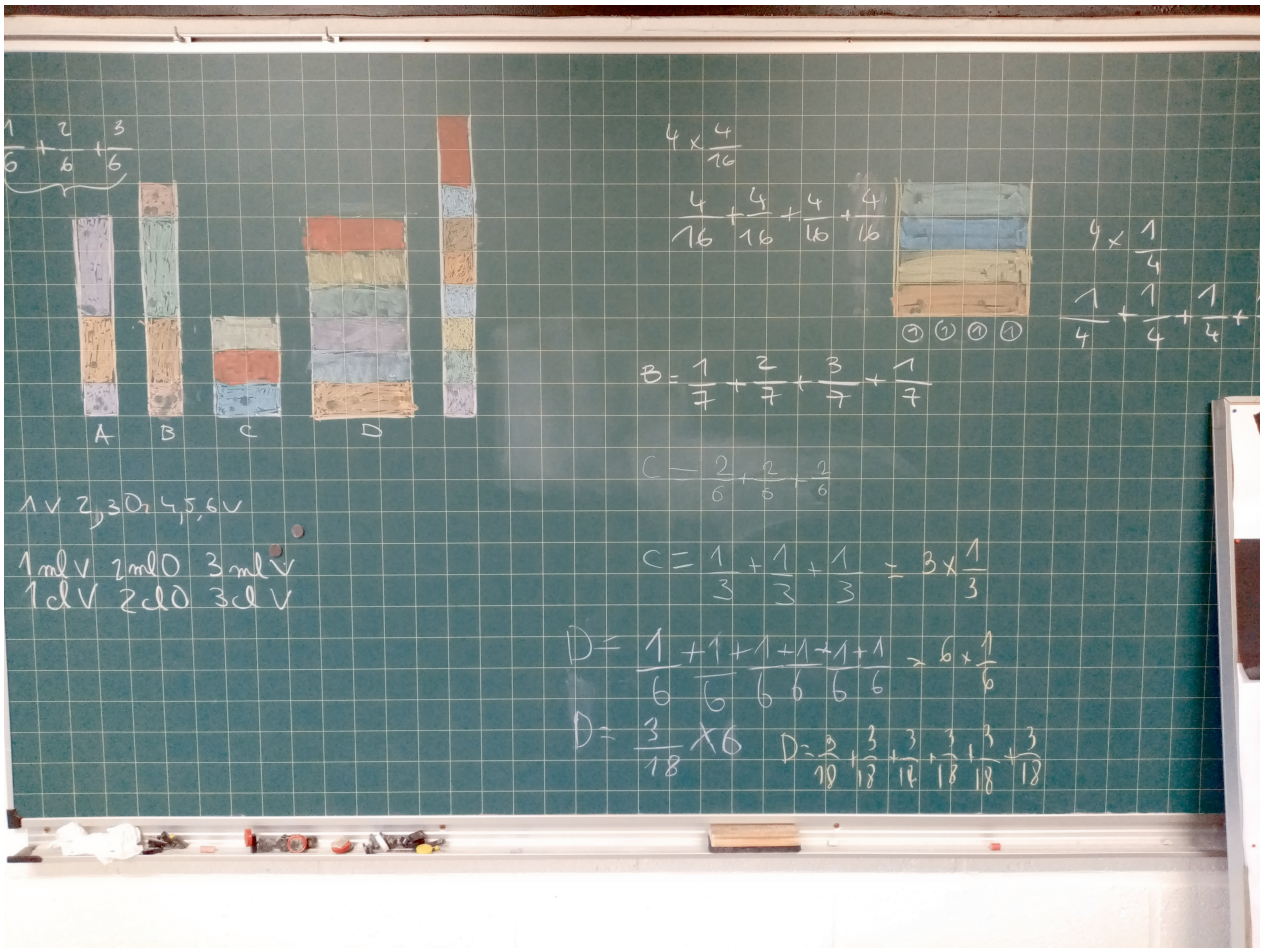


Tableau des écritures proposées par les élèves (phase collective).

Culture générale, jeux

Nous cherchons à exprimer avec une fraction les chances d'obtenir une carte noire lorsqu'on tire au hasard une carte dans un jeu de 52 cartes. C'est aussi une proportion, il y a une chance sur deux d'obtenir une carte noire, ou une carte rouge. D'autres questions sont formulées : quelle est la proportion de figures dans un jeu ? Combien a-t-on de chance de tirer une carte présentant un nombre pair de points ? Cette séance est très riche car elle permet, sous l'impulsion de CM2, d'affirmer qu'on peut écrire ces proportions sous deux formes. Prenons l'exemple des Dames : il y a 1 chance sur 13 ou 4 chances sur 52 d'obtenir une Dame, ces écritures désignent la même proportion.

Arts visuels

Après avoir reproduit en extérieur, avec la classe, les « couleurs de l'automne », une élève rapporte à l'école un nuancier de peintre en bâtiment. Il circule et les élèves cherchent à classer les couleurs qu'ils ont réalisées. Merci Julia, tu as eu une excellente idée !

Le déroulement de la séquence sur les fractions proportions

Dans l'étape suivante, je propose cette situation aux élèves : en peinture, pour produire des couleurs, on peut expérimenter des mélanges sur la palette, ou directement sur un support à peindre. Dans les métiers du bâtiment, les peintres utilisent des couleurs dont les nuances sont codifiées pour être reproduites exactement. Le rôle du nuancier est de permettre de choisir une couleur et de commander sa fabrication.

Comment peut-on fabriquer un nuancier ?

Dans un premier temps, les groupes écrivent leur « protocole » de construction ; plus exactement, ils rendent compte d'une procédure imaginée pour construire un nuancier. Les écrits sont utilisés comme une activité de langue : ce sont les élèves qui se corrigent entre eux. Les propositions d'un groupe sont discutées et permettent l'évolution de la rédaction.

Dans les transcriptions ci-après, on peut voir l'évolution du discours des groupes.

Il faut plusieurs couleurs foncées et claires qu'on mélange pour faire un nuancier.

Le nuancier sert à choisir la nuance exacte et à se repérer pour les couleurs.

1. Mettre les couleurs avec la même couleur du plus foncé au plus clair.
2. Couper les pages de couleur.

1. Prenez du blanc et du noir.
2. Si vous voulez une couleur claire, prenez le blanc. Si vous voulez une couleur foncée, prenez le noir.

1. Il faut des couleurs.
2. On mélange des couleurs dans un pot.
3. On coupe des bandes.
4. On prend un pinceau.
5. On prend les bandes et le pinceau et les couleurs et on [les] met sur les bandes en dégradé.

Les écrits montrent dans un premier temps que les élèves comprennent l'utilisation du nuancier mais ne posent pas la question des proportions « mesurées » comme éléments constitutifs de la fabrication d'une couleur recherchée. À chaque fois, je reformule ma demande. Il s'agit d'écrire un protocole qui permette de construire en groupe un nuancier de couleur.

La question du « dosage » apparaît enfin en milieu d'activité.

Contrairement à ce que j'avais imaginé, ils n'investissent pas la notation fraction pour décrire leur protocole de fabrication.

1. Il faut savoir faire des nuances de couleurs.
2. Il faut aussi effectuer un bon dosage de claires et de foncées.
3. Ensuite, il faut choisir une couleur normale comme le jaune. Après, pour chaque nuance, il faut rajouter petit à petit du noir pour rendre plus foncée la couleur, du blanc pour éclaircir la couleur et ensuite mélanger.

Il faut mélanger le même dosage de chaque couleur.

Selon la couleur, il faut rajouter de la couleur qu'il faut au fur et à mesure et voir si ça fait la couleur que l'on veut.

Pour faire du vert foncé, il faut plus de bleu que de jaune.

C'est à nous de décider le dosage. Exemple, 20 mL pour le bleu et 10 mL pour le jaune pour faire du vert foncé ou l'inverse 20 mL pour le jaune et 10 mL pour le bleu pour faire du vert clair.

Puisqu'il s'agit de mélanger des « doses », j'indique que les groupes travailleront avec des seringues de différentes contenances.

C'est une variable didactique d'importance. On peut obtenir des nuances identiques sans se soucier de la mesure de la contenance. Ce qui compte quand on utilise les fractions, c'est l'expression de la proportion ; travailler avec des seaux de dix litres serait tout aussi envisageable si on était une entreprise de peinture en bâtiment ! De la même façon, on pourrait utiliser des unités de mesures adaptées pour obtenir des couleurs identiques, car chaque unité peut être traduite par une mesure ou une fraction.

On pourrait exprimer la proportion « un sixième de jaune et cinq sixièmes de bleu » par « cinq millilitres de jaune et vingt-cinq millilitres de bleu ». Une expression indique la mesure du liquide obtenu sous forme d'une contenance, l'autre sous forme exclusive d'une proportion. Il est important que les élèves aient discerné ces deux possibilités.

Pour la mise en activité, chaque groupe désigne le producteur de chaque nuance. Les nuances sont codées au préalable sous la forme $\frac{1}{6}$ jaune et $\frac{5}{6}$ bleu, et sont inscrites sur un carton. Le prélèvement de l'encre s'effectue à l'aide de seringues elles-mêmes de contenances variables (il faut savoir lire les graduations et se mettre d'accord sur la valeur arbitraire d'une dose).





Réalisation des nuanciers (chaque élève aura le sien à partir de couleurs fabriquées collectivement en appui sur un codage qui utilise l'écriture fractionnaire pour exprimer la proportion de chacune des deux couleurs mélangées).

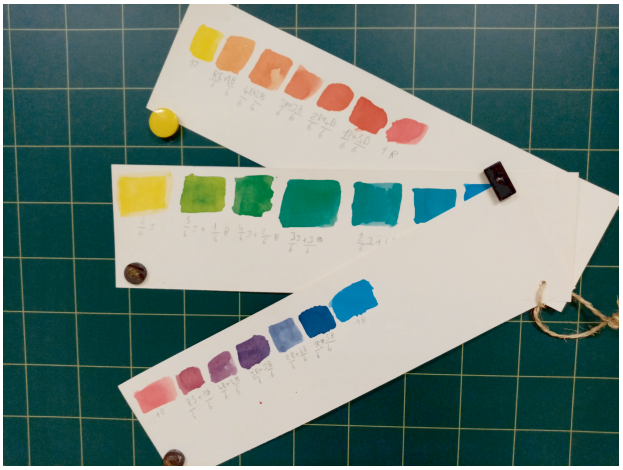
La responsabilité de la réalisation des mélanges est attribuée à chaque élève au sein du groupe. Se charger de la fabrication, c'est :

- prendre un carton sur lequel figure un code ;
- opérer des prélèvements d'encre selon ce que ce code indique ;
- mettre à disposition de tous le mélange réalisé.

Pour réaliser son nuancier, chaque élève recherche le mélange adéquat en lisant le code inscrit sur les cartons. La couleur visible à l'intérieur du gobelet n'est pas assez discriminante pour réaliser le nuancier en ordonnant les couleurs visuellement. Il faut ordonner correctement les écritures selon ce qu'elles impliquent en termes de progression de couleur.

Les nuanciers sont réalisés sur une bande de carton blanc. Dans le même temps, chaque élève a la charge de construire la trace écrite de « ce qu'il a appris ».





Productions des élèves.

Discussion et conclusion

Les fractions comme proportion

Les programmes indiquent que « les fractions puis les nombres décimaux apparaissent comme de nouveaux nombres introduits pour pallier l'insuffisance des nombres entiers, notamment pour mesurer des longueurs, des aires et repérer des points sur une demi-droite graduée » [1, p. 29]. Cette expérimentation rend compte de la possibilité d'introduire les fractions autrement que comme une solution à un problème de mesure. Lorsque mon approche des fractions relevait d'un tremplin à la compréhension de la fraction décimale lui-même tremplin à la découverte des « écritures à virgule », je constatais les difficultés des élèves lors de la rencontre de fractions désignant les pourcentages et les échelles. Cela relevait d'explorations de mondes inconnus qui demandaient chacune une introduction adaptée. Nous avons parcouru cette année beaucoup plus de territoires mathématiques déjà pratiquement « défrichés » car rendus déchiffrables en amont.

Une situation interdisciplinaire arts et mathématiques pour mémoriser les fractions proportions

Dans cette activité à valeur artistique, le recours à la notion de proportion de couleur pour réaliser un mélange est propice à solliciter les « fraîches connaissances » des élèves.

Ce type d'activité montre qu'il faut du temps pour que les nouveaux signes mathématiques et leur signification soient utilisés par les élèves comme modèles disponibles. Du temps, et une variété d'entrées à mettre à disposition des élèves. La question n'est pas uniquement d'utiliser techniquement pour l'instant à ce moment de l'année les écritures fractionnaires (comparaison de fractions, ordre des fractions) mais de disposer de situations de référence qui permettent de situer l'écriture fractionnaire dans des aspects (mathématiques et vie réelle) ouverts.

La modélisation mathématique dans les activités pluridisciplinaires

La possibilité d'imaginer et de faire vivre des situations de modélisation est née de ma rencontre avec les travaux de Richard Cabassut [2] à qui je dois une fière chandelle : l'image décerne à mes yeux sa qualité d'éclaireur de ma pratique, qu'il en soit remercié !

Lorsque ces activités ont eu lieu, en novembre, la classe était déjà entrée dans un travail sur les écritures à virgule et poursuivait sa connaissance du système décimal. La chronologie décrite dans les programmes me semble être de nature à restreindre le temps disponible à la pratique et à la rencontre avec les phénomènes que les mathématiques s'emploient à décrire. La fraction apparaît ici comme un outil utilisé dans une expérience de modélisation d'un nuancier de couleurs, avant d'être un objet d'étude dans la tradition de la dialectique outil-objet de Douady [3]. Leur usage social, avant leur manipulation abstraite, constituent le vivier de modèles vivaces convocables. Il doit se construire dans la classe des éléments de *vocabulaire commun à la classe*, qui jouent un rôle de marqueur mémoriel. Le nuancier pourra être convoqué et servir de déclencheur à la compréhension dans une autre situation. « C'est comme lorsqu'on a fait telle activité ! » est une réflexion qui revient dans le discours des élèves qui explicitent pour des pairs, ou à l'intention de l'adulte, le choix d'un modèle en faisant référence à des acquis précédents.

La classe multi-niveaux riche de ses différences

La constitution des classes à multi-niveaux est propice à engager des activités d'approches disciplinaires très variées, permettant d'insérer les connaissances mathématiques selon le rôle qui leur est assigné dans la société : comment cet objet d'étude peut-il être traité spécifiquement par les mathématiques ? Ou en quoi les mathématiques peuvent-elles être utiles pour m'aider à réussir la tâche qui m'est assignée ? Que savent d'autres enfants sur cette question ? Quelles sont les compréhensions que j'ai de la situation ? Comment puis-je expliquer aux autres ce que je pense devoir faire ?

L'enjeu de la systématisation d'exercices linéaires, de calculs, de comparaison, d'ordre est autre : il permet d'opérer sur des objets puissants qu'il faut pouvoir manipuler au regard de leur signification. Avant d'acquérir un formalisme, il convient de laisser à l'école le temps nécessaire à installer les concepts pour eux-mêmes, avant que leur seule écriture devienne des objets de manipulation. D'autres significations de la fraction seront travaillées en cycle 3 : opérateur de partage, quotient, coefficient de proportionnalité, et fréquentation de la notion de ratio du cycle 4.

Les CM2 sont entrés dans l'activité dans un esprit de découverte, pourtant leur connaissance des fractions était plus importante que celle des CM1. La démarche de résolution produite par la classe avait à mes yeux autant d'importance que le résultat demandé, et elle a occupé tout le temps qu'il était nécessaire pour accéder à une compréhension totale du phénomène concerné. Comprendre le rôle d'un objet mathématique (l'écriture fractionnaire pour définir des proportions) dans la réalisation d'un nuancier de couleurs a demandé du temps, largement occupé à endosser la nécessité de choisir un codage fiable pour exécuter la tâche. Ce temps nécessaire, c'est aussi celui de la mise à distance de l'enseignant : il faut accepter de construire les conditions nécessaires à ce que les élèves remettent

l'ouvrage (sa réflexion) sur le métier (sa recherche) aussi longtemps qu'il le faudra. Les évolutions de l'ouvrage dans ses nombreuses étapes sont à exposer. Chaque réflexion peut nourrir la compréhension collective du chemin qu'il faut encore parcourir pour répondre vraiment à la question posée. La seule question utile aura finalement été « À cette étape, que vous manque-t-il encore pour pouvoir réaliser le nuancier ? ».

Les mathématiques mises en valeur par le contraste avec l'extra-mathématique

Les situations dites de modélisation, c'est-à-dire qui caractérisent une situation de la vie réelle non directement assujettie à la discipline Mathématiques, sont importantes pour permettre à l'élève de réaliser l'assimilation du rôle des objets mathématiques, par le langage naturel, dans la résolution de problèmes. Dans un manuel scolaire, la rencontre avec la fraction proportion peut se résumer au coloriage de parts d'une représentation prédécoupée. Dans ce cadre, on peut imaginer que l'aspect proportion de la fraction soit associé à une activité rituelle comme on en rencontre au dos de paquets de céréales, dans laquelle il convient d'avoir compris une technique de coloriage pour réussir l'activité. Pour donner à réaliser cette symbiose vitale à l'installation des concepts qu'est la mise en adéquation d'un problème et d'une solution opérante, l'école élémentaire dispose d'une multitude de plages horaires et d'accès disciplinaires pour développer des activités de ce type. C'est une richesse rare, qu'il faut saisir chaque fois qu'elle est possible : c'est un socle essentiel du bien-être et du partage de la vie d'une classe.

Références

[1] Ministère de l'Éducation nationale. *Bulletin officiel. Cycle 3.* n° 25. 21 juin 2018.

[2] Richard Cabassut. « Des ressources pour enseigner la modélisation. Projet européen LEMA ». In : *Bulletin vert* N° 491 (2010).

[3] Régine Douady. *Enseignement de la dialectique OUTIL-OBJET et des JEUX de CADRES en formation mathématique des professeurs d'école. Documents pour la formation des professeurs d'école en didactique des mathématiques.* . Colmar : Éditions IREM Paris 7, 1993.

Agnès Gateau est enseignante à l'école élémentaire d'Étigny (89). Elle est aussi membre de la commission *Premier degré* de l'APMEP.

agnesgateau@gmail.com

© APMEP *Octobre 2021*

Richard Cabassut, maître de conférences en didactique des mathématiques à l'université de Strasbourg, réagit en mettant en évidence plusieurs points forts du travail mené à travers la création des nuanciers de couleurs.

Témoignage

L'activité proposée par Agnès Gateau pour introduire les fractions comme proportions est intéressante à plusieurs niveaux.

Au niveau mathématique

Observons ce que précisent les programmes de 2018. Il n'y a aucune mention de proportion en cycle 2. Pour le cycle 3, seul le terme « coefficient de proportionnalité » apparaît dans le paragraphe « résoudre des problèmes en utilisant des fractions, des nombres décimaux et le calcul » de la partie « nombres

et calculs ». En cycle 4, le terme « coefficient de proportionnalité » (suivi par le terme « coefficient multiplicateur ») apparaît dans le paragraphe « résoudre des problèmes de proportionnalité » du thème « Organisation et gestion de données, fonctions », au côté du terme « ratio ». « La notion de ratio vient enrichir le lexique de la proportionnalité pour traduire la proportionnalité de deux suites de nombres » (Bulletin officiel n° 30 du 26-7-2018). Un exemple illustre la notion de ratio : « trois nombres a, b, c sont dans le ratio 2 : 3 : 7 (notation standardisée) si $\frac{a}{2} = \frac{b}{3} = \frac{c}{7}$ », cette valeur commune désignant le coefficient de proportionnalité avec lequel on multiplie chaque terme de la suite $(2\,;\,3\,;\,7)$ pour obtenir les termes respectifs de la suite $(a\,;\,b\,;\,c)$. Dans le passé, en remontant jusqu'aux programmes de 2002, on ne trouve aucune citation du terme « proportion ». Seul dans le document d'accompagnement « Le nombre au cycle 3 » de 2012 [a], Simard évoque explicitement le terme « proportion », en évoquant notamment « la théorie des proportions ». Sur le plan mathématique, l'activité du nuancier est intéressante car la fraction proportion est à relier à la notion de coefficient de proportionnalité du cycle 3 dans la perspective du ratio ou du coefficient multiplicateur du cycle 4. En introduction à cette activité, le professeur évoque les jeux de hasard où une fraction mesure la chance d'avoir un certain tirage. Même si le hasard n'est pas encore présent dans les programmes de l'école primaire (contrairement à la pratique d'autres pays européens), il est intéressant de le fréquenter en situation à l'école primaire dans la perspective du collège.

Au niveau didactique

L'approche classique consiste à introduire les fractions à partir de la résolution d'un problème dans des situations multiplicatives (avec un coefficient multiplicateur ou un coefficient de proportionnalité), de partage ou de mesure. Les programmes de cycle 3 précisent : « utiliser des fractions pour rendre compte de partages de grandeurs ou de mesures de grandeurs », « utiliser des fractions pour exprimer un quotient ». Le récent guide du CP [b] de 2020 propose des représentations en barres pour illustrer les problèmes de partages équitables où interviennent les fractionnements du tout et évoque le lien avec les proportions. Le guide du CM (à paraître) devrait développer le rôle des fractions dans la résolution de problèmes, notamment dans les cas de fraction coefficient de proportionnalité. Une approche par le fractionnement de l'unité avec des bandes s'inscrit dans la tradition d'un problème de partage, souvent représenté par un partage équitable d'une pizza [c]. L'activité de Brousseau consistant à agrandir un puzzle (avec par exemple une fraction comme coefficient d'agrandissement) rejoint l'activité du nuancier d'Agnès Gateau où la fraction peut être interprétée comme proportion, coefficient de proportionnalité ou coefficient multiplicateur. Il est intéressant que l'élève fréquente différentes situations renvoyant à différentes conceptions de la fraction. Il est également intéressant de distinguer le concept de fraction comme nombre et la représentation d'une fraction par une écriture qui permet de coder l'information à communiquer pour constituer un nuancier. Trop d'élèves (et parfois de professeurs) ne conçoivent pas le concept de nombre fraction ou de nombre décimal et se limitent aux écritures fractionnaire ou décimale.

Au niveau pédagogique

L'activité des nuanciers permet de travailler la compétence de modélisation pour relier le monde mathématique au monde d'une autre discipline et plus généralement au monde réel et d'intégrer les différents niveaux éventuels d'une classe tout en permettant des moments de différenciation.

richard.cabassut@gmail.com

a. Durpaire Jean-Louis, Mégard Marie (2012) *Le nombre au cycle 3*. CANOPE-CNDP.

b. Ministère de l'Éducation nationale. *Pour enseigner les nombres, le calcul et la résolution de problèmes au CP.*

c. Le problème de partage équitable d'une pizza peut cependant relever de mathématiques très savantes dans l'article de Jean-Pierre Friedelmeyer (2021) *Géométrie des pizzas.* In *Au fil des maths* n° 539.

Le « coin marchande »

Suite à un travail mené par une équipe pluri-catégorielle (professeurs des écoles, conseillers pédagogiques de circonscription, maîtres-formateurs, formateurs d'INSPÉ), les auteures partagent « le coin marchande », une situation construite, favorable à l'apprentissage du nombre et de l'anglais en cycle 1… et mutualisent différentes ressources.

Élisabeth Boisson et Catherine Würtz

Le « coin marchande » vise à mettre en œuvre des tâches structurantes. Elles s'appuient sur un matériel et un usage de la langue qui favorise les groupements, les décompositions et le calcul mental. Ce travail figure dans les ateliers de l'IREM de Paris où l'on trouve des outils de mise en œuvre et des vidéos des situations de classe.

Le coin marchande, des enjeux

Voici les caractéristiques du « coin marchande » qui en font à nos yeux un réel support d'apprentissages.

Un contexte pluridisciplinaire

- familier ou à rendre familier, qui donne du sens aux apprentissages et favorise les interactions entre les élèves ;
- propice à la pratique des langues (français, anglais ; échanges sociaux et pratiques sur les actions d'achat et de vente, entre marchand et client) et à la découverte du monde (social ; sciences : les aliments ; maths : les quantités, la valeur d'un produit, la mesure) ;
- se prêtant à la manipulation : matériel fictif (objets, monnaie) et matériel mathématique (par exemple : mains, boulier, matériel de numération… en tant qu'instruments de calcul « manuel »).

Une situation répétitive et évolutive

- assurant une permanence de l'objectif général, une pratique répétée de chaque tâche numérique avec évolution des procédures à travers le jeu de variables (domaine numérique, type de représentation des quantités, outils de calcul « manuels » ou non, etc.) ;
- rassurante pour les élèves (comme pour les rituels) ;
- facilitant l'« enrôlement » des élèves et leur entrée dans la tâche ;
- s'articulant avec des temps d'apprentissage « décrochés » (collectif, accueil) sur l'appropriation d'outils spécifiques (en mathématique : doigts, constellations, alignement, boulier… et en anglais : formules de salutations et de politesse, nombres et mesures, monnaie, noms d'aliments) ;
- favorisant la mémorisation de connaissances (comptines numériques : de un en un, deux en deux, décompositions ; mots et expressions en anglais) et l'appropriation de procédures en mathématique (usage de collections témoins, énumération, correspondance terme à terme ou groupes à groupes[1]).

1. Par exemple, pour comparer deux collections, on peut grouper les éléments de chaque collection et mettre en correspondance les groupes ainsi constitués.

Une diversité possible de modalités

- un espace défini et permanent dans la classe permettant une fréquentation régulière sur des temps formels conduits par l'enseignant ou en autonomie, mais aussi sur des temps libres, comme les coins « jeu » ;
- une pratique des élèves par petits groupes, homogènes ou hétérogènes, selon l'objectif visé, favorisant un travail différencié (en particulier dans le domaine numérique mais aussi dans le domaine des langues français/anglais) et un étayage adapté (de l'enseignant et/ou par le recours de matériel), ainsi que des échanges, interactions entre les élèves et l'explicitation et argumentation des procédures utilisées ;
- une pratique de tâches auto-évaluatives. Le poids de la validation immédiate est atténué du fait que le travail se fait en petit groupe, et que dans un premier temps ce sont les enfants dans leur rôle de marchand ou client, qui valident et non le maître : autorisation de procéder à des essais plus ou moins fructueux. Mais la validation reste incontournable, en situation ou après coup, si le dispositif a été conçu pour que restent des traces de l'activité entre élèves, qui peuvent être l'objet d'un « retour sur l'activité » lors d'un temps ultérieur.

Une posture de l'enseignant : observateur-participant

L'enseignant observe en essayant de comprendre et analyser l'activité intellectuelle des enfants. Il doit être capable de la traduire au travers d'un filtre didactique et la situer dans une construction de connaissances.

Il participe en utilisant des gestes professionnels :

- reformuler, ouvrir au questionnement ;
- soutenir l'activité intellectuelle de l'enfant, c'est-à-dire son activité mentale (compréhension de la situation, doutes et questionnements, recours à des connaissances disponibles, choix stratégiques, etc.) au long de son action effective de participation au jeu (geste, paroles, etc.) ;
- rééquilibrer (régulation) les interventions/discours dans le groupe de manière à permettre à toutes les pensées, points de vue, démarches d'exister, et de se confronter (mise à l'épreuve).

Le coin marchande dans la classe de Danièle

Le dispositif

L'expérimentation dans la classe de cette enseignante concerne des élèves de Moyenne et Grande Sections. L'installation matérielle a été prévue par l'enseignante : un espace dédié avec des rayons adaptés et des quantités d'aliments en plastique suffisantes pour permettre le jeu en tenant compte de la possibilité d'une progressivité.



Figure 1. *L'espace dédié au coin marchande.*

Voici le scénario imaginé : les élèves travaillent par groupes de trois. Chaque élève possède un rôle défini : le caissier, le vendeur, l'acheteur.

- L'acheteur commande au vendeur à partir de sa liste de courses.
- Le vendeur identifie et donne le (ou les) aliment(s) demandé(s).
- Le caissier identifie le prix de l'aliment sur l'affiche prix, coche sur le ticket de caisse le nombre de ronds correspondant au prix de cet aliment. Il annonce la somme totale après avoir vérifié les calculs avec le boulier. Puis il remet le ticket de caisse à l'acheteur.
- L'acheteur paie en choisissant ses pièces et billets pour constituer la somme due.
- Le caissier vérifie la somme que lui donne l'acheteur.

Ils ont des outils à leur disposition pour réaliser les tâches : des étiquettes d'identification des aliments, des affiches indiquant les prix des différents articles (le prix est de 1, 2 ou 3 € selon les articles), une liste des courses de trois articles de prix différents, un porte-monnaie de 30 € en pièces et billets de 1, 2 et 5 €, une bande numérique de 0 à 30, un ticket de caisse (trois lignes de dix ronds à cocher) et un boulier.



Figure 2. *Des listes de courses.*

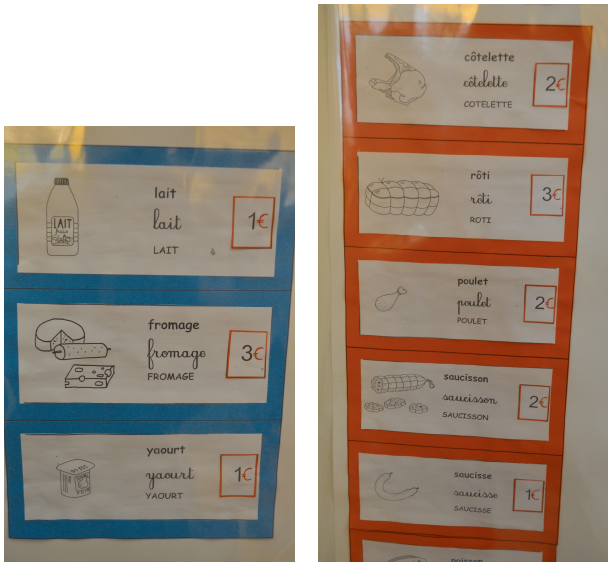


Figure 3. *Les affiches de prix, écriture chiffrée.*



Figure 4. *Un porte–monnaie contenant 30 € en pièces de 1 €, 2 € et billets de 5 €.*

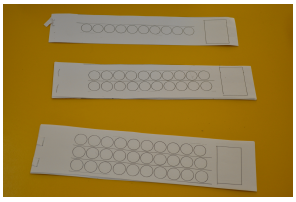


Figure 5. *Les tickets de caisse, collection de ronds à cocher pour le prix (représentation analogique un pour un).*

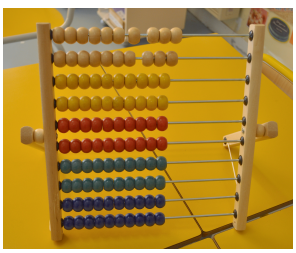


Figure 6. *Le boulier pour ajouter ou retrancher des groupements d'unités, pour totaliser.*

L'exemple de trois élèves de Grande Section

La commande est la suivante : 1 côtelette à 2 €, 5 gâteaux à 3 €, 6 bouteilles à 1 €. Le caissier, à mesure que le vendeur donne les aliments demandés à l'acheteur, coche sur le ticket de caisse le nombre de ronds correspondant au prix : 2 ronds pour les 2 € de la côtelette, 3 ronds pour chaque gâteau puis 1 rond par bouteille. Il écrit 25 sur le ticket et annonce le prix de 25 €. L'enseignante lui demande de vérifier son total sur le boulier.

Le caissier déplace alors 2 boules sur la première rangée pour indiquer les 2 € de la côtelette. Puis il continue sur la même rangée en déplaçant des groupes de 3 boules pour chaque gâteau. Quand il arrive au passage de la seconde rangée, pour compter le troisième gâteau, il pousse les 2 boules qui restent sur la rangée et est embarrassé ; l'enseignante, pour l'aider, pousse la troisième boule dans la seconde rangée. Il continue en poussant deux fois 3 boules. Puis il passe sur la troisième rangée pour compter les six bouteilles à 1 €, ce qui peut rendre difficile la totalisation.

L'enseignante lui propose alors de recommencer la vérification depuis le début. Il replace toutes les boules à gauche du boulier. L'enseignante va étayer verbalement la commande pendant que le caissier déplace les boules. Elle dit : « on a dit une côtelette ». Il déplace 2 boules du boulier. « Cinq gâteaux ». Il déplace ensemble deux fois 3 boules sur le boulier puis 2 pour terminer sa rangée et prend la troisième boule sur la seconde rangée, cette fois sans l'aide de l'enseignante. Ensuite il pousse 2 fois 3 boules. Puis elle lui demande « combien de bouteilles ? » et l'élève déplace d'abord 3 boules, une à une, pour terminer sa ligne et 3 autres boules sur la troisième rangée.

L'enseignante demande : « ça fait combien ? ». L'élève regarde l'enseignante. En montrant la première ligne, elle dit : « combien on a là ? » ; l'élève répond : « dix ». Elle montre la seconde ligne, il dit « vingt ». Elle montre les trois dernières boules. Il énonce : « vingt-trois » puis écrit le nombre 23 sur son ticket de caisse. L'enseignante lui demande s'il a bien fait vingt-trois croix sur son ticket. Il vérifie son ticket et ajoute une croix. Ensuite, l'enseignante demande à l'acheteur s'il sait combien il doit payer. Il dit : « vingt-trois » et cherche dans son porte-monnaie. Il pose trois billets de 5 € puis quatre pièces de 2 €. En même temps qu'il pose ses billets et ses pièces, le caissier déplace sur le boulier le nombre de boules qui correspond.

Les connaissances mathématiques nécessaires dans ce contexte sont les nombres jusqu'à 10 en termes de désignation, compréhension et décomposition des nombres, et jusqu'à 23, en termes de comptine numérique. La situation met aussi en jeu les décompositions des nombres au-delà de 10 avec le support de la monnaie (réaliser la somme de 23 € avec pièces et billets).

L'étayage verbal de l'enseignante associé à l'action sur le boulier a permis au caissier, au moment de vérifier le paiement sur le boulier (23 €), de mettre en œuvre le groupement par dix pour dénombrer une collection de 23 objets. Cette compétence dépasse les attendus de Grande Section mais était vraisemblablement dans la « zone proximale de développement » de l'élève. En effet, lorsque l'enseignante lui montre les rangées successives sur le boulier, l'élève interrompt le comptage un à un pour mobiliser sa connaissance de la suite des dizaines : il énonce « 10, 20 », puis « 23 » en suivant le geste de l'enseignante qui pointe les trois dernières boules.

Quels apprentissages mathématiques et comment ?

Quatre principes

À partir de la lecture de *Premiers pas vers les maths* de Rémi Brissiaud [2], nous avons posé quatre principes pour guider la conception d'une séquence d'apprentissage des premiers nombres au cycle 1 :

1. s'approprier en priorité l'aspect « cardinal » du nombre (le nombre « quantité »), et pour cela, « parler le nombre » par ses décompositions (trois, c'est « un et un et un », c'est « deux et un » et « un et deux ») ; et aussi en composant les unités et groupements d'unités (« un et un, deux ; et un, trois ») ;
2. se construire des représentations mentales (verbales, spatiales « mobiles ») associées à des actions effectives ou mentales sur un matériel que l'on organise par groupements d'objets, avec repère du 5 puis du 10 ;
3. pratiquer des tâches-clés (comparer deux collections, constituer une collection, composer/décomposer/compléter) permet l'appropriation de procédures de référence et de compétences stratégiques (estimation pour comparer, reconnaissance immédiate (*subitizing*) pour les quantités jusqu'à trois, recours à une collection-témoin organisée, correspondance terme à terme ou « groupe à groupe », usage des longueurs pour des collections homogènes, groupement des objets et usage des premiers nombres) ;
4. mettre en relation différents contextes d'activités numériques (activités ritualisées, activités fonctionnelles, activités construites comme des jeux, et à différents moments de la journée).

Ci-dessous, l'analyse de la situation présentée précédemment au regard de ces quatre principes :

1er principe : Quantités et langage en jeu	• Quantités en jeu : ∗ nombre de chaque aliment ∗ prix des aliments • Parler le nombre en utilisant les groupements et décompositions ∗ affichage du prix d'un aliment lorsqu'il faut changer de rangée sur le boulier ∗ totalisation du prix par rangées de dix, sur le ticket ou le boulier
2e principe : Type de représentation du nombre	Représentation des quantités : • sur les listes de courses et les affiches-magasin, écriture chiffrée (représentation conventionnelle) • sur les tickets de caisse, collection de ronds groupés par rangée de dix, à cocher pour le prix (représentation analogique organisée) • sur le boulier structuré à dix (possiblement bicolore pour construire le repère du cinq)
3e principe : Tâches procédures	• Nommer une quantité donnée par une écriture chiffrée : *connaissance mémorisée* (acheteur : commande et vendeur : prix) • Constituer une collection correspondant à un nombre énoncé oralement *en utilisant des groupements ou un à un* (le vendeur donne le produit ; le caissier coche les cases du ticket de caisse et déplace les boules du boulier ; l'acheteur constitue la somme due avec la monnaie) • Totaliser la somme due *en utilisant des groupements : 2, 3, . . ., 10 (rangées de dix) ou par comptage un à un* (caissier à partir du ticket de caisse) et annoncer le prix total (caissier) • Dénombrer la monnaie reçue, directement ou à l'aide du boulier : *recours à une collection témoin, correspondance terme à terme ou par groupes (à partir des pièces de 2, 5, 10), compter de dix en dix (rangées du boulier) et ajouter les unités simples* • Comparer avec la somme due pour vérifier *directement sur les nombres ou sur les représentations (boulier et ticket de caisse)* (caissier)
4e principe : Variation des contextes	Voir dans la suite de l'article les situations décrochées dans la classe de Séverine

Des variables pour des dispositifs de mise en œuvre

À partir de la situation mise en place dans la classe de Danièle, nous avons défini des variables pour envisager et prendre en compte des évolutions et progressivités possibles :

- complexité de la tâche de départ : type et nombre de produits disponibles dans le magasin, choix spontané ou liste de courses préétablie, somme maximum à dépenser ou pas ;
- domaine numérique : quantité d'objets achetés, prix des objets (un seul ou des prix variés), somme dans le porte-monnaie, nature des pièces et billets ;
- type de représentation des quantités : jetons simples ou complexes (type Nain jaune), pièces de monnaie, marquage des prix des objets sur les affichages et les listes de course (écriture chiffrée), les outils de calcul (bouliers, matériel de numération, etc.) ;
- tâches mathématiques : constituer, comparer, compléter, ajouter/totaliser, . . ., des collections d'objets/des nombres, reconnaître et associer différentes représentations des quantités ;
- l'usage de la langue (l'étendue du lexique des aliments et des nombres), le niveau de complexité des structures langagières (de salutations, de politesse, de commandes et de paiement) ;
- rôle de chacun : le caissier, l'acheteur, le vendeur, l'observateur ;
- outils à disposition des élèves : boulier, ticket, liste de produits, liste de course ;
- interventions de l'enseignant : observation, régulation de l'activité et du groupe d'élèves dans le jeu (rôle, tour de chacun), questionnement, reformulation, explicitation, validation, etc. ;
- cadre de l'activité : coin matérialisé.

La seule pratique du « coin marchande » ne suffit pas à construire chez les élèves l'ensemble des compétences numériques visées à l'école maternelle et élémentaire, ni à prendre en compte le rythme de chacun et les différents obstacles rencontrés par les élèves. Dans la situation présentée, les élèves ont pu réaliser la tâche avec l'étayage de l'enseignante, mais nous avons par exemple constaté que lors de la constitution de la somme due avec la monnaie, la plupart des élèves ne disposaient pas des décompositions nécessaires pour utiliser les billets de 5 € plutôt que les pièces de 1 € et 2 €. C'est pourquoi la mise en place de situations décrochées nous paraît indispensable.

Des situations décrochées en Grande Section dans la classe de Séverine

L'enseignante propose à ses élèves des situations qui ont posé problème lors du jeu de marchande (surcomptage, totalisation, décompositions, etc.). Les ateliers sont organisés en petits groupes d'élèves avec des situations problèmes complexes.

Situation 1

L'enseignante anime un groupe d'élèves de Grande Section. L'objectif est de composer et décomposer les nombres, la tâche est : « Faire la somme indiquée sur le dé ».

Chaque élève possède un plateau contenant un dé posé devant lui. Au centre de la table sont posés trois plateaux contenant de la monnaie fictive : le premier contient des pièces de 1 €, le second des pièces de 2 € et le troisième des billets de 5 €.

Les élèves jouent à tour de rôle.

Constituer une somme en Grande Section

La première lance le dé qui « affiche » quatre. L'enseignante lui demande : « *Combien tu as fait ?* » L'élève répond « *Quatre* ». L'enseignante relance : « *Comment tu fais quatre ?* » L'élève prend deux pièces de 2 € qu'elle pose dans son plateau. L'enseignante demande : « *Ça fait combien là ?* » L'élève répond « *Quatre* ». Séverine dit en montrant les pièces une à une : « *Deux et deux ça fait quatre* ».
Le second élève lance le dé. L'enseignante demande : « *C'est combien là ?* ». « *Six* » répond l'élève. « *Comment on fait pour faire six ?* » demande l'enseignante. L'élève prend un billet de 5 € et une pièce de 1 €. L'enseignante lui demande de représenter six avec ses mains. Il montre son billet de 5 € et sa pièce de 1 €. L'enseignante dit « *Donc, cinq et un ça fait six, c'est ça* ». Simultanément, une élève montre cinq et un avec sa main et son pouce. « *C'est ça* » redit l'enseignante. Un élève intervient pour dire qu'il aurait fait six autrement. L'enseignante l'invite à montrer comment. L'élève prend trois pièces de 2 € dans le plateau et dit « *deux, quatre et six* ». L'enseignante valide en lui disant : « *Oui, t'as raison c'était bon aussi* ».

Cette situation permet de parler le nombre dans l'action en associant le faire et le dire, action essentielle. Quand je suis élève et que je dis deux en montrant simultanément deux objets, c'est explicite pour moi et pour l'autre.

Situation 2

L'objectif est de décomposer le 5, et composer un nombre avec des 5, la tâche est : « Faire des sommes de 5, échanger et totaliser ».

Chaque élève possède, devant lui, un plateau-tirelire qui contient des pièces. L'enseignante annonce qu'ils vont faire des échanges, qu'elle va leur donner des billets de 5 € en échange de leurs pièces. Ils doivent constituer des sommes de 5 €.

Ils pratiquent ces échanges à tour de rôle.

Faire des sommes, échanger et totaliser en Grande Section

Le premier élève donne deux pièces de 2 € et une pièce de 1 €. L'enseignante les pose sur la table et les montre une à une, puis l'ensemble, en nommant « *Deux et deux, quatre et un. Cinq euros. Bravo. Tenez monsieur !* » Elle joint le geste à la parole en donnant le billet de 5 € à l'élève.
La seconde élève a préparé sur son plateau-tirelire deux rangées de deux pièces de 2 € et une pièce de 1 €, puis une troisième de seulement trois pièces de 1 €. L'enseignante, comme dans la précédente situation, nomme chaque pièce en les montrant : « *Deux et deux, quatre et un cinq. Bravo.* » Elle fait de même pour la seconde rangée et demande à l'élève si c'est possible pour la troisième. L'élève précise que non, qu'il y a seulement trois.
À la suite de cette activité, l'enseignante annonce qu'ils vont totaliser ce qu'ils ont dans leur boîte. Un des élèves possède trois billets de 5 €. L'enseignante commence par montrer un billet en disant cinq, puis montre le second billet. Elle demande : « *Ça fait combien cinq et cinq ?* » L'élève répond : « *Dix* ». Puis l'enseignante demande : « *Et encore cinq ?* » L'élève répond : « *Quinze* ». L'enseignante le questionne : « *Donc toi tu as combien dans ta boite ?* » L'élève dit : « *Quinze* ». « *Bravo, quinze euros* » précise l'enseignante.
Arrive le tour du troisième élève. L'enseignante lui demande : « *Et toi, tu as combien dans ta boîte ?* » Il possède un billet de 5 €, une pièce de 2 € et une pièce de 1 €. Il montre son billet de cinq, en disant : « *Cinq et deux sept et un, huit* ». En même temps qu'il énonce, il utilise ses doigts pour totaliser.

Il montre d'abord sa main de cinq doigts puis utilise son autre main en ajoutant directement deux doigts en disant sept, puis un doigt en disant huit. L'enseignante valide.
Un autre élève a 8 € dans sa boîte. Il recompte un à un avec ses doigts pour atteindre le nombre huit qu'il nomme. L'enseignante reprend en montrant en même temps les billets ou pièces correspondants : « *Cinq, et un, six, et un, sept, et un, huit* ». Elle fait remarquer aux deux élèves qu'ils ont la même somme d'argent mais qu'ils n'ont pas la même chose dans leur boîte. L'un deux possède un billet de 5 € et trois pièces de 1 € et l'autre élève, un billet de 5 €, une pièce de 2 € et une pièce de 1 €. Elle leur dit en joignant le geste à la parole que s'ils échangent la pièce de 2 € contre deux pièces de 1 €, cela donne la même somme.

La posture de l'enseignante qui attire l'attention des élèves sur les valeurs égales obtenues avec des décompositions différentes est essentielle car elle va ainsi les amener à y être eux-mêmes attentifs et à faire des choix avec davantage de connaissances.

De plus, la pratique de l'enseignante qui, de façon systématique et bienveillante, va « parler le nombre » en associant les gestes, va contribuer à une meilleure compréhension du nombre-quantité pour les élèves.

Dans ces deux situations sont ainsi mis en jeu, dans le contexte du « coin marchande », mais dans une modalité décrochée, les trois premiers principes énoncés pour la construction du nombre :

- le premier, car les nombres concernés désignent des quantités (nombre de pièces, valeur des pièces), et sont de plus « parlés » à l'aide des décompositions (voir ci-dessus les interventions de l'enseignante) ;
- le deuxième, car les nombres sont figurés par un matériel : la monnaie, qui permet de visualiser et agir sur les quantités en jeu, et de mettre en œuvre des groupements (pièces de 2 et billet de 5) avec l'usage du cinq comme nombre repère ;
- le troisième, car les tâches proposées correspondent à nos « tâches-clés » (constituer une collection ; composer/décomposer), et la mise en œuvre de la situation amène diversité, explicitation et appropriation des procédures.

L'enseignant peut proposer une pratique régulière et différenciée de ces situations, selon les compétences des élèves, en jouant sur les variables comme les quantités en jeu : sommes à atteindre et pièces/billets utilisés (on pourra passer à deux dés ou donner ces sommes sous une autre forme, par exemple des cartons-nombres ou des étiquettes prix).

Une expérimentation en classe avec la pratique de l'anglais

L'apprentissage de structures syntaxiques et d'un lexique en anglais, en lien avec des connaissances mathématiques (les nombres), va passer par la pratique de situations décrochées qui favoriseront la mémorisation et prépareront l'utilisation de ces connaissances en anglais dans le coin marchande.

Grâce à la visualisation et la théâtralisation, l'élève va prendre confiance dans sa capacité à comprendre et agir dans une situation complexe sans qu'il lui soit nécessaire d'utiliser le français. À l'issue de l'activité, un bilan en français est effectué avec les élèves sur ce qu'ils ont appris en mathématiques et en anglais : contenus, procédures…

Dans la classe de Grande Section de Séverine

Tous les élèves sont placés en cercle, assis sur une chaise. Des activités différentes vont être proposées pour atteindre l'objectif d'apprentissage « comprendre, nommer, utiliser et mémoriser » :

- le lexique suivant avec sa marque du pluriel : les noms des nombres jusqu'à dix (*one*, *two*, …) *lemon/lemons*, *apple/apples*, *banana/bananas*, *tomato/tomatoes* ;

- les structures syntaxiques suivantes : *what's missing ?* nombre + nom de l'aliment *is missing*. (exemple : *one tomatoe is missing*), *can I have* + nombre et nom de l'aliment ? (exemple : *can I have one apple ?*)

Dans chacune de ces activités, l'enseignante verbalise uniquement en anglais, à aucun moment elle ne passera par le français.

La séance démarre par une comptine pour mémoriser le nom des nombres « *One potatoe, two potatoes, three potatoes, four potatoes, five* ».

Ensuite, l'ensemble de la classe s'entraîne à répéter le nom de chaque nombre de un à cinq : *one, one, two, two,* etc.

La troisième activité proposée est « *point to* ». L'enseignante donne un aliment différent à quatre enfants puis dit à l'ensemble des enfants : « *point to the. . .* » en nommant l'aliment, et les enfants doivent montrer l'aliment qui correspond. Exemple : elle va dire « *point to the banana* » et chaque enfant doit montrer la banane dans la main de l'élève qui la possède.

Dans la quatrième activité, quatre aliments sont posés sur la table. L'enseignante va cacher un des aliments. Les élèves vont devoir trouver lequel. Elle leur demande donc en anglais de cacher leurs yeux. Pendant ce temps elle retire un des aliments. Puis chacun ouvre ses yeux. L'enseignante demande quel aliment manque « *What's missing ?* » et choisit un élève pour donner sa réponse. L'élève indique ce qui manque en formulant la phrase en anglais. Exemple : « *One banana is missing* » puis tous les élèves doivent répéter l'ensemble de la phrase.

Le second temps de cette même activité est complexifié par l'utilisation du pluriel. Elle va ajouter un aliment de chaque de façon à ce qu'il y ait sur la table, deux bananes, deux citrons, deux tomates, . . .

Elle va nommer les aliments associés à leur nombre en les montrant et en accentuant la marque du pluriel : « *One banana, two bananas* ». Elle leur fait redire collectivement.

Puis le jeu reprend, les enfants cachent leurs yeux, l'enseignante cache deux aliments identiques et demande aux enfants « *What's missing ?* » L'élève interrogé dit : « *Two lemons are missing* » et les autres répètent la phrase, accompagnés par l'enseignante.

La dernière activité collective se rapproche de la situation du coin marchande : il s'agit de faire sa commande à partir d'une liste de courses. Deux élèves sont au centre du groupe, toujours assis en cercle sur leur chaise. Un élève joue le rôle de l'acheteur et l'autre celui du vendeur. Quatre boîtes sont posées entre les deux élèves : une première contient des pommes, une autre des citrons, une troisième des tomates et la quatrième des bananes. L'élève qui joue le rôle d'acheteur demande le nombre d'aliments indiqué sur sa liste, en utilisant une phrase complète à chaque fois. Exemple : « *Can I have one apple please ?* » Le vendeur lui donne le nombre d'aliments demandé en disant uniquement le nom avec le nombre (exemple : « *one apple* »). À chaque fois, l'ensemble des élèves répète le nombre suivi du mot désignant l'aliment.

L'exigence de l'enseignante sur la reprise systématique de la phrase entièrement construite permet vraiment aux élèves de s'approprier et mémoriser les structures et le lexique. Sa posture aussi, très encourageante, valorise chaque réussite. Elle aide véritablement les élèves à prendre confiance.

Quels apprentissages en anglais et comment ?

Fanny Marchiano, professeure d'anglais à l'INSPÉ (site de Cergy) nous précise les contenus d'apprentissage en anglais, et l'intérêt, comme en mathématiques, de l'aspect répétitif et évolutif du coin marchande,

dans la pratique et l'acquisition de connaissances langagières en particulier pour mettre les élèves en confiance. Elle indique :

« *. . . c'est une situation proche de l'authentique même si c'est à travers une situation fictive et ludique. . . d'avoir, à la fois, une routine et des situations langagières qui vont être répétitives. . . le format de l'échange sera identique mais le contenu sera toujours différent parce que la commande va varier d'une situation à l'autre. Il va falloir faire intervenir du lexique. À la fois, le lexique des aliments qu'on va acheter mais aussi celui des nombres qu'on va associer à l'aliment lorsqu'on va passer la commande donc on va avoir une structure de base qui va rester la même mais c'est ce lexique qui va être différent d'une situation à l'autre. . . on va proposer aussi aux élèves différentes formulations possibles. . . Différentes formules de politesse, différentes façons de passer la commande, et donc de varier encore davantage la forme de leur échange. L'idée est de mettre en place des situations ludiques d'apprentissages dans lesquelles on va avoir des objectifs qui vont être d'une part des objectifs lexicaux. . . On va petit à petit enrichir ce lexique. Il faut qu'on trouve également des activités qui vont permettre d'acquérir le lexique des nombres et de faire manipuler ces nombres dans des situations où on va additionner, soustraire, etc. Et il faut penser au cours de ces activités la façon dont on va amener une situation autre que la situation de la marchande, les formules de politesse et puis la question* "Peux-tu me donner ?", "Can I have ?" *ou* "Can you give me ?" *On va dans une situation ludique différente amener les élèves à utiliser cette structure langagière qui sera réutilisée dans la situation de la marchande. Il faut mettre les élèves en situation de poser les questions et pas seulement d'y répondre. Dans la situation de la marchande, ce qui est intéressant, c'est qu'on a justement celui qui pose la question et celui qui y répond. Essentiellement d'ailleurs par l'action en donnant ce qu'on lui demande.* »

Comme en mathématiques, la mise en confiance des élèves est un facteur essentiel de l'apprentissage d'une langue étrangère : « *Il n'est pas forcément indispensable de passer par le français pour comprendre une consigne même complexe. Le fait d'expliquer un jeu en français d'abord en disant* "ensuite on y jouera en anglais", *c'est conforter, dans leur esprit, l'idée qu'on n'aurait pas pu tout faire en anglais parce qu'on n'est pas assez compétent.* » Leur donner confiance, « *c'est les mettre en situation où ils sont en réception d'un discours continu complexe mais où, au bout du compte, ils se disent* "ah bah oui, j'ai compris ce qu'on m'a dit !" ».

La compréhension des consignes dans leur passation est importante pour la réalisation des tâches des élèves aussi bien en mathématiques avec l'utilisation de mots précis en français qu'en anglais.

Bilan, questions et perspectives

Nous avons pu confirmer notre intuition que l'enseignement des mathématiques et de l'anglais possédaient des points communs :

- l'intérêt d'utiliser l'action sur un matériel qui sert de support à la compréhension et à la verbalisation des contenus d'apprentissage, et aussi des consignes. En particulier la possibilité de faire découvrir un jeu directement par l'action, ce qui permet à l'enseignant, soit de demander aux élèves d'en expliciter eux-mêmes les règles (en français), soit d'accompagner lui-même l'action par une formulation de ces règles en anglais, sans passer par le français. En effet dans ce cas, l'action apporte aux élèves le sens des énoncés que leurs connaissances langagières en anglais ne leur permettent pas encore de comprendre directement ;
- et le rôle essentiel de l'explicitation des connaissances en jeu : tâches, procédures. . .

La complémentarité des différents membres de l'équipe, une proximité et une confiance entre les conseillers pédagogiques et les équipes d'écoles, des compétences didactiques « pointues » des formateurs d'INSPÉ, la formation entre pairs sont des facteurs favorisant l'intelligence collective pour apprendre et évoluer ensemble.

Au fil de nos concertations ont émergé des questions à approfondir de façon méthodique :

- Quels progrès effectifs des élèves en mathématiques et aussi en anglais ?
- En quoi la pratique de l'anglais sert-elle la pratique des mathématiques et l'inverse, et selon quelles conditions : quelles connaissances acquises nécessaires (maths et/ou anglais) pour concevoir une situation d'apprentissage ?

Il s'agira d'évaluer plus précisément les progrès des élèves. Le caractère exploratoire de l'association de l'anglais au coin marchande laisse encore ces questions en suspens, qui seront l'objet d'un travail à venir.

Références

[1] Élisabeth Boisson et Catherine Würtz. « Associer une pratique de l'anglais à la construction de compétences sur le nombre, la numération et le calcul : le coin marchande ». In : *Actes du colloque 2019 de la COPIRELEM* (2019).

Relatives à la construction du nombre

[2] Rémi Brissiaud. *Premiers pas vers les maths. Les chemins de la réussite à l'école maternelle.* Collection Savoir, pratiques éducation. Retz.

[3] *ERMEL Grande Section.* Apprentissages numériques. Hatier, 1990.

[4] Commission mathématique rattachée au groupe d'experts pour les programmes de l'École primaire. « Le calcul mental. Documents d'accompagnement aux programmes de 2002 ». In : (2004). Sous la dir. de Roland Charnay.

[5] Groupe Départemental Maternelle 95.

Relatives à l'apprentissage de l'anglais

[6] Claire Bourguignon. « Conférence *Apprendre et enseigner les langues dans la perspective actionnelle : le scénario d'apprentissage-action* ». In : *Assemblée générale de la régionale de Grenoble de l'association des professeurs de langues vivantes.* Voir le lien sur le site de l'association des professeurs de langues vivantes. 2007.

[7] Danielle Chini. « Approche actionnelle, plurilinguisme et conceptualisation linguistique ». In : *Psycholinguistique et didactique des langues étrangères, travaux du GEPED en hommage à Danielle Bailly* (2008). Sous la dir. de Danielle Chini et Pascale Gouteraux.

[8] Philippe Liria et Lucile Lacan. *L'approche actionnelle dans l'enseignement des langues, douze articles pour mieux comprendre et faire le point.* Édition Maison des Langues, 2010.

[9] Évelyne Rosen. « La perspective actionnelle et l'approche par les tâches en classe de langues ». In : *Revue recherche et application (R&A)* nº 45 (janvier 2009).

[10] Gilles Delmote et Corinne Marchois. *L'enseignement d'une langue vivante étrangère à l'école élémentaire.* Retz, 2015.

Élisabeth Boisson et Catherine Würtz, depuis peu retraitées, étaient respectivement formatrice de mathématiques à l'INSPÉ et conseillère pédagogique de circonscription dans l'académie de Versailles. Elles sont toutes les deux membres du groupe « Primaire–Coin marchande » de l'IREM de Paris.

elisabeth.jacob-boisson@u-cergy.fr

© APMEP *Octobre 2021*

Un rallye mathématique en extérieur avec l'environnement `MathCityMap`

Créer un rallye mathématique en plein air n'a jamais été aussi simple ! L'environnement `MathCityMap` vous accompagne, de la création à la mise en œuvre avec vos classes. Une fois sur le terrain, les élèves lancent l'application et se laissent guider. Il ne vous reste plus qu'à arpenter l'environnement de l'école, trouver un lieu sécurisé, laisser s'exprimer votre imagination et profiter d'une sympathique activité mathématique au grand air !

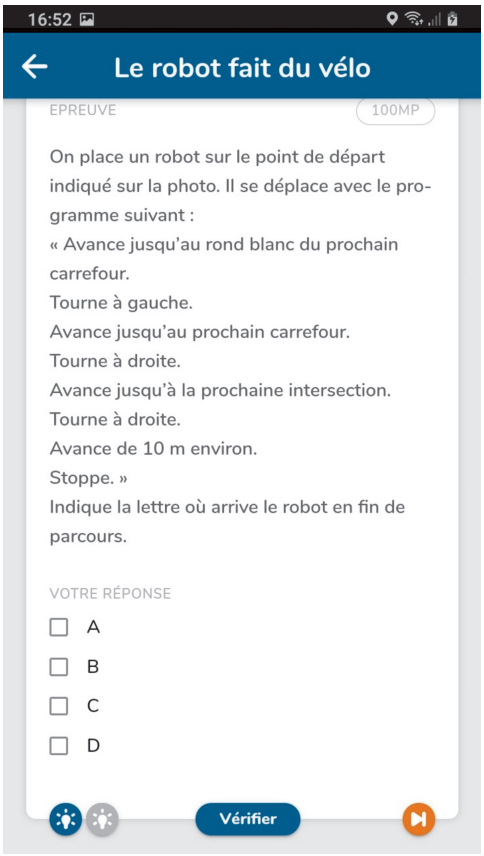
Groupe* Numatécol, *IREM de Lyon

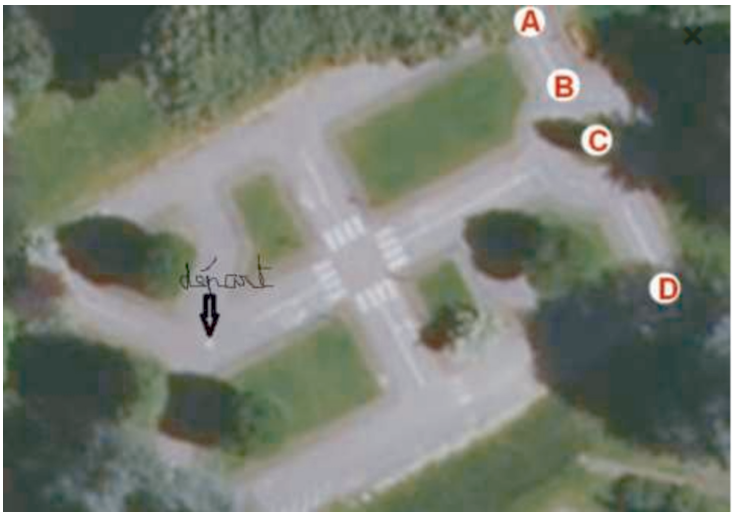
Le groupe *Numatécol* de l'IREM de Lyon s'est intéressé au projet `MathCityMap` depuis environ trois ans. Faire des maths en plein air pour apprendre à voir les mathématiques dans l'environnement quotidien puis faire le lien avec les concepts étudiés en classe, nous semble un moment important de l'apprentissage. « Manipuler, verbaliser, abstraire » prend tout son sens dans un rallye en extérieur. Nous avons expérimenté notre rallye avec plusieurs classes de cycle 3 de Saint-Étienne. Nous présentons, dans cet article, notre expérimentation et les bénéfices pour les élèves et pour les enseignants de vivre et de faire vivre de telles activités.

Des émotions positives

« *Le plaisir et l'intérêt pour les mathématiques affectent la continuité de l'engagement d'apprentissage et donc aussi le niveau de compréhension atteint* » [1]. La pratique d'un rallye mathématique dans un espace différent du micro-espace de la classe avec des instruments différents de ceux manipulés à l'école provoque chez les élèves des émotions positives qui favorisent l'enrôlement et le plaisir de chercher les épreuves qui leur sont proposées [2].

Par exemple, nous leur avons organisé une épreuve en lien avec la programmation. Sur la piste ci-dessous, nous leur proposons un point de départ, une suite d'instructions de déplacement et nous leur demandons de trouver le point d'arrivée sur le terrain.





Les élèves s'élancent avec plaisir sur la piste en jouant le rôle du robot. Les discussions s'engagent notamment à propos de l'orientation : « tournez à gauche » « tournez à droite » comme lorsque l'on travaille la programmation dans un environnement papier-crayon ou ordinateur.



Cette épreuve permet de travailler, en outre, les éléments du programme de cycle 3 :

Se repérer, décrire ou exécuter des déplacements, sur un plan ou sur une carte (école, quartier, ville, village). Accomplir, décrire, coder des déplacements dans des espaces familiers.

L'application `MathCityMap` permet plusieurs formats de réponse. Pour cette épreuve nous avons sélectionné QCM. Les élèves cochent sur le téléphone ou la tablette du groupe la réponse qu'ils ont expérimentée.

L'application renvoie immédiatement une information aux élèves :





La rétroaction permet aux élèves de savoir immédiatement si leur réponse est correcte et leur propose également des éléments de solution. Si on s'est trompé, pas de soucis, on a une deuxième chance et des indices qui permettent de ne pas rester bloqué sur une épreuve. La ludification participe à la création d'émotions positives et incite les élèves à poursuivre la résolution des autres énigmes.

Mouvement et traitement cognitif

« *Les recherches actuelles en sciences cognitives démontrent les interrelations étroites entre le cognitif et le système moteur. Une question de recherche intéressante pour enseigner et apprendre les mathématiques est la façon dont le mouvement interagit avec le traitement cognitif des problèmes mathématiques, à la fois dans l'apprentissage des concepts et dans l'application des procédures apprises.* » [3].

Prenons un autre exemple dans le parcours. Nous demandons la longueur d'une allée. Pour répondre à cette question, les élèves doivent parcourir l'allée. Le déplacement qu'ils effectuent donne du sens, dans une situation réelle et authentique, à la notion de longueur en mathématiques. De plus, parmi les procédures possibles, on peut en citer deux : compter le nombre de bordures d'un mètre le long de l'allée ou utiliser le décamètre et le reporter plusieurs fois. On expérimente ici la notion d'unités de mesure qu'il est parfois difficile à faire comprendre dans le contexte de la classe. Les élèves passent de l'unité de mesure « bordures » à l'unité de mesure « mètre ».



Manipuler, verbaliser, abstraire

La résolution de problèmes est au cœur des programmes de mathématiques du cycle 3. Un rallye mathématique permet de travailler tout particulièrement la compétence de modélisation. et on voit qu'un même lieu peut permettre la création de plusieurs questions.





Dans l'épreuve ci-dessus, on demande aux élèves de CM2 de trouver l'aire du terrain de pétanque et aux élèves de CM1 d'en trouver le périmètre. Pour répondre à cette question, il faut tout d'abord que les élèves reconnaissent la forme du terrain. Pour cela, il faut avoir de bonnes images mentales des figures usuelles. C'est l'étape de la modélisation du terrain en rectangle et passage à l'abstraction. Quand le rectangle a été reconnu, les élèves de CM2 doivent faire le lien avec les formules apprises : aire du rectangle = longueur × largeur. Étape suivante : imaginer et mettre en œuvre une procédure. Pour cela, il faut faire le lien entre cette formule et les éléments du terrain qu'il faut prendre en compte. Les mots longueur et largeur prennent tout leur sens. Les élèves doivent manipuler le double-décamètre pour effectuer ces mesures. La manipulation des instruments est le moment d'intenses tractations pour savoir qui aura l'honneur de les manipuler ! Enfin, lorsque la mesure est relevée, il faut effectuer le calcul attendu.

De plus, *« l'usage de l'esprit par l'homme dépend de sa capacité à développer et à utiliser des "outils" ou des "instruments" ou des "technologies" qui permettent d'exprimer et d'amplifier ses pouvoirs. »* [4]. L'utilisation d'un smartphone ou d'une tablette est aussi un facteur de motivation. L'application guide jusqu'au lieu de l'épreuve, elle affiche la question posée, elle propose des indices si une aide est nécessaire et enfin elle valide ou invalide la réponse. C'est le compagnon des élèves tout au long du rallye.

Recherche de problèmes et collaboration

Apprendre à coopérer pour progresser ensemble est aussi un enjeu important de l'école. Les élèves se rendent vite compte qu'ils doivent chercher et manipuler ensemble pour réussir la tâche demandée. On ne peut pas manipuler seul un double décamètre sur une grande longueur. Il est important qu'un élève prenne des notes pour garder la trace des mesures intermédiaires. Les élèves plus en difficulté avec les mathématiques trouvent toute leur place lorsqu'il faut arpenter et manipuler.

Interdisciplinarité

Par ailleurs, la pratique d'un rallye mathématique permet d'aborder des éléments du socle commun et des programmes des différentes disciplines :

Programme d'EPS

- Les parcours ou courses d'orientation sont l'occasion de mettre en pratique les activités de repérage ou de déplacement (sur un plan, une carte) travaillées en mathématiques et en géographie.
- Les activités d'orientation peuvent être programmées, quel que soit le lieu d'implantation de l'établissement. Les autres activités physiques de pleine nature seront abordées si les ressources locales ou l'organisation d'un séjour avec nuitées le permettent.

Socle commun

DOMAINE 2 : des méthodes et outils pour apprendre

- coopérer et réaliser des projets ;
- définir et respecter une organisation et un partage des tâches dans le cadre d'un travail de groupe ;
- trouver des solutions pour résoudre un problème de compréhension.

DOMAINE 3 : la formation de la personne et du citoyen

- formuler une opinion, prendre de la distance avec celle-ci, la confronter à celle d'autrui et en discuter ;
- [l'activité] peut être réalisée dans le cadre de différentes situations au sein de la classe, de l'établissement ou à l'extérieur dans lesquelles les élèves ont à respecter des règles collectives pour assurer la sécurité de chacun (activités sportives et/ou expérimentales) et/ou permettre un fonctionnement collectif efficace (réalisation d'un projet collectif, jeu sportif, situations de classe quotidiennes).

DOMAINE 4 : les systèmes naturels et les systèmes techniques

- utiliser des instruments d'observation ;
- mesurer ;
- respect du vivant et de l'environnement lors des sorties de terrain et des activités expérimentales.

DOMAINE 5 : représentation du monde et l'activité humaine

Situer et se situer dans le temps et l'espace :

- connaître et localiser de grands repères géographiques sur des supports cartographiques variés, y compris numériques (cartes ou plans) ;
- se repérer et repérer des lieux dans l'espace en utilisant des plans et des cartes ;
- situer une œuvre littéraire ou artistique dans une aire géographique et culturelle ;
- se repérer et repérer des lieux et des espaces sur des cartes à différentes échelles (planisphère, continent, France) : le plan, la carte, papier ou numérique ;
- élaborer un projet de déplacement en mobilisant la notion de distance et le vocabulaire approprié.

Ainsi, au-delà de l'intérêt de l'utilisation de l'application pour améliorer les compétences mathématiques des élèves, c'est également l'occasion potentielle de créer des projets pluridisciplinaires.

Quelques conseils avant de vous lancer

Notre préoccupation première a été de chercher un lieu sécurisé dans lequel on pouvait mettre en place un parcours. Notre choix s'est porté sur un grand parc, le parc de l'Europe, à proximité de deux autres lieux de culture scientifique, la rotonde et le planétarium, afin d'offrir la possibilité d'organiser une sortie scolaire d'une demi-journée avec deux activités scientifiques.



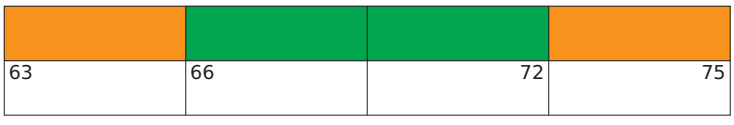
Pour le lancement de l'activité, il faut prévoir de réunir les élèves dans un lieu assez grand, calme, à proximité du parcours, afin de prendre le temps d'expliciter précisément le déroulement, les attentes et de distribuer ou de vérifier le matériel nécessaire (double décamètre ; mètre pliant ; corde ; téléphone ; calculatrice ; brouillon ; . . .).

Après ce premier temps, les adultes se rendent sur les lieux des épreuves. Les élèves partent par groupes vers la première épreuve qui leur a été attribuée pour commencer le parcours. Chaque groupe débute par une épreuve différente afin qu'il n'y ait qu'un groupe par lieu d'énigme. C'est pourquoi il faut un lieu permettant le déplacement des élèves en toute sécurité, entre chaque lieu d'énigme. Quand les groupes ont terminé le parcours, ils doivent retourner à l'endroit où ils étaient réunis au départ afin de faire le bilan.

Au moment de l'élaboration des questions, il ne faut pas oublier de préciser dans la question l'unité de mesure attendue. Les mesures prises sur le terrain sont imprécises. Lorsqu'il faut calculer un volume (voir l'énigme 3 si vous avez regardé le parcours sur le site), les imprécisions se multiplient d'autant. Il faut donc prévoir un intervalle assez large dans lequel toutes les réponses sont considérées comme étant correctes. L'application permet de rentrer un intervalle dans lequel toutes les réponses sont *considérées comme étant justes* et un intervalle dans lequel les réponses sont *acceptables*. Voici un exemple de l'affichage dans l'application :

Réponse :* :

Intervalle



On a considéré qu'il fallait accepter toutes les réponses entre 66 m et 72 m mais que les réponses entre 63 m et 66 m ou entre 72 m et 75 m étaient acceptables.

Conclusion

Les élèves sont confrontés à des questions en lien avec le réel qui nécessitent de réinvestir leurs connaissances. On a noté une grande effervescence dans chaque groupe, sans doute emporté par

l'enthousiasme, mais qui est finalement bien canalisé. Plusieurs élèves, en relative difficulté en classe du point de l'expression orale et de l'abstraction, se sont complètement révélés ici. On a assisté à la formation d'un nouvel équilibre au sein d'une même classe, où des élèves plus en retrait ont eu un véritable rôle de leader lors de l'activité, et inversement.

Cette expérimentation avec les plus jeunes élèves du collège est particulièrement intéressante dans la mesure où l'autonomie de ceux-ci s'est grandement révélée avec un suivi moins proche. Les élèves cherchent moins la validation permanente de l'adulte que l'on peut parfois retrouver avec ce type de public.

Les élèves sont ici confrontés à l'importance de l'estimation dans le monde sensible (« *Que représentent 500 mètres ?* » ; « *Un poteau ne peut pas mesurer 1 km !* »). Nous pensons que la pratique des mathématiques en extérieur permet d'aborder de manière très concrète la notion d'ordre de grandeur, essentielle pour construire un regard critique face aux résultats de calculs obtenus par les élèves en classe (voir la compétence de cycle 3 : « contrôler la vraisemblance des résultats »). L'utilisation de l'application, sans la médiation directe du maître, peut permettre aux élèves de faire évoluer leur approche des mathématiques.

On retrouve donc une double interaction classe-extérieur et extérieur-classe, où chacune nourrit l'autre : l'application des mathématiques en extérieur permet de mettre en pratique ce que l'élève apprend en classe, et la confrontation au réel permet d'améliorer l'esprit critique de l'élève pour la mise en œuvre des mathématiques parfois plus abstraites en classe. Pour terminer, on peut signaler que l'environnement `MathCityMap` a évolué depuis que nous avons fait cette expérimentation. Le professeur peut maintenant utiliser la fonction « *digital school* » qui permet un suivi en direct du travail de chaque groupe avec un « *chat* », une géolocalisation des groupes et un e-portfolio. Nous aurons l'occasion de tester cette innovation lors de notre prochaine sortie.

Références

[1] M. Tulis. « Individualisierung im Fach Mathematik : Effekte auf Leistung und Emotionen ». In : *Wissensprozesse und digitale Medien* Bd. 17 (2010). Sous la dir. de F.W. (Hrsg.) Hesse.

[2] G. Brousseau. *Les propriétés didactiques de la géométrie élémentaire. L'étude de l'espace et de la géométrie.* . Grèce : Rethymnon, 2000, pp. 67-83.

[3] Diana Henz, Reinhard Oldenburg et Wolfgang Schöllhorn. *Does bodily movement enhance mathematical problem solving ? Behavioral and neurophysiological evidence.* 2015.

[4] D. Tall. « Using technology to support an embodied approach to learning concepts in mathematics ». In : *História e Tecnologia no Ensino da Mathemática* Bd.1, S. 1–28 (2003). Sous la dir. de L.M. Carcalho et L.C. (Hrsg.) Guimaraes.

Le groupe *Numatécol* de l'IREM de Lyon est constitué d'Alexandre Franquet, professeur des écoles, de Camille Gibert, Cécile Nigon, Anthony Simand, Vincent Montagnon, professeurs de mathématiques en collège et de René Thomas, professeur de mathématiques retraité.

alexandre.franquet@ac-lyon.fr
vincent.montagnon@ac-lyon.fr
cecile.nigon@ac-lyon.fr
anthony.simand@ac-lyon.fr
rene.thomas@univ-lyon1.fr

© APMEP *Octobre 2021*

Géométrie de bout de ficelle dans la cour de récré

La géométrie enseignée, de l'enseignement primaire à l'université, se construit comme une modélisation de l'espace physique et évolue d'une « géométrie de l'observation » à une « géométrie de la démonstration ». Bernard Parzysz développe ce point de vue dans le cas d'une tâche de modélisation d'un objet matériel, et plus précisément d'un décor de type « géométrique », mettant en œuvre le méso-espace.

Cet article est paru dans le nº 538 (2020).

Bernard Parzysz

Travaillant depuis plusieurs années en collaboration avec des archéologues spécialistes du décor antique, j'ai pensé que ma démarche dans ce domaine pouvait être transposée dans l'enseignement, et pour la présenter je prendrai comme exemple un panneau de mosaïque romaine[1]. Mais il va sans dire que, dans une classe, on peut utiliser bien d'autres types de supports : fresque murale, tissu, tapis, papier peint, etc.

Mais tout d'abord, dans quelles géométries les élèves évoluent-ils au long de leur scolarité obligatoire ? Les enfants sont d'abord confrontés aux objets matériels, dont ils ne retiennent progressivement que certains éléments, jugés pertinents pour résoudre les problèmes qui leur sont posés. Dans cette première géométrie (paradigme G1 de Houdement et Kuzniak [1]) les objets d'étude sont physiques et la validation est de type perceptif, éventuellement instrumentée. Mais un objectif important de l'enseignement obligatoire est d'amener les élèves à travailler dans une géométrie euclidienne (paradigme G2 de Houdement et Kuzniak [1]), dans laquelle les objets d'étude sont théoriques et la validation hypothético-déductive. La difficulté principale dans l'accès à ce second paradigme est le fait que G1 comme G2 utilisent des « figures », sous la forme de dessins ou d'images d'ordinateur, mais les deux géométries le font de façons totalement différentes qui risquent de rester implicites sauf en cas de blocage : dans G1 les figures sont l'objet d'étude, et l'élève y apprend à utiliser les instruments usuels de tracé, notamment pour réaliser des tâches de construction ou de reproduction ; dans G2, au contraire, l'objet d'étude est théorique et la figure n'en est qu'une représentation physique qui est utilisée dans un but heuristique. Mathé *et al.* [2] indiquent à ce propos qu'*« un autre rapport* [que la géométrie physique] *mérite d'être développé dans l'enseignement, celui d'une théorie physique de l'espace qui correspond dans ses grandes lignes au paradigme G1 d'Houdement et Kuzniak, mais avec des reports de grandeurs sans les mesures »* [2, p. 29]. L'objectif de cette « géométrie des tracés » est de créer un lien entre un usage raisonné des instruments (hormis la règle graduée et le rapporteur) et les concepts géométriques. L'exclusion de la mesure est justifiée par l'idée que, *« quand des valeurs numériques sont données, les nombres sont prégnants pour les élèves et les détournent des notions géométriques »* [2, p. 44].

La géométrie des tracés sans recours à la mesure est exactement celle du maître d'œuvre mosaïste antique (le *pictor*). D'une part, étant

1. Dans la mosaïque romaine, les décors « géométriques » sont de loin les plus abondants, même si ce sont les décors figurés qui sont le plus représentés dans les publications. On dispose ici d'une masse considérable de documents exploitables en classe.

donné la complexité, tant du système de mesures que du système de numération utilisés à Rome, toute opération numérique était de fait quasi impossible. D'autre part, son instrument de tracé principal était le cordeau, éventuellement complété par une règle (non graduée) et une équerre. Le cordeau était véritablement le « couteau suisse » du mosaïste : il pouvait notamment lui servir à tracer des lignes droites, des cercles et à reporter des longueurs, et on peut véritablement parler ici d'une *géométrie du cordeau*. La tâche du *pictor* consistait tout d'abord à concevoir un décor issu de ses connaissances géométriques et tenant compte de diverses contraintes de faisabilité (matériaux, instruments, outils, etc.). Il devait ensuite — soit directement, soit par l'intermédiaire d'une représentation graphique auxiliaire — implémenter *in situ* les lignes directrices de ce décor, puis confier à des artisans spécialistes la tâche de le réaliser sur cette base, supervisant leur travail pour parer à une dérive éventuelle. **Pour illustrer mon propos je prendrai maintenant l'exemple d'un pavement de mosaïque gallo-romaine du deuxième siècle de notre ère** [3] dont 17 m^2 furent découverts en novembre 1994 au centre-ville de Metz, rue de la Pierre Hardie (fig. 1).



Figure 1. *Metz, vue de la mosaïque* in situ *(cl. L. Gébus, SRA).*

Il s'agit d'un panneau noir et blanc [2] qui se compose de deux parties distinctes, séparées par un double filet noir. Cette mosaïque est aujourd'hui exposée au musée de la Cour d'Or de Metz (fig. 2).

Sur la base de ces deux documents, on peut commencer par proposer à la classe de décrire les éléments géométriques qu'ils y repèrent.

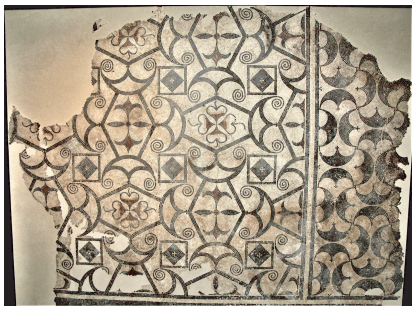


Figure 2. *Metz. Mosaïque exposée au musée de la Cour d'Or de Metz (cl. B.P.).*

Apparaîtront alors les termes *droite, segment, carré*, sans doute *cercle* (et *demi-cercle*), et peut-être même *losange*. Cette identification des éléments étant faite, on peut demander de déterminer, pour chacune des deux parties du panneau, un *réseau carré* permettant de dessiner son décor sans l'avoir sous les yeux [3] (en excluant, pour l'instant du moins, les motifs végétaux).

Les premiers réseaux qui apparaîtront sont sans doute en premier (fig. 3) :

- pour la partie A (à droite sur la figure 2) : un réseau dont chaque maille renferme deux peltes [4] adossées (fig. 4) ;
- pour la partie B (à gauche sur la figure 2) : un réseau dont les lignes correspondent aux grands axes des « losanges tronqués ».

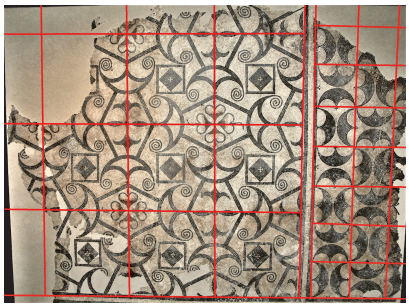


Figure 3. *Les deux réseaux primaires.*

Mais ces réseaux sont insuffisants pour reconstituer l'un comme l'autre des deux décors.

2. Avec quelques touches de rouge dans les motifs végétaux.
3. Le recours à un logiciel de géométrie dynamique comme GeoGebra ou Cabri, permettant d'insérer une image dans un fichier et de lui superposer des tracés, s'avère ici extrêmement utile.
4. L'assemblage de trois demi-cercles qu'on trouve ici en nombre est appelé *pelte* ; il passe pour représenter, vu de profil, le bouclier des légendaires Amazones.

Pour le panneau A, il suffit de subdiviser le module en deux (fig. 5, à droite) ; chaque paire de peltes correspond alors à un carré de 2×2 (fig. 4). On quitte alors l'espace physique pour l'espace graphique. Dans cet espace, on peut demander aux élèves de rédiger un programme de construction d'une pelte à partir de la donnée d'un segment.

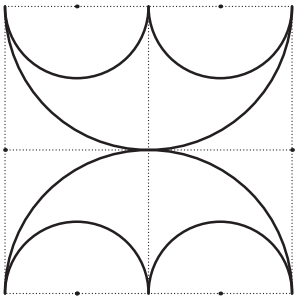


Figure 4. *Panneau A : peltes adossées.*

De même, pour le panneau B, on cherche une subdivision du réseau primaire qui rende compte des points et lignes « importants » du décor ; les côtés des petits carrés fournissent la réponse (fig. 5, à gauche), et on admet que ce nouveau réseau s'obtient en divisant le module initial en trois.

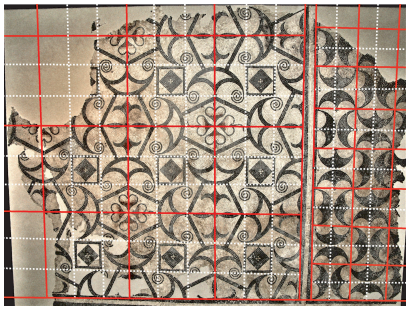


Figure 5. *Les deux réseaux secondaires.*

On voit alors apparaître, sous deux orientations, un motif répétitif dans des carrés de 4×4, constitué d'un losange à chaque sommet duquel vient se placer une pelte identique à celles du panneau A ; ces peltes sont orientées vers l'extérieur aux angles obtus et vers l'intérieur aux angles aigus, ces dernières recouvrant partiellement le losange. Enfin, les mailles situées aux angles du carré constituent les petits carrés du décor (fig. 6).

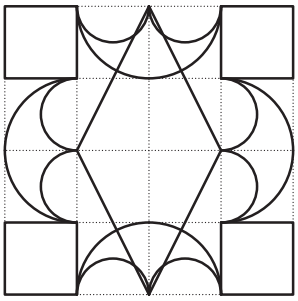


Figure 6. *Panneau B : schéma du motif unitaire.*

On peut alors demander la rédaction d'un programme de construction, ce qui va nécessiter un codage des « nœuds » du réseau, sous la forme de lettres et/ou d'un proto-système de coordonnées. On sera ainsi à même de reconstituer — et peut-être même de mémoire — un schéma complet des deux panneaux… à condition de connaître leur extension. Heureusement, en réponse à cette interrogation un archéologue a publié un relevé d'ensemble de la mosaïque (fig. 7) qui va nous être bien utile.

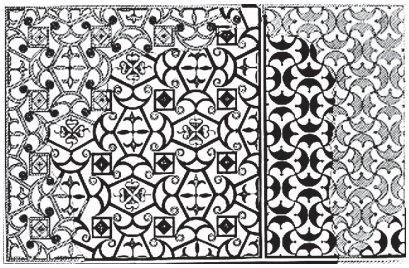


Figure 7. *Relevé de l'ensemble de la mosaïque [4].*

La comparaison avec nos documents montre que le panneau A est construit sur un réseau de 18×10 et le panneau B sur un réseau [5] de 12×12.

Pour le panneau B, on peut également remarquer (fig. 5) que, abstraction faite des peltes, chaque maille du réseau primaire contient un carré penché, alternativement vers la droite, et vers la gauche. Mais au fait, s'agit-il bien d'un carré ? On peut alors le vérifier aux instruments sur un dessin (G1) ou, si les connaissances des élèves le permettent, passer dans la géométrie théorique (G2) et chercher une démonstration, en utilisant,

5. Les deux panneaux ayant même hauteur, il en résulte que le module du panneau B vaut une fois et demie celui du panneau A.

selon le cas, triangles égaux, théorème de Pythagore, angles alternes internes etc. (fig. 8)

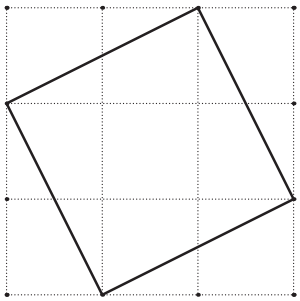
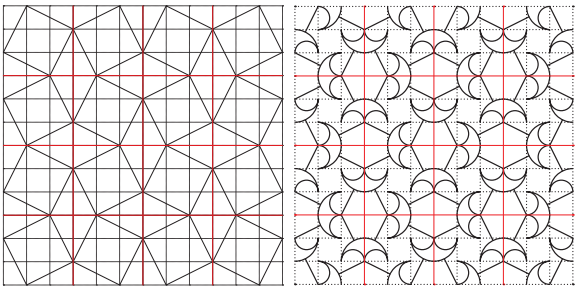


Figure 8. *« Carré penché » du panneau B.*

Il résulte en tout cas de la remarque faite plus haut qu'il est sans doute plus facile de restituer le décor du panneau B en commençant par les carrés penchés, c'est-à-dire en se basant sur le réseau primaire, complété par le réseau secondaire. D'où une première étape de la reconstitution (fig. 9a), sur laquelle il ne restera plus qu'à placer les peltes aux sommets des losanges apparus miraculeusement (fig. 9b), munis éventuellement de leurs volutes.



(a) *Structure polygonale.* (b) *Peltes.*

Figure 9. *Panneau B : schéma global.*

Sur deux feuilles de papier quadrillé, les élèves peuvent maintenant reproduire les deux schémas directeurs, d'une part celui du panneau A (éventuellement à main levée), et d'autre part celui du panneau B. Ils sont pour cela amenés à faire agir diverses transformations sur les éléments de base (carré penché pour le panneau B, demi-cercles pour les deux panneaux). Ils ont donc maintenant à leur disposition un schéma complet du décor de la mosaïque de Metz (fig. 10), qui leur permettra de le reproduire de mémoire à partir d'un unique élément de départ (carré penché ou pelte), une fois installés les deux réseaux.

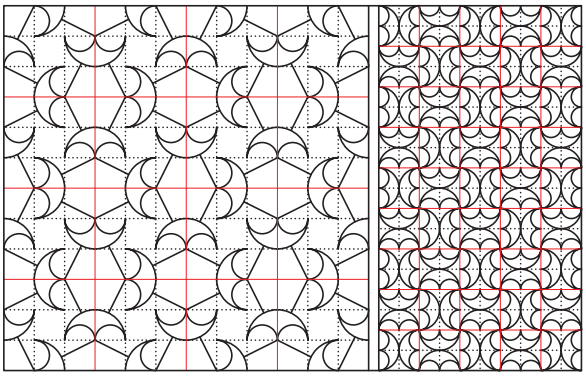


Figure 10. *Schéma d'ensemble de la mosaïque.*

Enfin, si l'on souhaite préciser ce schéma, et ainsi pénétrer plus avant dans l'univers des mosaïstes, on peut encore s'intéresser à la façon dont les tesselles [6] ont été posées, une fois les tracés directeurs réalisés. Des gros plans sur les documents nous fournissent des renseignements fort intéressants.

Pour le panneau A (fig. 11), on s'aperçoit par exemple que les nœuds du réseau primaire (rouge) sont matérialisés par une tesselle blanche, tandis que les intersections des lignes des deux réseaux (rouge / blanc) sont figurées par une croisette noire, deux éléments qui, outre leur apport esthétique, sont destinés à faciliter ensuite la mise en place des peltes. On voit ici clairement la distinction entre l'objet physique et le modèle graphique, puisque dans celui-ci les tesselles sont réduites à un point [7].

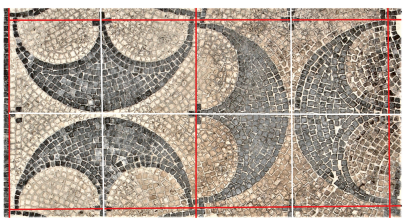


Figure 11. *Implantation des peltes du panneau A.*

6. Les tesselles sont les petits dés de pierre, de céramique ou de verre, d'environ 1 cm de côté, à l'aide desquels est réalisée la mosaïque.

7. On peut à cette occasion évoquer le parallèle avec la géométrie des pixels.

Pour le panneau B (fig. 12), on constate que les losanges et les peltes sont figurés par un triple rang de tesselles noires posé à l'intérieur du tracé directeur, alors qu'on n'a qu'un double rang de tesselles pour les petits carrés. Les volutes, quant à elles, sont composées d'un simple rang de tesselles noires séparé par un rang de tesselles blanches.

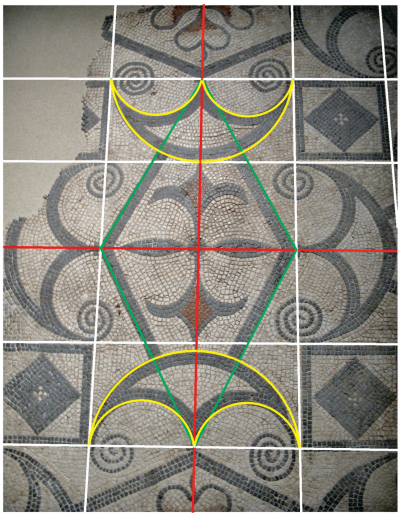


Figure 12. *Implantation du motif du panneau B.*

Cette démarche collective de modélisation nous aura donc fait passer de l'espace sensible (la mosaïque) à l'espace graphique (les documents photographiques, le dessin sur papier quadrillé ou sur écran d'ordinateur), et éventuellement à la géométrie théorique (la démonstration du « carré penché »), avec un retour sur les clichés pour préciser la façon dont le décor a été posé. Un schéma de Mathé *et al.* [2, fig. 4 p. 32], que j'ai adapté à l'étude du décor, illustre l'articulation de ces trois espaces (fig. 13).

Dans la scolarité obligatoire, l'enseignement de la géométrie ne fait que très (trop) rarement intervenir d'autres espaces de travail que le micro-espace[8]. Pourtant, lorsque l'on a besoin de connaissances géométriques pour résoudre un problème de la vie courante, c'est le plus souvent dans un autre espace qu'on est plongé. Dans cet espace, le sujet n'est pas extérieur à l'espace mais y est inclus, et pour entreprendre une résolution géométrique — c'est-à-dire une modélisation de la situation — il se trouve en général amené à réaliser une représentation graphique des objets en jeu (croquis, schéma, dessin à l'échelle, épure, . . .). Initier les élèves à ce type de démarche associant situation matérielle, espace graphique et géométrie théorique n'est donc pas sans intérêt dans la formation de l'individu.

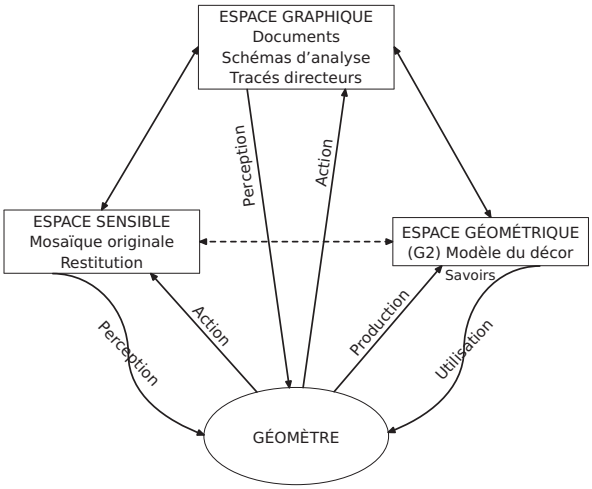


Figure 13. *Articulation des trois espaces au cours de la démarche.*

Pour l'instant notre démarche s'est déroulée entièrement dans le micro-espace, tandis que la « vraie » mosaïque se situe dans le méso-espace, celui *« des déplacements du sujet dans un domaine contrôlé par la vue,* (où) *les objets sont fixes et mesurent entre 0,5 et 50 fois la taille du sujet »* [5]. Le sujet, qui se situe à l'intérieur du méso-espace, et non à l'extérieur comme dans le micro-espace, peut encore avoir une vision globale de l'objet étudié, mais les changements de point de vue sont plus difficiles, et par conséquent les contrôles également. Reconstituer le décor de la mosaïque en vraie grandeur au sol relève du méso-espace, et réaliser le schéma directeur « comme le mosaïste romain », avec les mêmes instruments, va permettre de tester le modèle élaboré et, *via* des procédures de construction et de contrôle spécifiques, de faire évoluer les

8. Pour plus de détails, on pourra par exemple consulter le site personnel de Jean-Luc Brégeon.

conceptions géométriques des élèves [6]. C'est la raison pour laquelle je crois qu'il peut s'avérer intéressant de proposer à une classe de collège un travail d'équipe consistant à reproduire en vraie grandeur, aussi précisément que possible, par exemple sur le sol cimenté de la cour de récréation ou sur un mur, le dessin d'un panneau de mosaïque romaine. On n'utiliserait pour cela que des craies de couleur et les instruments en usage à l'époque, c'est-à-dire au premier chef un bout de ficelle (le cordeau)[9], permettant non seulement de tracer des droites et des cercles mais aussi de reporter des longueurs. Ce travail serait bien entendu précédé d'un travail à petite échelle visant à déterminer le modèle géométrique du décor et à étudier ses propriétés.

Prenons l'exemple du panneau B : la première difficulté — dont dépendra le reste de la réalisation — va être de délimiter un grand carré qui contiendra la totalité du décor, et donc de déterminer une procédure permettant de l'obtenir : va-t-on commencer par les côtés ou par les diagonales ? Comment vérifier le résultat ? Ces procédures renvoient à des définitions différentes du carré (rectangle aux diagonales perpendiculaires, losange aux diagonales égales, . . .) sur lesquelles on pourra ensuite travailler en classe. La seconde difficulté est la mise en place du réseau primaire, qui s'obtiendra en divisant en quatre les côtés du carré : une ficelle repliée deux fois fournira la solution. Il s'agira ensuite de diviser en trois chacune des quatre longueurs des côtés. Deux méthodes sont alors possibles pour partager en trois une longueur AB :

- la méthode « artisanale » (très certainement celle du mosaïste), dite « par balancement » : « *Prenez une ouverture de compas qui vous semblera être le tiers de* AB*, et portez-la trois fois aux points* c, d, e. *Le point* e *ou la troisième division tombant au-delà du point* B*, il est évident que l'ouverture du compas est trop grande. Fermez alors les branches du compas, d'une quantité qui vous paraîtra être le tiers de la différence, et recommencez la division ; opérez ainsi, jusqu'à ce que la troisième division tombe au point* B. » [7, p. 10] ;
- la méthode « savante », qui repose sur le théorème de Thalès : sur une demi-droite $[Ax)$ on porte un point M, puis le symétrique N de A par rapport à M et le symétrique P de M par rapport à N. On trace ensuite la droite (BP) et on mène par M et N les parallèles à (BP). Leurs points d'intersection avec $[AB]$ partagent ce segment en trois longueurs égales.

Ceci fournit, en fin de collège, une occasion de revenir sur la différence entre une construction « exacte » et une construction « précise », c'est-à-dire entre géométrie pratique et géométrie théorique : la première méthode peut être très précise si on y apporte beaucoup de soin, mais elle nécessite de faire des essais ; la seconde donne le résultat du premier coup, mais elle nécessite de tracer des parallèles, ce qui, sur le terrain, est toujours délicat.

Une fois la grille installée, la mise en place fera intervenir les transformations de figures (symétries, translations) . . . et fera peut-être entrevoir les effets de composées de transformations sur une figure.

Ce que j'ai ici exposé sur un seul exemple peut bien sûr être réalisé à partir de bien d'autres supports, en adaptant la difficulté de la tâche aux élèves, à des mosaïques, bien sûr, notamment avec la base de données Henri Stern, mais pas seulement. Je suis persuadé qu'il s'y trouve non seulement une source d'activités motivantes pour la classe, mais aussi une voie d'accès particulièrement bien adaptée vers la géométrie théorique. Et pour conclure, je ne saurais mieux faire que de citer un extrait de la conclusion de la thèse de Berthelot et Salin, qui me semble plus que jamais d'actualité : « *Nous avons proposé de référer clairement ces activités à une problématique de modélisation de la réalité spatiale. Ceci pose la question de la pertinence de l'extension de cette réalité hors de la feuille de papier, et de l'étude du rôle de la taille de l'espace dans l'établissement*

9. On peut bien sûr autoriser, ou faire fabriquer, une grande équerre.

du sens de la modélisation. L'étude de ce type de problèmes, permet d'en montrer la richesse sur le plan du développement de méthodes et de raisonnements dont certains formeront la base de compétences nécessaires à la géométrie strictement mathématique. [...] *La question de l'initiation des élèves à la géométrie se trouve ainsi transformée : ce n'est plus seulement un saut direct de la problématique pratique à la problématique géométrique qui peut être envisagé ; on peut aussi concevoir d'aménager l'entrée dans la problématique de modélisation, puis des aller-retours entre cette problématique, où les concepts de la géométrie ont un statut d'outil et commencent à figurer dans des raisonnements, et la problématique de la géométrie, où ils sont considérés comme des objets.* » [6, p. 362]

Références

[1] C. Houdement et A. Kuzniak. « Paradigmes géométriques et enseignement de la géométrie ». In : *Annales de Didactique et de Sciences cognitives* n° 11 (2006), pp. 175-195.

[2] A.-C. Mathé, T. Barrier et M.-J. Perrin-Glorian. « Enseigner la géométrie élémentaire. Enjeux, ruptures et continuités ». In : *Les sciences de l'éducation aujourd'hui*. Louvain-la-Neuve : Academia – L'Harmattan, janvier 2020. ISBN : 978-2-8061-0500-4.

[3] B. Parzysz. « À propos d'une mosaïque découverte à Metz ». In : *Maths et Arts*. Régionale APMEP de Lorraine (2008).

[4] P. Flotté. *Carte archéologique de la Gaule. 57/2 Metz*. Paris : Maison des Sciences de l'Homme, 2005.

[5] G. Brousseau. « Études de questions d'enseignement. Un exemple : la géométrie ». In : *Séminaire de didactique des mathématiques et de l'informatique*. Université Joseph Fourier, laboratoire LSD IMAG. Grenoble, 1983.

[6] R. Berthelot et M.-H. Salin. « L'enseignement de l'espace et de la géométrie dans la scolarité obligatoire. » Thèse. Université Bordeaux I, 1992.

[7] A. Bouillon. *Principes de dessin linéaire*. Paris : Hachette, 1839.

Note : les fichiers GeoGebra évoqués dans l'article sont disponibles dans la version numérique de l'article. B. Parzysz tient les fichiers Cabri à la disposition des collègues intéressés.

Bernard Parzysz est professeur émérite de l'université d'Orléans, membre du LDAR (Laboratoire de Didactique André Revuz) de l'université Paris-Diderot, et animateur à l'IREM de Paris-Diderot. Il collabore avec fidélité aux publications de l'APMEP.

parzysz.bernard@wanadoo.fr

© APMEP *Octobre 2021*

Mathématiques contées

Les histoires peuvent-elles nous aider à transmettre des mathématiques ? Marie Lhuissier est conteuse-mathématicienne. Elle écrit des contes un peu particuliers, qui proposent une approche poétique des mathématiques, pour les grands et les petits. Focus sur son conte La faiseuse de neige *. . .*

Cet article est paru dans le nº 538 (2020).

Marie Lhuissier
(contribution de Muriel Grandclément)

Beaucoup de gens voient les mathématiques comme une discipline austère, froide et mécanique, restreinte au calcul, qui ne ferait appel à aucune de ces qualités qui font notre *humanité* : l'émotion, l'intuition, la création.
Je crois que cette vision provient d'un manque d'incarnation : les mathématiques ne semblent jamais être portées par des humains. On ne parle jamais de ce que l'on engage de notre personne quand on fait des mathématiques : « Pourquoi ça m'attire ? Qu'est-ce que ça m'apporte ? Pourquoi ça me procure du plaisir ? »
Je crois qu'il faut nommer ce que vivent ceux et celles qui font des mathématiques.
Je crois qu'il faut essayer d'incarner les mathématiques par tous les moyens.
Je crois que l'histoire est un moyen, un moyen particulièrement bien adapté aux enfants. . .

C'est pourquoi j'écris des contes mathématiques pour les enfants, et je les raconte. Un conte mathématique, pour moi, c'est tout d'abord une histoire — une vraie histoire, avec de vrais personnages qui ont une vraie quête. Et cette quête va, pour une raison ou une autre, amener *naturellement* ces personnages dans une posture de mathématicien.

Le conte, en tant qu'histoire, a d'autres spécificités, comme celle de ne pas être ancré dans un temps ou un lieu précis, ou l'utilisation d'archétypes et de symboles. Ces caractéristiques me semblent particulièrement propices à la transmission de mathématiques, mais mon propos ici se généralise à toutes sortes d'histoires.

Il me semble, quand je regarde autour de moi, que les tentatives de « transmettre les mathématiques autrement » empruntent souvent le chemin du jeu, parfois celui des arts visuels, mais rarement celui des histoires. C'est normal : les histoires sont par nature très éloignées des mathématiques ; les unes et les autres ne partagent que très peu de choses. Pour raconter quelque chose de mathématique à travers une histoire, il faut adapter beaucoup, et aussi renoncer, beaucoup. Et pourtant, le jeu en vaut la chandelle !
Je vais tenter, en me basant sur mon expérience de construction d'histoires mathématiques, de faire le tour des possibilités spécifiques qu'offre ce médium, et des contraintes qu'il impose. Je prendrai pour exemple *La faiseuse de neige*, un conte que j'ai écrit d'après une idée de Chloé Chateau, professeure de mathématique au lycée Albert Einstein, à Bagnols-sur-Cèze.

Je ne parlerai pas de l'approche historique, que je n'ai jamais tentée — raconter des éléments d'histoire des mathématiques. Je ne sais pas précisément ce qui peut être raconté, en particulier à des enfants. Les réflexions que je désire partager ici portent sur la fiction : comment créer une histoire à partir d'une idée mathématique ?

De la difficulté d'écrire une histoire mathématique

Si l'on veut écrire une histoire mathématique, il faut décider d'un contenu mathématique et trouver une manière de le mettre en histoire.

Prenez un objet mathématique que vous aimez bien. Par exemple, une fractale. Si j'essaie d'imaginer une histoire autour de cet objet, voici ce qui me vient spontanément :

> C'est l'histoire d'une toute petite fourmi qui se promène sur un drôle de cheveu tout frisé, vraiment très frisé, tellement frisé que la petite fourmi ne fait que tourner et tourner encore, jamais elle ne peut faire un vrai pas en avant, il faut toujours tourner, et la petite fourmi, qui a l'impression de ne pas avancer du tout, se désespère.

Je n'aime pas beaucoup cette histoire. Pour moi, ce n'est pas une vraie histoire ; c'est un concept mathématique recouvert d'un mince vernis narratif. Si on enlève les mathématiques, il n'y a plus d'histoire, il n'y a plus rien.
Cette histoire a des qualités, c'est vrai. Elle transmet un contenu mathématique en utilisant les ressorts narratifs, qui permettent de capter l'attention et de mobiliser la mémoire.
Elle a aussi des défauts. Elle exacerbe l'aspect gratuit, inutile et déconnecté que peuvent présenter les mathématiques à certains yeux.

- « Si c'est ça, le genre de problématiques auxquelles les mathématiques peuvent répondre, alors elles n'ont clairement rien à m'apporter »
- « Une fourmi sur un cheveu. . . Si c'est le genre d'entités auxquelles les mathématiques sont utiles, pas étonnant que je ne me sente pas fait pour les maths ! »
- « Comme tentative de rapprocher la littérature et les mathématiques, ce n'est pas très convaincant. C'est même plutôt une preuve qu'on est soit littéraire, soit matheux ».

Vous me direz peut-être que mon exemple est grossier et caricatural. C'est fort possible, j'ai pris le premier qui me venait à l'esprit. Mais l'idée y est : si, quand vous enlevez les mathématiques, il n'y a plus rien, ni personnage ni problématique, alors ce n'est pas une vraie histoire.

Pourquoi, alors, cette histoire est-elle la première qui me soit venue à l'esprit ? Et surtout, pourquoi ai-je tant de mal à trouver de *vraies* histoires ? Pourtant je sais bien que les mathématiques sont une source d'émerveillement et un lieu de liberté et de création, que ceux qui cherchent empruntent des chemins ardus et surprenants, que les mathématiques reposent sur une dynamique qui est, à elle seule, toute une manière d'appréhender le monde. Je sais bien que tout ceci est passionnant et mérite d'être raconté. Pourquoi, alors, ai-je tant de mal à le raconter ?
Probablement parce que le matériau qui forme les bonnes histoires est constitué des émotions, des relations humaines et des difficultés auxquelles le monde extérieur nous confronte. Et rien de tout cela n'est du domaine des mathématiques. La vérité, c'est que les concepts mathématiques ne sont pas, tels quels, du bon matériau à histoires.

Alors il faut *détourner* les objets mathématiques, pour leur donner une fonction dans une histoire. Par exemple, une fractale de Von Koch devient un flocon de neige qu'une faiseuse de neige désire offrir à un petit garçon.

Extrait n° 1 de *La faiseuse de neige*.

> Dans la petite ville de Leonberg, arriva un été un petit garçon qui aimait la neige plus que tout. Il s'appelait Johann. Dès la fin de l'automne, on le vit errer dans les rues, le visage levé vers le ciel, guettant les premières neiges. Et, quand l'hiver arriva, il passa tout son temps libre à contempler la neige et à recueillir des flocons. Lorsqu'un flocon lui plaisait particulièrement, pour ne pas l'oublier — la neige, ça fond — il le reproduisait dans une feuille de papier qu'il découpait à sa forme.
> À travers sa fenêtre, la faiseuse de neige l'observait, et cela lui donnait du cœur à l'ouvrage. Elle confectionnait chaque flocon en se disant que, peut-être, le petit garçon rêveur verrait ce flocon précisément. Alors elle le faisait beau, pour lui, et cela la rendait heureuse.

Peut-être est-ce seulement mon imagination qui n'est pas assez ample mais, même détournés en objets à haute teneur symbolique — un cadeau, une clef, un talisman, une œuvre transgressive, etc. —, il me semble qu'il n'y a que très peu d'objets mathématiques qui puissent être inté-

grés à une histoire d'une manière qui me semble convaincante. En particulier, il faut que ça soit des objets qui aient un avatar physique, tangible. Il faut qu'ils puissent *être là* sans qu'on ait besoin de les définir.
Les objets géométriques sont de bons candidats ; pour les autres c'est plus difficile.



Des histoires pour donner aux mathématiques une dimension culturelle

Une fois qu'on a un objet — et sa fonction dans l'histoire — va-t-on enfin pouvoir expliquer ses propriétés ? Ah, non ! On n'explique rien dans une histoire, sinon on sort de l'histoire et on retombe dans l'explication recouverte de vernis. On se contente, avec la plus grande légèreté possible, d'esquisser une idée de concept.
L'histoire n'a pas vocation à remplacer un cours, un exercice ou une énigme. Elle permet autre chose. Elle permet de partager des mots et des images. Elle est un possible outil de construction d'une culture mathématique. Car la culture n'est pas constituée seulement d'éléments bien assimilés ; elle contient aussi une multitude d'images, d'idées, de mélodies, de noms et de termes rencontrés on ne sait trop où, mais que nous partageons avec nos pairs, et qui dessinent en quelques traits l'étendue et les grandes directions de la pensée humaine à l'échelle de notre société.
Les histoires servent à cela : planter des images dans les esprits, semer des idées. Elles peuvent constituer une sorte d'écrin pour des objets mathématiques, en les mettant en valeur par le rôle ou l'aura qu'elle leur prête. Or, les mathématiques sont trop absentes de la culture générale, et ce à tous les niveaux, y compris au niveau le plus superficiel. J'ai beau ne rien connaître à la peinture, je connais quand même les noms de quelques peintres célèbres ; j'ai déjà vu leurs œuvres les plus connues. Il n'y a pas d'équivalent en mathématiques, et ça manque.
Les histoires participent au premier niveau du partage, celui le plus accessible et le plus étendu, or les mathématiques peinent à investir ce niveau, pourtant crucial.

Extrait n° 2 de *La faiseuse de neige*.

À l'aide de ciseaux de plus en plus petits, la faiseuse de neige travailla longtemps. Elle travailla tout le printemps et tout l'été, sans se lasser. L'automne arriva, et elle n'avait pas terminé. Elle redoubla de rapidité et d'efficacité, et l'inquiétude commença à la gagner. Son flocon n'allait pas être prêt pour Noël. Puis, ce fut l'hiver, et le flocon n'était toujours pas achevé. La faiseuse de neige le savait : son flocon ne serait pas prêt, et le petit garçon rêveur allait à nouveau connaître un Noël sans cadeau. La tristesse qui l'envahit à cette pensée était aussi vaste que le travail qui lui restait à faire. Elle découpait, découpait ; vite et bien, elle découpait, et elle était toujours aussi triste. En ce début d'hiver il ne neigea pas à Leonberg ; au lieu de confectionner de la neige, une faiseuse de neige infiniment triste découpait en secret un grand flocon aux allures d'infini.

Récapitulons. Une histoire :

- ne permet pas de parler de n'importe quelle idée mathématique ;
- nécessite de détourner les objets mathématiques pour leur donner une fonction dans l'histoire ;
- n'autorise les explications qu'à un très faible niveau de complexité.

Au prix de ces contraintes, elle permet — on l'espère — de provoquer une rencontre marquante avec un objet mathématique.



Figure 1. *Illustration de* La faiseuse de neige *(Elis Tamula).*

Franchement, n'est-ce pas cher payé ? Toute une histoire pour semer une petite image et deux ou trois termes ?
D'abord, c'est nécessairement coûteux de sortir une discipline du langage qui lui est adapté, pour aller la glisser dans un autre langage. On perd beaucoup en cours de route, et on peine beaucoup.
Mais c'est ça, créer des ponts. Et on veut des ponts.
Ensuite, on n'est pas obligé de penser l'histoire comme une fin en soi. On peut la voir comme une porte d'entrée : un premier accès à une idée mathématique. Tout ce qu'on n'a pas voulu expliquer ou dire au sein de l'histoire, pour ne pas casser son rythme et dénaturer son cheminement, on peut le dire après, en profitant de la dynamique d'émerveillement, de curiosité ou d'enthousiasme amorcée — on l'espère — par l'histoire.
Et puis, enfin, l'histoire sert à beaucoup, beaucoup plus que cela. Certes, en termes de contenu mathématique, elle est très limitée. Mais elle offre une occasion, chose rare, de *parler des gens qui font des mathématiques*.

Des histoires pour faire voir les humains derrière les mathématiques

C'est la grande force de l'histoire : mettre en scène des personnages qui vivent des choses intéressantes. Alors, puisque les mathématiques sont intéressantes, le rôle de l'histoire sera de montrer des personnages touchants, intrigants, attirants, émouvants, en train de faire des mathématiques. Et si possible, de décrire ce qu'ils font. Et encore mieux, de nommer ce qu'ils ressentent.

Le rôle de l'histoire pourra être de susciter l'une des réactions suivantes.

- *« Ce personnage qui fait des mathématiques me ressemble, ses préoccupations me sont familières »*.
- *« Je distingue dans ses grandes lignes la nature de l'activité mathématique »*.
- *« Pour ceux qui la pratiquent, l'activité mathématique semble jalonnée d'émotions, de désirs, d'évolutions, de questionnements »*.

Si l'histoire est solide et les personnages convaincants, elle invite les auditeurs à s'identifier aux personnages principaux, c'est-à-dire à s'identifier à des personnages qui se retrouvent naturellement en train de faire des mathématiques. Même si les enfants ont tendance à s'identifier facilement (par exemple, chaque fois que je raconte un conte à des enfants, chacun imagine que les héros ont son âge), je crois qu'il est important de donner du sens à cette identification en choisissant pour les personnages principaux une quête essentielle, à laquelle chacun pourra s'associer, et à laquelle les mathématiques, d'une manière ou d'une autre, apportent une réponse naturelle et signifiante… c'est-à-dire une réponse qui ne semble pas parachutée, et qui aborde un des sujets suivants : pourquoi on se met à faire des mathématiques, quelles émotions ça nous procure, comment ça nous construit.

Par exemple, notre faiseuse de neige ne parvient pas à terminer son flocon infiniment dentelé et

se désespère, jusqu'à ce que l'enfant découvre le cadeau en préparation, s'émerveille, et l'assure que le flocon est parfait à ses yeux — qui, à ce niveau de détail, ne peuvent pas faire la différence entre fini et infini. La faiseuse de neige accepte d'offrir son cadeau non-parfait, et de cette rencontre naît une amitié entre la vieille femme et le petit garçon, qui viendra souvent l'aider à créer ses flocons.



Figure 2. *Illustration de* La faiseuse de neige *(Elis Tamula).*

Extrait n° 3 de *La faiseuse de neige*.

La faiseuse de neige hésita quelques secondes, puis elle fit signe à Johann de la suivre et se dirigea vers sa table de travail. Le flocon était posé là, pas encore déplié, avec ses milliers de détails.
Johann le contempla longuement.

- C'est magnifique ! Ça ne ressemble à rien que j'aie jamais vu.
  Il l'observa à nouveau.
- C'est comme si… c'est comme si on plongeait dedans ; on peut plonger dedans et ne jamais atteindre le fond ! Dans chaque détail on peut voir le motif entier, infiniment. Oh ! Ce flocon est parfait !
- Non, il n'est pas infini, et il n'est pas parfait. Regarde, là.
  Johann regarda, mais il ne vit rien.
- Regarde bien, le fond est là. Le découpage s'arrête.
  Je ne terminerai jamais ce flocon, je ne suis pas assez rapide.
  Une troisième larme coula sur sa joue, et se glaça.
  Johann regarda attentivement le flocon, mais il ne voyait rien.
- Vous savez, je ne suis pas faiseur de neige, moi. Mes yeux ne sont pas comme les vôtres, je ne peux pas voir des choses aussi petites. Pour moi, ce flocon est infini. Je le vois infini et je l'imagine infini. Vous devriez l'offrir à ce petit garçon, ça lui fera sûrement plaisir.
- Tu crois vraiment ?
- Oui, c'est la plus belle chose que j'aie jamais vue. Il a beaucoup de chance, ce petit garçon.

Des histoires mathématiques dans les écoles

Si elles peuvent trouver leur place dans les bibliothèques et autres lieux ou évènements culturels, il me semble que de telles histoires mathématiques ont également un rôle à jouer au sein de l'école.

Dans le premier degré, c'est évident : l'histoire est un médium privilégié pour aborder toutes sortes de sujets variés ; alors pourquoi pas les mathématiques ? En plus de tous les avantages évoqués jusqu'ici, il y en a encore un, de taille : l'écrasante majorité des enseignants du primaire sont issus de formations plutôt littéraires, avec peu de mathématiques ; ils ont donc peu de recul et d'aisance pour monter et piloter des projets originaux autour des mathématiques. Les histoires les rejoignent sur un terrain familier et maîtrisé.

Au collège ou au lycée, j'ai moins d'expérience, mais c'est sûrement possible aussi. Les contes sont pour toutes les oreilles : quand on accepte de rentrer dans leur atmosphère, même si on est adolescent, on y trouve toujours quelque chose.

Voici, toujours avec le conte *La faiseuse de neige*, un exemple d'utilisation en classe d'une histoire mathématique, en trois temps.

Premier temps : l'histoire

L'enseignant lit l'histoire, ou la joue ; ou bien des intervenants extérieurs viennent la présenter sous forme de spectacle.

Objectifs :

- provoquer des émotions positives (émerveillement, détente, identification avec le personnage) liées à un moment étiqueté comme « mathématique », que l'élève pourra invoquer tout au long de son parcours mathématique ;
- attiser la curiosité de l'élève vis-à-vis du flocon fractal infini ;
- dépasser l'opposition mathématiques-littérature.

Deuxième temps : la confection manuelle de flocons de Von Koch

Chaque enfant apprend à plier et couper un hexagone régulier dans une feuille de papier, puis à découper la fractale en itérant un même motif de découpage à échelle de plus en plus petite. Enfin, ils décorent leurs flocons. Possibilité, une fois que l'algorithme de découpage est maîtrisé, de confectionner collectivement un grand flocon fractal.



Figure 3. *Productions d'élèves de Sixième.*

Objectifs :

- permettre à l'élève de s'approprier le flocon fractal par la manipulation ;
- susciter la fierté d'avoir créé et finalisé un objet complexe, joli et étonnant ;
- lier mathématiques et beauté ;
- travailler des compétences du programme (les mesures, la symétrie, le comptage, . . .).

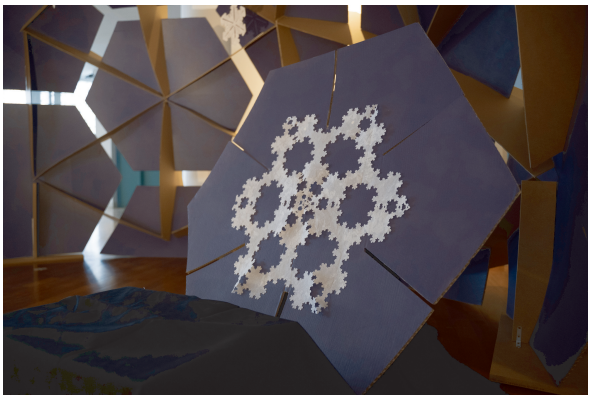


Figure 4. *Élément de décor du spectacle-conte* La faiseuse de neige.

Troisième temps : approfondissement ou ouverture

À partir d'un des éléments du conte, l'enseignant propose une réflexion ou un projet d'ouverture thématique ou d'approfondissement mathématique.

Objectifs :

- développer l'idée que les mathématiques sont en interaction avec les autres disciplines, et avec le monde extérieur ;
- montrer que les mathématiques sont vivantes et dynamiques.

Par exemple, quatre propositions d'approfondissement :

- travail sur la symétrie : reproduire un flocon de neige, deviner le motif qui va apparaître quand on déplie la feuille. Et aussi : travail sur les symétries de rotation, sur les pavages, . . .
- étude de la nature « infinie » du flocon : calcul du nombre de côtés et de la longueur total du bord du flocon après 2, 3, 4 étapes, . . ., 10 étapes, . . ., 100 étapes, . . ., une infinité d'étapes ! Trouver d'autres objets qui sont infinis de cette manière (= introduction aux suites numériques !) ;
- étude du caractère « fractal » du flocon : zoomer dans le flocon, construire une courbe de Von Koch arbitrairement grande par assemblages de petites courbes de Von Koch. Construction

d'autres fractales auto-similaires. Possibilités de programmer.
- faire le lien avec la recherche actuelle : les fractales, l'infini, les symétries sont des sujets de recherche actuels. Inviter un chercheur ou une chercheuse en mathématiques dans la classe.

Ou encore trois propositions d'ouverture :

- les flocons de neige : quelles formes ont-ils ? Comment se forment-ils ? Comment peut-on les photographier ?
- les motifs mathématiques dans la nature : symétries (les coccinelles, les fleurs, les feuilles) ; fractales (les choux romanesco, les côtes bretonnes) ; autres motifs (les pommes de pin, les tournesols)
- découverte de la figure de Johannes Kepler (scientifique du XVIIe siècle, qui a inspiré le personnage principal de l'histoire).

En guise de conclusion

J'ai essayé de présenter ici mon point de vue d'auteure : comment transmettre un message en utilisant l'histoire comme medium. Mais, pour faire une histoire, il faut deux personnes : celle qui l'écrit, et celle qui la lit. Et même parfois trois : celle qui l'écrit, celle qui la raconte, et celle qui l'écoute. Pour l'instant, j'ai beaucoup réfléchi et travaillé pour concevoir des histoires qui présentent les mathématiques comme je les vois, mais j'ai encore peu de retours de ceux et celles qui les reçoivent, et presque aucun de ceux et celles qui les relaient. Alors, si vous racontez des histoires à vos élèves ou vos enfants — mes histoires ou d'autres histoires — pour leur faire découvrir un autre visage des mathématiques, s'il vous plaît, n'hésitez pas à m'écrire pour me raconter comment elles ont été reçues, perçues, entendues.

Marie Lhuissier est professeure de mathématiques dans l'académie de Lyon et conteuse-mathématicienne. N'hésitez pas à consulter son site.

lhuissier.marie@gmail.com

© APMEP *Octobre 2021*

Muriel Grandclément, RMC et enseignante à l'école de Julie-Victoire Daubié de La Mulatière, a fait venir la conteuse Marie Lhuissier dans sa classe. Récit d'une rencontre qui a été l'occasion de belles découvertes et de travaux originaux pour les élèves.

Témoignage

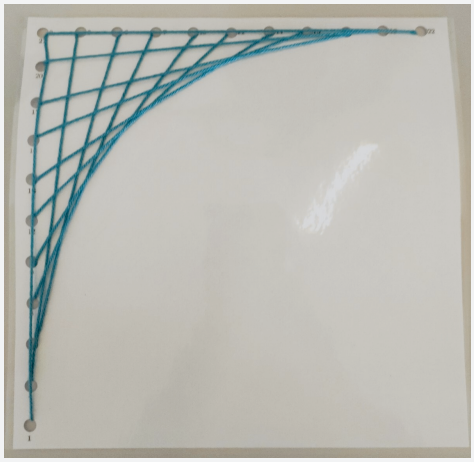
Enseignante en cycle 2 et référente mathématique de circonscription, je suis de plus en plus convaincue que c'est en proposant des activités stimulantes que les élèves pourront progresser en mathématiques. J'ai découvert le travail de Marie Lhuissier l'année dernière, grâce à la *Maison des mathématiques et de l'informatique* de Lyon. Et ses propositions m'ont tout de suite paru remplir deux fonctions : émerveiller les enfants et donner des clés pour s'engager en mathématiques. La particularité de ses contes réside, entre autres, dans leur qualité littéraire. Il ne s'agit pas de contes didactiques et pesants ; elle fait entrer les enfants dans un monde poétique, magique.

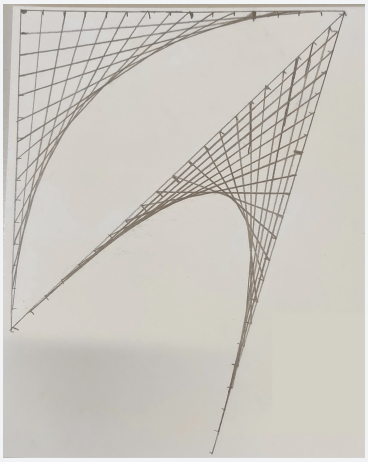
. . ./. . .

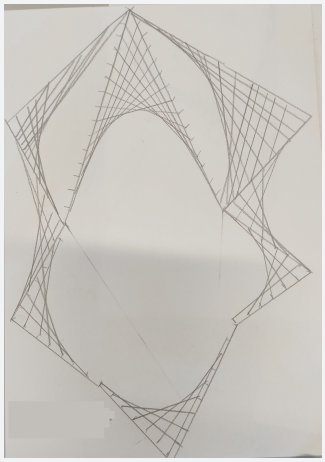
. . ./. . .



Nous avons demandé à Marie d'intervenir dans notre école et avons pu voir les élèves se passionner pour ses histoires, et se poser de nombreuses questions. Les élèves de CE1 et CE2 ont assisté au *Conte tout droit*. Dans cette histoire, le roi tout droit interdit à ses sujets de tracer des courbes, des spirales. . . Tout doit être droit ! Pourtant, deux enfants parviennent à braver l'interdit, sans transgresser la règle. Et à tracer des courbes avec des lignes droites. Les élèves ont ensuite participé à des ateliers, et ont réfléchi sur les règles en mathématiques : peut-on faire ce que l'on veut en mathématiques ? Qui décide des règles ? Les élèves ont utilisé les mathématiques pour créer à leur tour : du tissage, des tracés, pour faire apparaître des courbes en n'utilisant que des traits droits.







. . ./. . .

. . ./. . .

Pour les élèves de CM1-CM2, nous avons choisi *La clef magique*. Ce conte met en scène une petite fille qui n'abandonne pas sa recherche et apprend de ses erreurs. Les élèves ont été très sensibles à la ténacité de ce personnage et se sont identifiés à elle. L'objet qu'elle manipule, le flexagone, les a émerveillés et ils se sont attelés à la dure tâche d'en fabriquer et de modéliser le passage d'une face à l'autre.

Quel pourrait être le message derrière la recherche d'Helena à votre avis ?

- Quand elle se trompe et réessaie, il faut se tromper pour y arriver.
- Par exemple, quand un bébé apprend à marcher, il tombe, il se relève et il réessaie. Il est patient.
- Plus tu testes, plus tu as de connaissances sur la matière.
- N'abandonne jamais. Il faut se tromper pour y arriver.
- Peut-être le message : apprendre de ses erreurs. On se trompe, après on se corrige.
- Patience et force de temps font plus que force ni que rage : elle patiente tant qu'elle a quand même réussi à trouver la solution.

Dans les classes, pendant les semaines qui ont suivi les contes, nous avons vu les enfants créer de façon autonome des courbes avec des droites, chercher comment fabriquer d'autres flexagones, ou encore essayer de repérer des éléments mathématiques dans leur environnement. . .
Cet éveil de la réflexion et ce goût pour l'activité intellectuelle me paraissent fondamentaux pour faire aimer les mathématiques et pour faire progresser les élèves. Et les contes de Marie Lhuissier y contribuent. Ils s'adressent à tous en restant exigeants ; ils donnent des clés pour comprendre la magie, et devenir magicien.

muriel.grandclement@ac-lyon.fr

Avec le puzzle de Marine

Trouver des situations qui permettent aux élèves de faire des tracés tout en se creusant le neurone géométrique n'est pas toujours chose aisée. Pour Au fil des maths, *François Drouin vous en propose ici un exemple, à partir d'un puzzle, décliné en exercices variés et qui font réfléchir.*

François Drouin

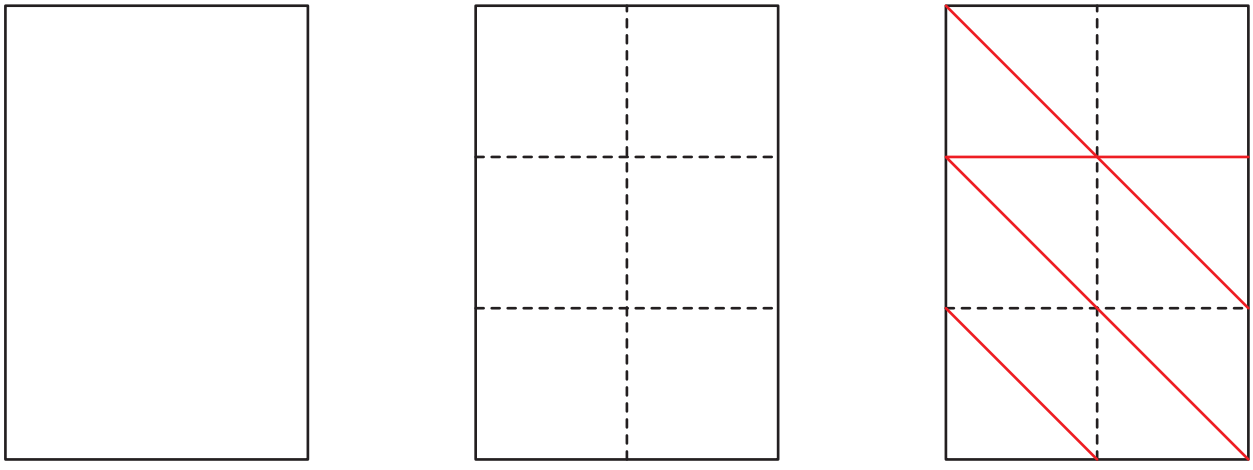
Le puzzle apporté en classe par une de mes élèves, Marine, a fait l'objet d'un chapitre entier dans la brochure *Jeux École 1*. Pour faciliter le travail des collègues pendant le confinement en 2020, celui-ci a été mis en ligne en téléchargement gratuit [1] sur le site de l'APMEP parmi d'autres ressources offertes. La lecture de ce document et les indications de page mis dans cet article permettent de retrouver facilement les activités évoquées.

Cet article veut montrer qu'elles sont toujours d'actualité, en lien avec cet extrait des programmes actuels en vigueur au cycle 3 [2].

> *Les activités géométriques pratiquées au cycle 3 s'inscrivent dans la continuité de celles fréquentées au cycle 2. Elles s'en distinguent par une part plus grande accordée au raisonnement et à l'argumentation qui complètent la perception et l'usage des instruments.*

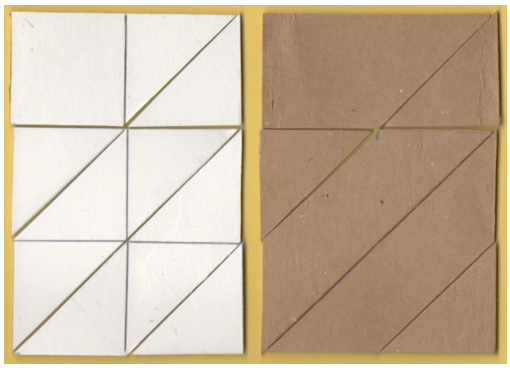
Activités préalables

Construction du puzzle



1. Ce fichier est resté accessible sur le site de l'APMEP ; il suffit de suivre ce lien : . Dans cet article toutes les indications de page font référence à ce fichier.

Ces trois étapes peuvent être proposées aux élèves sans commentaires. Ceux-ci sauront se persuader que le premier dessin est un rectangle (« *avec l'équerre, je vérifie qu'il a quatre angles droits* ») et que ce rectangle est partagé en six carrés de même dimension (les longueurs égales seront vérifiées à l'aide du compas). Le découpage selon les traits rouges permet d'obtenir les six pièces du puzzle.

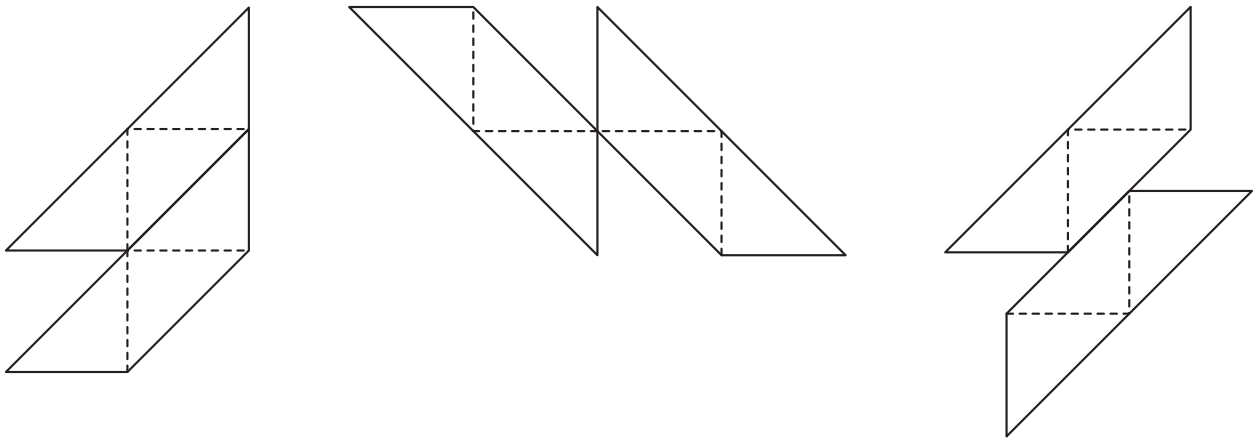


Dessinés sur du carton de récupération issu d'emballages divers, le coût est minime.
Il faut cependant demander de quadriller les deux faces du rectangle car les **pièces sont retournables**.
Lors des expérimentations, les carreaux visibles sur les pièces avaient 4 cm de côté.

Le puzzle apporté par l'élève n'était pas quadrillé, il l'est rapidement devenu pour faciliter la trace écrite des élèves et leurs échanges de réalisations. En devenant un outil pour faciliter la résolution de problèmes de tracés géométriques, ce quadrillage a été conservé.

Règles de juxtaposition

OUI *OUI* *NON*

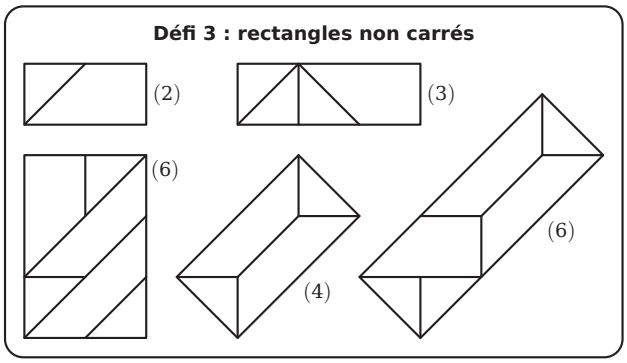


Les segments du quadrillage se prolongent donc d'une pièce à l'autre lors de leur tracé dans le rectangle puis lors de leur utilisation.
Des segments peuvent se prolonger autant qu'on peut, de chaque côté, donnant en situation et sans le dire une idée de ce qu'est une droite. Ces contraintes doivent être assimilées par les élèves avant de commencer les manipulations des pièces.

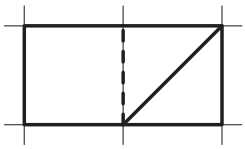
Premières manipulations

Celles-ci peuvent ne pas être faites en classe entière, les élèves ayant été habitués dès la fin du cycle 2 à reproduire des dessins sur quadrillage pourront reproduire ce qu'ils ont trouvé en vue d'utilisations futures ou d'échanges entre élèves.

Les activités 3 (page 5) et 4 (page 6) du document téléchargeable proposent la recherche de triangles, de carrés, de rectangles et de parallélogrammes réalisés en utilisant certaines pièces du puzzle.
Il reste à imaginer le quadrillage dans ces différentes solutions.

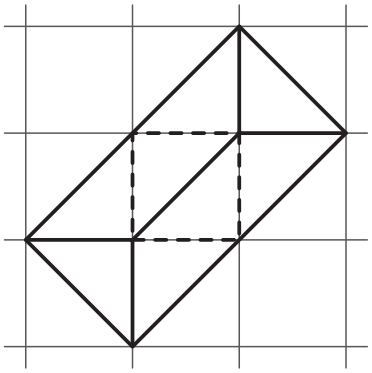


Exploitation des dessins des élèves



Les angles droits des carreaux du quadrillage permettent d'être certain que le quadrilatère obtenu a quatre angles droits : c'est donc un rectangle.

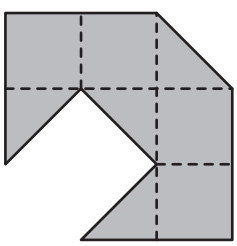
Pour ce dessin, on utilisera le fait que les diagonales des carreaux du quadrillage déterminent deux demi-angles droits. Deux demi-angles droits accolés forment un angle droit.
Le quadrilatère obtenu a quatre angles droits : c'est donc un rectangle.

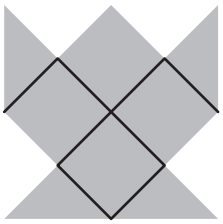


Le quadrillage et ses propriétés sont des outils géométriques mis à disposition de l'élève. Nous quittons la géométrie perceptive pour la géométrie instrumentée.

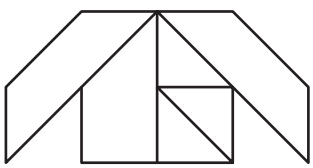
D'autres manipulations

Les élèves habitués avec ces premières manipulations pourront, pendant des temps d'autonomie par exemple, explorer les recouvrements proposés dans les activités 9 (page 11), 25 (page 27) et 26 (page 28).





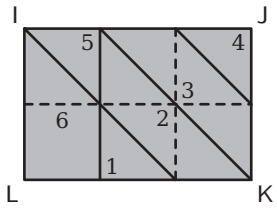
Une tête couronnée



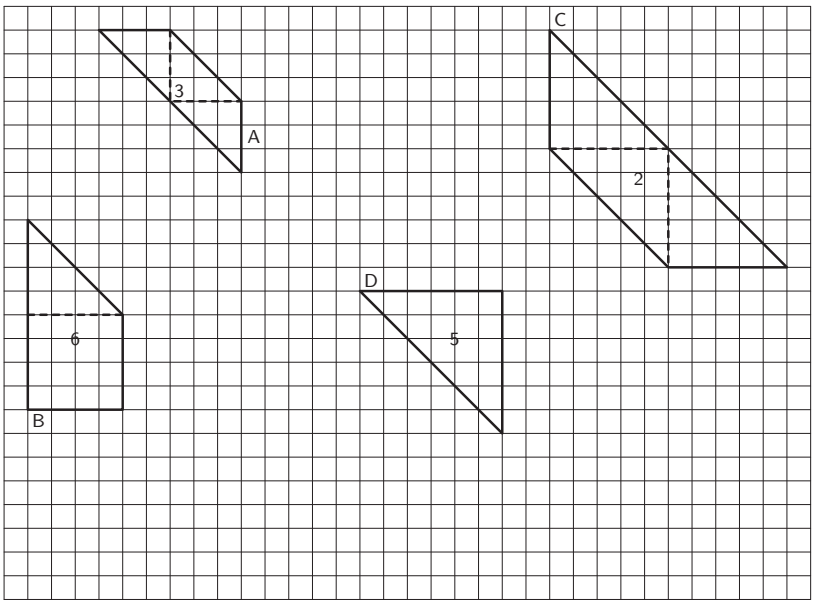
Un tee-shirt

L'exploitation des solutions proposées dans l'activité 26 peut se faire dès le cycle 2. Ces manipulations permettent aux élèves de se familiariser avec les images mentales des pièces. Celles-ci seront utiles lors des problèmes de constructions géométriques abordés par la suite.

Tracés proposés dans le document : activités 18 (page 20) et 19 (page 21)

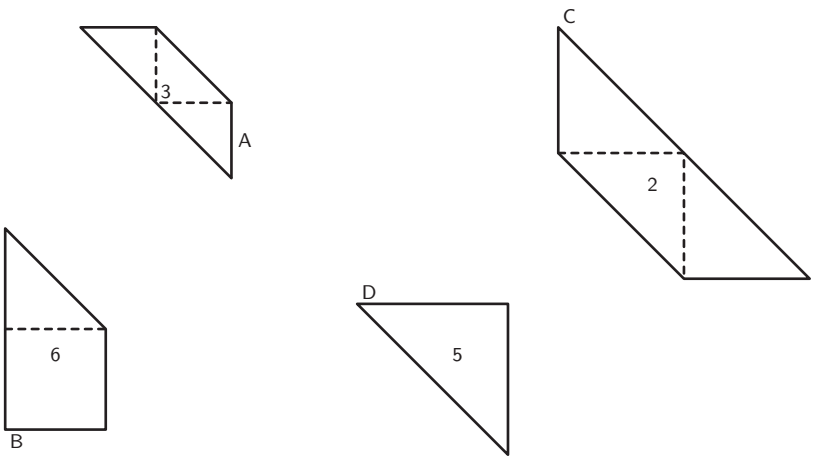


Les pièces du puzzle de Marine, numérotées de 1 à 6, sont rangées dans leur boîte comme indiqué ci-contre. Elles ont été agrandies et rangées toujours de la même façon dans les boîtes A, B, C, D et E. La pièce 3 a déjà été placée dans la boîte A.
Commence par tracer le contour de la boîte A, puis le contour des pièces. Fais de même pour les boîtes B, C, D et E en observant bien les numéros des pièces déjà placées.



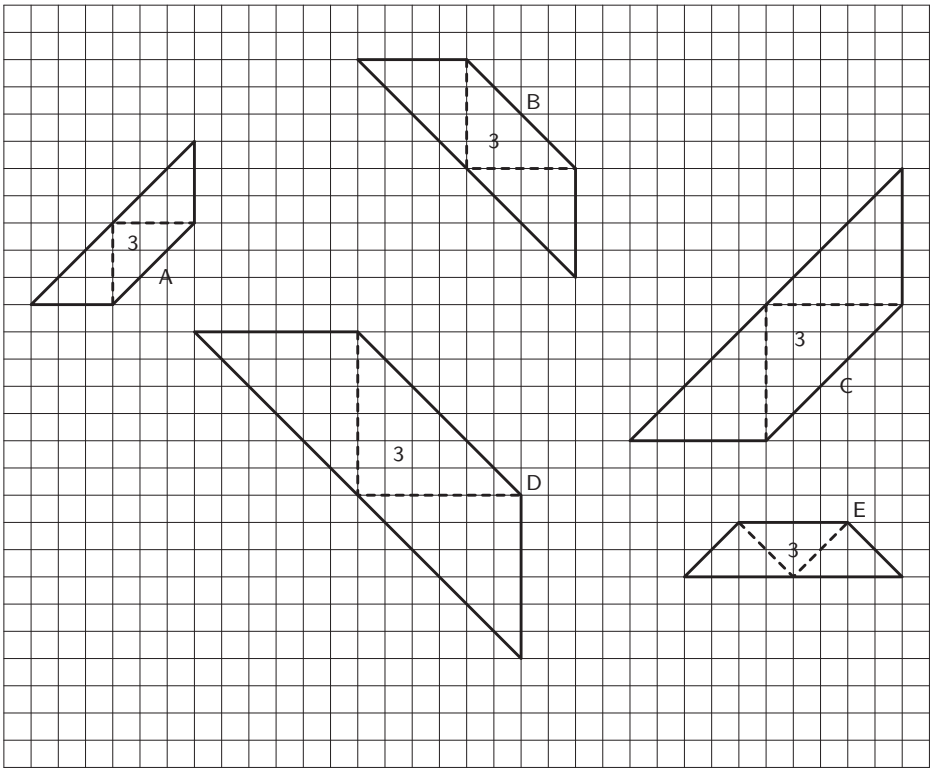
Dans le document ci-dessus, un côté de carreau du quadrillage des pièces correspond à trois, quatre, cinq ou six côtés de carreau du quadrillage proposé aux élèves. Le rectangle contour de la boite sera alors dessiné à l'aide du dessin de la pièce déjà placée.

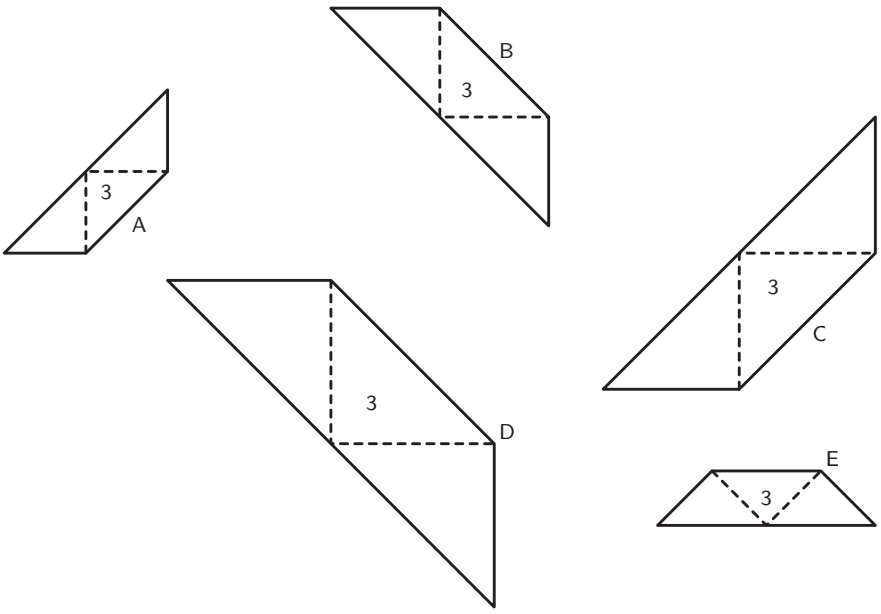
Dans le dessin ci-dessous, le compas sera utilisé pour les reports de longueurs. Les rectangles à tracer auront pour dimensions 2 et 3 côtés de carreau du quadrillage présent sur les pièces déjà dessinées ; le gabarit d'angle droit et la règle non graduée seront alors aussi utilisés.



Tracés proposés dans le document : activités 15 (page 17) et 16 (page 18)

Pour ces deux activités, le rangement des pièces à reproduire est le même que celui des activités 18 et 19. Cependant les pièces sont disposées différemment.

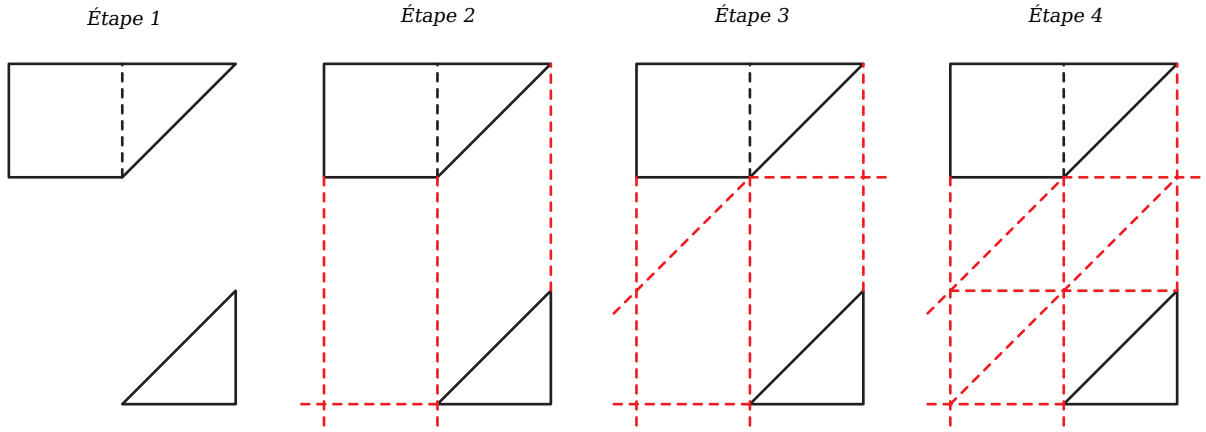




L'élève devra anticiper le dessin du rectangle à dessiner ; si besoin, il pourra tourner sa feuille de travail pour la reproduction de la pièce E et les diagonales des carreaux seront sollicitées.

Utiliser la règle non graduée parmi d'autres instruments de géométrie pour des tracés permet à l'élève de se poser des questions à propos de reconstructions de figures. Cette piste de travail est actuellement poursuivie en Lorraine. Les deux activités qui suivent (voir annexes) sont extraites d'un document téléchargeable [3].

À propos du premier dessin proposé en annexe 1

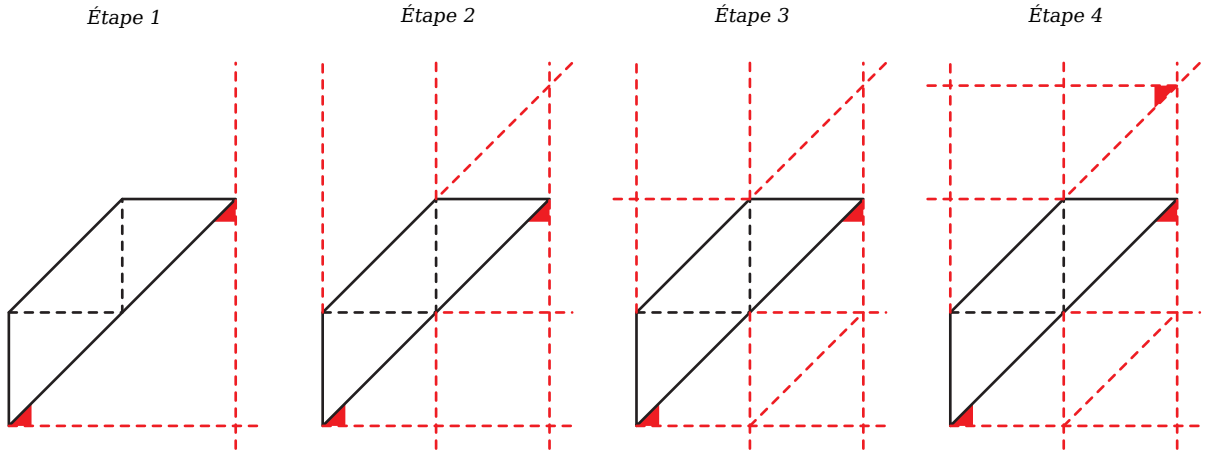


Des alignements doivent être recherchés, les points nécessaires pour continuer les tracés doivent être anticipés comme intersection de deux lignes, et pour réussir, il faudra prolonger certains segments.

Le quadrillage faisant partie des pièces du puzzle, celui-ci doit être reproduit. Demander le nombre de lignes droites tracées permet d'introduire un temps d'échange entre élèves pour réfléchir au nombre minimum de tracés nécessaires.

Les tracés des étapes 2 et 3 peuvent être faits dans un ordre différent. Ceux faits lors de l'étape 4 utilisent des points obtenus aux étapes précédentes.
Il est conseillé de demander aux élèves de colorier chaque pièce du puzzle. Cela leur permettra de s'assurer de les reconnaître parmi tous les tracés.

À propos du deuxième dessin proposé en annexe 2



Les recherches d'alignements, de nouveaux points à tracer ainsi que de segments à prolonger sont encore présentes.

Pour ce deuxième dessin, le quadrillage des pièces doit également être reproduit. Un défi à lancer aux élèves sera de trouver le nombre minimum d'utilisations des deux instruments proposés. Pour cette construction, le gabarit de demi-angle droit est utilisé trois fois. Des tracés ne l'utilisant qu'une fois ou deux fois sont possibles.

Terminons par quelques conseils pratiques :

- le gabarit de demi-angle droit sera obtenu avec les angles aigus de certaines équerres ;
- les règles non graduées pourront être découpées dans des lattes de bois achetées pour une somme modique dans un magasin de bricolage.

Ressources en ligne

[1] *La page d'accès au* Puzzle de Marine école. Sur le site national de l'APMEP : .

[2] Eduscol. *Programme du cycle 3.* . 2020.

[3] *Un document du groupe* Jeux *de la régionale de Lorraine.* Sur son site : .

[4] *Le début d'un abécédaire ?* Sur le site national de l'APMEP : .

[5] *Des reports de longueur pour comparer des périmètres.* Sur le site national de l'APMEP : .

[6] *Des formes imaginées par des élèves de Sixième à destination en particulier d'élèves de Cours Moyen avec lesquels ils échangeaient.* Sur le site de la régionale de Lorraine : .

[7] *Des formes imaginées par de futurs Professeurs des Écoles pendant leur temps de formation.* Sur le site de la régionale de Lorraine : .

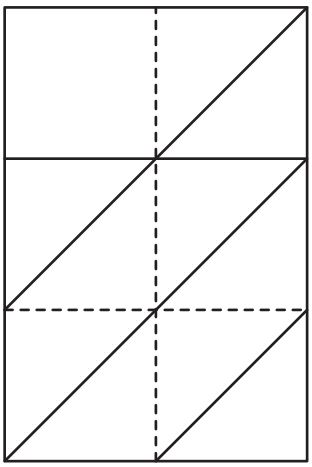
Adhérent depuis ses premières années d'enseignement dans un collège de Meuse, François Drouin a terminé sa carrière professionnelle à l'IUFM de Lorraine pour former de futurs enseignants des premier et second degrés. Il est un participant convaincu du groupe « Jeux et mathématiques » de l'APMEP et anime le réseau « Jeux » de la régionale de Lorraine.

francois.drouin2@wanadoo.fr

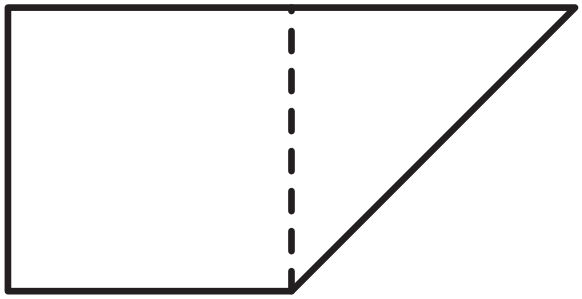
© APMEP *Octobre 2021*

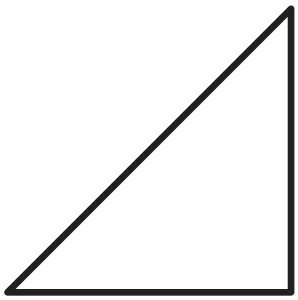
Annexe 1 : le rectangle

Le dessin ci-contre représente le rectangle construit avec les pièces du puzzle de Marine.



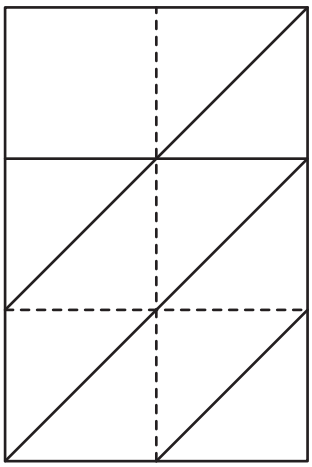
En utilisant uniquement la règle non graduée, dessine les trois pièces non encore dessinées pour obtenir le rectangle.
Combien as-tu tracé de lignes droites ?



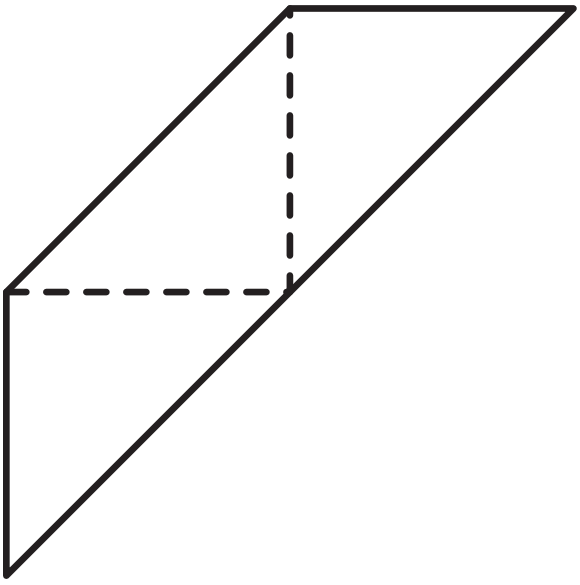


Annexe 2 : le rectangle

Le dessin ci-contre représente le rectangle construit avec les pièces du puzzle de Marine.



En utilisant uniquement la règle non graduée et un gabarit de demi angle droit, dessine les cinq pièces non encore dessinées pour obtenir le rectangle.
Combien as-tu tracé de lignes droites et de demi-angles droits ?



Le jeu du manchon

Un principe tout simple pour un maximum d'efficacité, un jeu exploitable pour faire de la géométrie du cycle 1 au cycle 3 : voici le jeu du manchon !

Thérèse Escoffet & Christine Oudin

Genèse du jeu

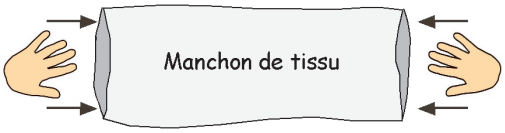
En 2005, nous avons créé un jeu avec l'idée de faire reconnaître, uniquement au toucher, des formes géométriques et de permettre aux enfants de se créer des images mentales de divers concepts géométriques. Au Salon de la Culture et des Jeux Mathématiques, nous avons fait jouer de nombreux enfants au jeu du manchon (avec nos jeux fabriqués artisanalement), avec un très vif succès qui ne s'est pas démenti depuis.

En 2011-2012, l'un des groupes de travail, initiés par Serge Clément (DASEN du département de l'Aube jusqu'à la rentrée 2012), a pris pour thème la géométrie et en particulier l'utilisation des jeux géométriques en classe.
Ce groupe était constitué de cinq PEMF (Professeur des Écoles Maître Formateur), Laurence Clément, Catherine Iglesias, Pascale Savoyini, Christine Soyer, Valérie Vittori, et de Thérèse Escoffet formatrice à l'IUFM.
Elles ont travaillé sur les différents textes parus sur le jeu à l'école (dont la circulaire de janvier 2012). Elles ont cherché à rendre accessible l'utilisation pédagogique des jeux en classe. Plusieurs jeux ont été analysés et expérimentés avec leurs élèves. Il en est résulté une grosse évolution et amélioration du jeu du manchon.

Le jeu du manchon pose problème car il suppose de disposer de pièces de jeu en matériau manipulable par les élèves (et il n'est pas toujours aisé pour un enseignant de se fabriquer le jeu…). Serge Clément ayant trouvé ce jeu très intéressant a voulu favoriser sa fabrication et a mis Thérèse Escoffet en contact avec Gilles Lécuyer, qui enseignait alors en menuiserie au lycée des Lombards à Troyes. À la rentrée de septembre, Gilles, en poste au collège Eurêka, fédère plusieurs collègues de la SEGPA et plusieurs classes, chacune avec sa spécificité, pour fabriquer le jeu… Et c'est une belle réussite puisque dix jeux en bois ont été fabriqués.
Depuis, le jeu a été présenté à différents éditeurs de jeux sans succès.



Description du jeu



Ce jeu « tactile » est prévu pour des enfants à partir de 4 ans. Chaque enfant dispose d'un manchon de tissu contenant des formes géométriques en bois ou en plastique. *Pour un tri et rangement plus faciles du jeu, chaque manchon contient des formes d'une seule couleur, différente de celle des formes des autres manchons.*

L'objectif est de reconnaître au toucher une forme géométrique le plus rapidement possible.

Règle du jeu n° 1

Une carte représentant l'une des formes est présentée aux enfants ; le premier à la retrouver dans son manchon, uniquement au toucher, prend la carte.
Le gagnant est le joueur qui a le plus de cartes, à la fin de la partie.





Les enfants jouent au Salon. . .



et même les adultes !

Variables didactiques

On peut varier le nombre de formes (parmi les vingt-sept possibles) et le type de formes à mettre dans les manchons selon l'âge des enfants et l'objectif pédagogique visé :

- plus ou moins de formes (mais en garder un minimum de douze) ;
- plus ou moins de triangles (ne pas hésiter à glisser des triangles quelconques dès le CP et même la Maternelle) ;
- plus ou moins de quadrilatères (ne pas hésiter à glisser des quadrilatères quelconques dès le CP et même la Maternelle).

Le jeu de base (règle n° 1) permet essentiellement de travailler la compétence « reconnaître » les formes géométriques, mais en adaptant cette règle, on peut faire travailler la compétence « reproduire » et la compétence « utiliser le vocabulaire géométrique » (voir plus loin le paragraphe « Comment utiliser le jeu du manchon avec sa classe ? »).

Variantes

Règle du jeu n° 2

- Un poster avec toutes les formes est affiché au tableau.
- Mettre une seule forme dans le manchon. L'élève qui a le manchon tâte la forme et la décrit aux autres. Ils doivent la reconnaître sur le poster en la nommant.

Règle du jeu n° 3

- Un poster avec toutes les formes est affiché au tableau.
- Mettre une seule forme dans le manchon. L'élève qui a le manchon tâte la forme et ne répond que par oui ou par non. Les autres le questionnent (questions fermées) pour identifier la forme sur le poster.

Règle du jeu n° 4

Cette règle se joue en solitaire.

Mettre une seule forme dans le manchon. L'élève qui a le manchon tâte la forme aussi souvent qu'il veut et doit la reproduire en pâte à modeler.

Règle du jeu n° 5

Mettre une seule forme dans le manchon. L'élève qui a le manchon tâte la forme et la décrit aux autres. Ils doivent la reproduire en pâte à modeler.

Règle du jeu n° 6

Mettre une seule forme dans le manchon. L'élève qui a le manchon tâte la forme et la décrit aux autres. Ils doivent la reproduire sur papier (uni, quadrillé ou pointé), à main levée ou avec les instruments.

Règle du jeu n° 7

Mettre une seule forme dans le manchon. L'élève qui a le manchon tâte la forme et ne répond que par oui ou par non. Les autres le questionnent (questions fermées) pour reproduire la forme sur papier (uni, quadrillé ou pointé), à main levée ou avec les instruments.

Règle du jeu n° 8

Cette règle se joue à deux.

- Chacun des deux joueurs glisse dans le manchon de l'autre une forme de son choix.
- Chaque joueur tâte ensuite la forme qui est dans son manchon et doit dessiner ce qu'il a senti dans sa main, sur papier (uni, quadrillé ou pointé), à main levée ou avec les instruments.
- Puis, les deux joueurs valident chaque dessin en sortant la forme correspondante du manchon.

Cette dernière règle permet à l'enseignant un travail avec les élèves sur la validation : à partir de quand décide-t-on si c'est valide ou pas ?. . .

Comment utiliser le jeu du manchon avec sa classe ?

Légende : R_i, règle du jeu n° i.

	Vous souhaitez travailler par **COMPÉTENCES** (rappelées en annexe page 122)		
	« reconnaître »	**« reproduire »**	**« vocabulaire géométrique »**
	R_1 R_2 R_3	R_4 R_5 R_6 R_7 R_8	R_2 R_3 R_5 R_6 R_7
Cycle 1	R_1 R_2 R_3	R_4 R_5	R_2 R_3
Cycle 2		R_4 R_5 R_6 R_7 R_8 (éventuellement dessin à main levée)	R_2 R_3 R_5 R_6 R_7 (éventuellement dessin à main levée)
Cycle 3	R_1 R_2 R_3 (pour élèves en difficulté)	R_4 R_5 R_6 R_7 R_8	R_2 R_3 (pour élèves en difficulté) R_5 R_6 R_7

	Vous souhaitez travailler avec un **DISPOSITIF DE CLASSE PARTICULIER**			
	jouer seul	**jouer à 2 joueurs**	**jouer à 3, 4 ou 5 joueurs**	**jouer en groupe classe**
	R_4	R_1 R_2 R_3 R_5 R_6 R_7 R_8	R_1 R_2 R_3 R_5 R_6 R_7	R_2 R_3 R_6 R_7
Cycle 1	R_4	R_1 R_2 R_3 R_5	R_1 R_2 R_3 R_5	R_2 R_3
Cycle 2		R_1 R_2 R_3 R_5 R_6 R_7 R_8 (dessin éventuellement à main levée)	R_1 R_2 R_3 R_5 R_6 R_7 (dessin éventuellement à main levée)	R_2 R_3 R_6 R_7 (dessin éventuellement à main levée)
Cycle 3		R_1 R_2 R_3 (pour élèves en difficulté) R_5 R_6 R_7 R_8	R_1 R_2 R_3 (pour élèves en difficulté) R_5 R_6 R_7	R_2 R_3 (pour élèves en difficulté) R_6 R_7

Prolongement

Depuis, grâce à l'imprimante 3D, nous avons pu réaliser un vieux rêve, le jeu du Manchon 3D !

Vous pouvez récupérer les programmes pour imprimer vous aussi les pièces (fichiers `zip` contenant des fichiers `stl`) :

- pièces 2D : ;
- pièces 3D : .





Les formes présentes dans ces manchons.



Au Salon, les enfants l'ont testé !

Thérèse Escoffet et Christine Oudin sont retraitées de l'Éducation nationale et membres actives du groupe « Jeux et mathématiques » de l'APMEP.

th.escoffet@orange.fr
christine.oudin@hotmail.fr

© APMEP *Octobre 2021*

Annexe : rappel des compétences du programme travaillées et mises en œuvre

Cycle 1 (BO 2015)	Très tôt, les enfants regroupent les objets, soit en fonction de leur aspect, soit en fonction de leur utilisation familière ou de leurs effets. À l'école, ils sont incités à « mettre ensemble ce qui va ensemble » pour comprendre que tout objet peut appartenir à plusieurs catégories et que certains objets ne peuvent pas appartenir à celles-ci. Par des observations, des comparaisons, des tris, les enfants sont amenés à mieux distinguer différents types de critères : forme, longueur… Ils apprennent progressivement à reconnaître, distinguer des solides puis des formes planes. L'enseignant est attentif au fait que l'appréhension des formes planes est plus abstraite que celle des solides et que certains termes prêtent à confusion (carré/cube). L'enseignant utilise un vocabulaire précis (cube, boule, pyramide, cylindre, carré, rectangle, triangle, cercle ou disque — à préférer à « rond ») que les enfants sont entraînés ainsi à comprendre d'abord puis à utiliser à bon escient, mais la manipulation du vocabulaire mathématique n'est pas un objectif de l'école maternelle. **Attendus des enfants à la fin de l'école maternelle** • Classer des objets en fonction de caractéristiques liées à leur forme. Savoir nommer quelques formes planes (carré, triangle, cercle ou disque, rectangle) et reconnaître quelques solides (cube, pyramide, boule, cylindre). • Classer ou ranger des objets selon un critère de longueur ou de masse ou de contenance. • Reproduire, dessiner des formes planes.
Cycle 2 (BO 2018)	• Décrire, reproduire sur papier quadrillé ou uni des figures… • Reconnaître, nommer les figures usuelles : carré, rectangle, triangle, triangle rectangle, polygone, cercle, disque. • Décrire à partir des côtés et des angles droits un carré, un rectangle, un triangle rectangle. Vocabulaire approprié pour décrire les figures planes usuelles : • carré, rectangle, triangle, triangle rectangle, polygone, côté, sommet, angle droit ; • cercle, disque. Propriétés des angles et égalités de longueur des côtés pour les carrés et les rectangles.
Cycle 3 (BO 2018)	Reconnaître, nommer, décrire des figures simples ou complexes (assemblages de figures simples) : • triangles, dont les triangles particuliers (triangle rectangle, triangle isocèle, triangle équilatéral) ; • quadrilatères, dont les quadrilatères particuliers (carré, rectangle, losange, première approche du parallélogramme) ; • cercle (comme ensemble des points situés à une distance donnée d'un point donné), disque. Reconnaître, nommer, décrire des solides simples ou des assemblages de solides simples : cube, pavé droit, prisme droit, pyramide, cylindre, cône, boule. Vocabulaire associé à ces objets et à leurs propriétés : côté, sommet, angle, diagonale, polygone, centre, rayon, diamètre, milieu, hauteur, solide, face, arête. Reproduire, représenter, construire des figures simples ou complexes (comme assemblages de figures simples). Réaliser, compléter et rédiger un programme de construction d'une figure plane.

Ressources pour un professeur des écoles

Voici une sélection de ressources bien utiles à tout professeur des écoles ! Bonne (re)découverte !

Agnès Gateau

Publimath, base bibliographique sur l'enseignement des mathématiques

Cette base de données dispose de son propre moteur pour rechercher les articles et sites définis par un travail éditorial (elle ne répertorie donc pas les blogs) à partir des occurrences fournies par l'utilisateur. Les ressources mises à disposition montrent une pluralité de points de vue, utile à l'exercice des capacités de choix des enseignants. C'est un outil formidable pour retrouver des articles déjà lus, distinguer des voies les plus appropriées, et prendre connaissance de pépites inconnues !

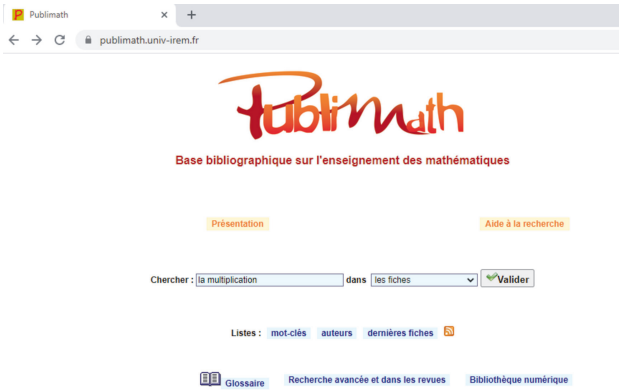


Figure 1. *Exemple de recherche de ressources par le mot-clé « multiplication ».*

Les mercredis de l'APMEP

Ce rendez-vous, à distance, constitue un espace dédié aux questions de l'enseignement des maths à l'école primaire pour les enseignants, les formateurs, les chercheurs, les animateurs de la médiation scientifique. À partir d'un calendrier disponible sur le site de l'APMEP, il est possible de rejoindre le salon dans lequel a lieu la discussion du jour, le mercredi à partir de 17 heures, sauf programmation exceptionnelle.

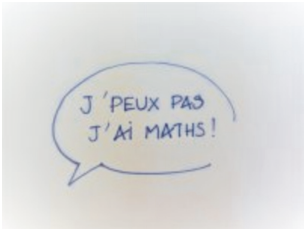


Figure 2. *Les mercredis de l'APMEP.*

IREM *Grand* ℕ

La revue bisannuelle *Grand* ℕ propose des articles et comptes rendus de recherche sur la didactique de l'enseignement des mathématiques (depuis 1973) et des autres disciplines scientifiques (depuis 1990) à l'école primaire. Le sommaire des plus récents numéros est entièrement disponible sur le site, ainsi que l'ensemble des articles de plus de deux ans. 600 articles sont ainsi directement accessibles.



Figure 3. *Couverture du* Grand ℕ *n° 106 (2020).*

Losanges, revue de la SBPM

Ce périodique trimestriel est édité par la Société Belge des Professeurs de Mathématiques d'expression française. Il propose des articles qui concernent l'enseignement et la culture mathématique du primaire au supérieur. Il déploie quatre rubriques : *Réflexions*, *Technologies*, *Jeux et concours*, *Regards sur*... Souscrire une adhésion couplée APMEP/SBPM permet de recevoir chaque nouveau numéro à sa parution. Les anciennes publications sont « libérées » après deux ans et disponibles sur le site.

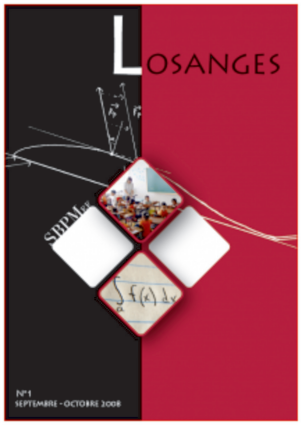


Figure 4. Losanges.

Ressources du CREM

Le Centre de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques est une communauté belge francophone de chercheurs en didactique des mathématiques. Cette institution met à disposition des enseignants des publications et des logiciels libres, dont Apprenti Géomètre, un logiciel de géométrie dynamique spécialement créé pour l'école primaire. D'une manipulation très intuitive, ce logiciel servira l'enseignement de la géométrie mais aussi des grandeurs et mesures.



Figure 5. *Apprenti Géomètre (CREM).*

Ressources « Papiers Crayons » IREM de Paris-Nord

On trouvera ou on commandera sur le site de l'IREM de Paris-Nord, la brochure *Papiers Crayons*. Elle propose des activités de reproduction géométrique sur différents réseaux (de points, quadrillages, mailles hexagonales, etc.) ainsi que des problèmes de constructions à la règle et au compas. Tout pour réaliser des recherches en groupe classe, en groupes restreints ou en autonomie.



Figure 6. *Couverture de la brochure* Papiers Crayons.

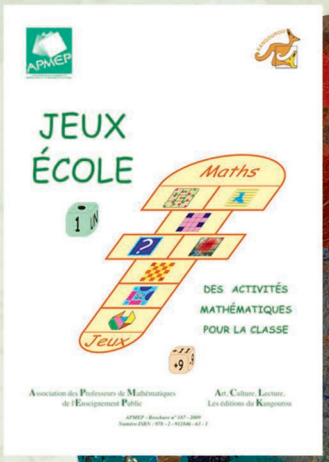
Agnès Gateau est enseignante à l'école élémentaire d'Étigny (89). Elle est aussi membre de la commission *Premier degré* de l'APMEP.

agnesgateau@gmail.com

© APMEP *Octobre 2021*

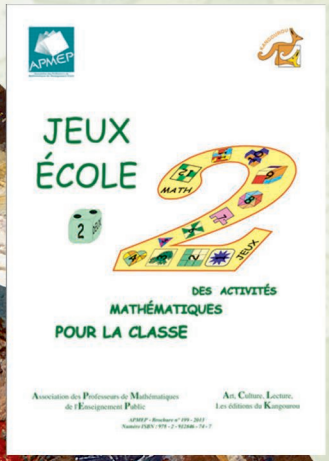
Jeux École 1
Cycles 2 et 3

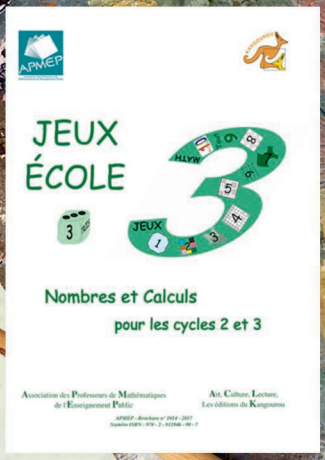
Des activités numériques, des activités géométriques et des activités mêlant différents domaines présentées dans 22 jeux



Jeux École 2
Cycles 2 et 3

Des activités numériques, géométriques, dans le plan et dans l'espace pour décrire, positionner et manipuler en donnant du sens





Jeux École 3
Nombres et calculs
Cycles 2 et 3

Neuf activités et jeux avec des supports variés et des modalités différentes pour calculer, mémoriser, se repérer, s'engager dans une démarche, expérimenter et résoudre des problèmes.



Jeux Écollège 4
Algorithmique & raisonnement
Cycles 2, 3 et 4

Huit dossiers proposés pour respecter une règle, coder, décoder, s'orienter, se repérer, se déplacer, représenter et programmer des déplacements, organiser des données multiples, suivre un programme, contrôler, faire des essais... en résumé développer une démarche rigoureuse et raisonnée.

Trois jeux de la brochure *Jeux Écollège 4*

L'APMEP est une association active, qui édite de nombreuses ressources, dont certaines pour l'école primaire. En particulier, notre groupe « Jeux » produit des brochures de jeux clés en main, pensées pour la classe, pour faire de (vraies) mathématiques en s'amusant. Tout le matériel est fourni et photocopiable. Découvrez ci-dessous le tout dernier opus, sorti en 2020.

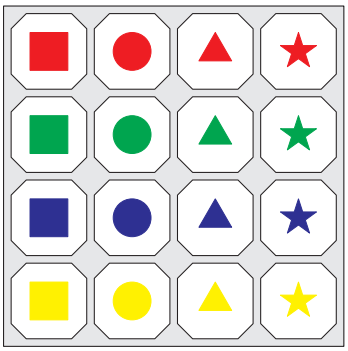
Françoise Bertrand

Jeux Écollège 4 « algorithmique et raisonnement », la nouvelle brochure jeux de l'APMEP, est sortie en octobre 2020. Elle comporte huit dossiers composés de fiches directement utilisables, accompagnées des solutions. Au début de chaque dossier, les objectifs et progressions sont explicités et les liens avec les programmes et compétences sont précisés. Je vous invite à découvrir des extraits de trois des huit dossiers proposés dans cette brochure.

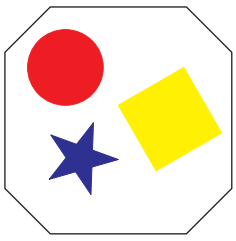
Trois sans quatre

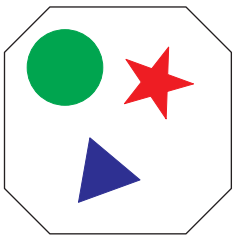
Ce jeu de cartes est une variante mathématique du jeu « Pippo » *édité par Gigamic. Observer, analyser, classer, telles sont les compétences qui peuvent être mises en œuvre de façon ludique dès le cycle 2.*

Quatre formes : carré, triangle, disque, étoile.
Quatre couleurs : bleu, jaune, rouge et vert.

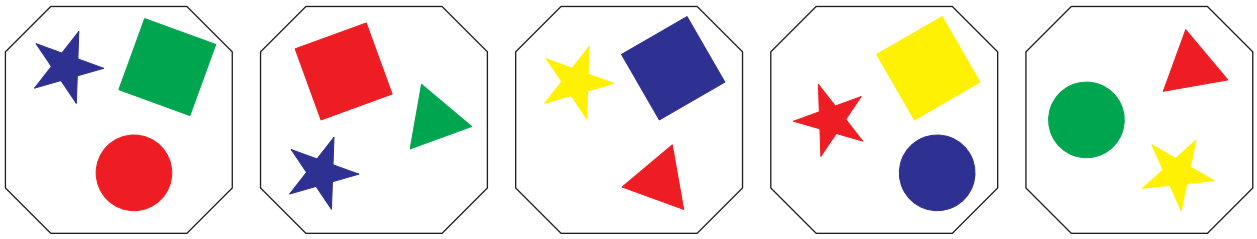


Sur chaque carte, trois formes sont présentes, toutes de couleurs différentes. Il s'agit de repérer la forme manquante dans la couleur manquante.
Par exemple, sur la première carte, il manque le triangle vert et sur la deuxième le carré jaune.





Voici quelques autres cartes parmi les 96 cartes possibles :



Vu le nombre de cartes, on peut faire jouer par exemple quatre groupes d'élèves avec 24 cartes pour chaque groupe.

Indépendamment de l'activité « jeu » elle-même qui est très formatrice, on peut proposer aux élèves :

- de classer librement ou selon un critère imposé un certain nombre de cartes qu'on leur aura données ;
- de créer de nouvelles cartes, autres que celles qu'ils ont entre les mains, après leur avoir expliqué et fait exprimer le principe.

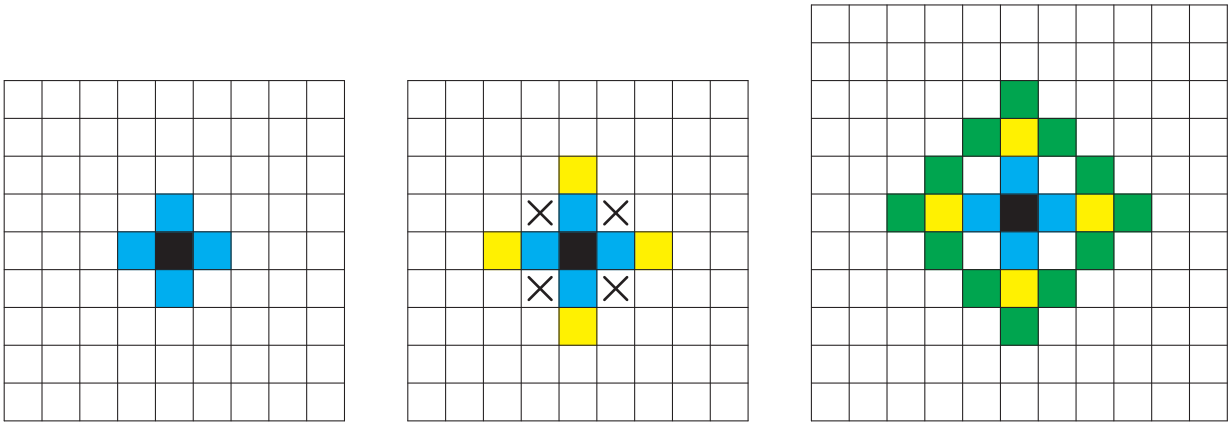
Frises évolutives

Sur différents réseaux quadrillés, il s'agit de colorier, en respectant une règle, des cellules de génération en génération. Respecter une règle choisie est bien sûr contraignant et demande une grande attention.

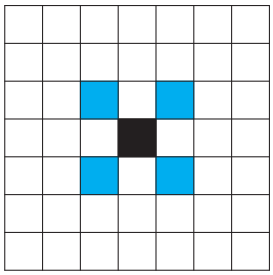
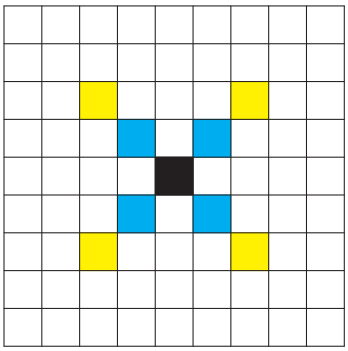
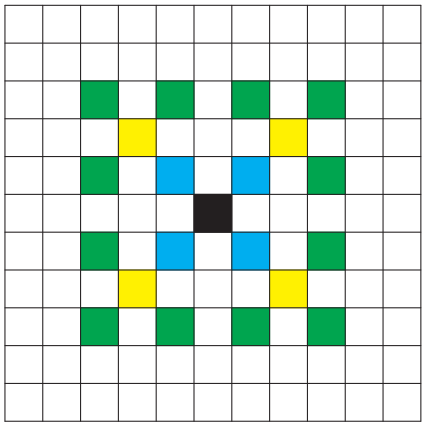
Voici un exemple sur un réseau carré.

La case noire est la case origine et les cellules d'une même génération sont de la même couleur. Deux règles de naissance sont proposées.

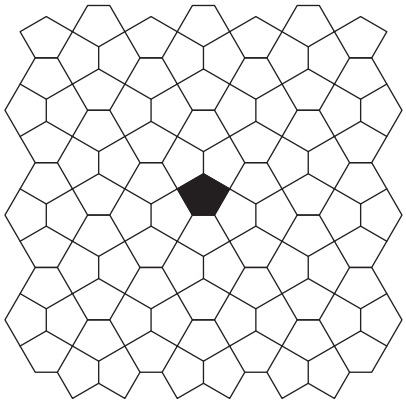
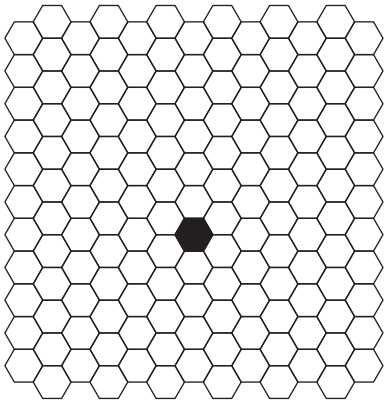
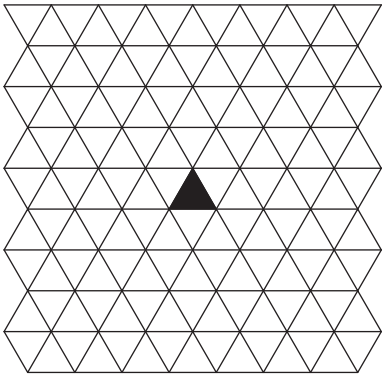
- **Naissance par le côté** : chacune des cellules d'une même génération donne naissance aux seules cellules qui lui sont adjacentes par un côté, mais une cellule ne peut être issue que d'une seule cellule de la génération précédente.



- **Naissance par le sommet** : même règle que précédemment mais naissance aux seules cellules qui sont adjacentes par un seul sommet.

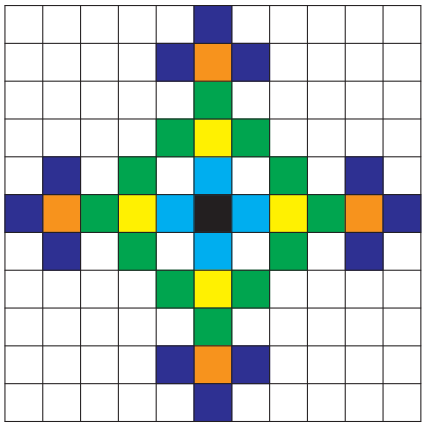
Différents réseaux sont proposés. En voici des exemples.

Les règles peuvent être différentes : naissance par le sommet, par le côté comme on l'a vu, mais aussi la combinaison par le côté puis par le sommet et inversement, ou autre.
Quel que soit le réseau et quelle que soit la règle, il faut la suivre !
Ces activités concernent les cycles 3 et 4.

Voici un exemple de réalisation avec la règle « par le côté » et la suite des couleurs utilisées.



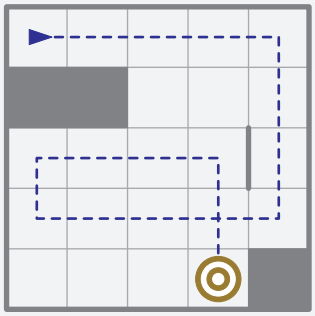


T'robot

Le but est de déplacer un robot sur une grille en respectant une règle. S'orienter et se repérer, exécuter, coder et programmer des déplacements sont les compétences utilisées. Ces activités s'adressent aux cycles 2, 3 et 4.

Le robot doit atteindre la cible en respectant sa règle de déplacement.

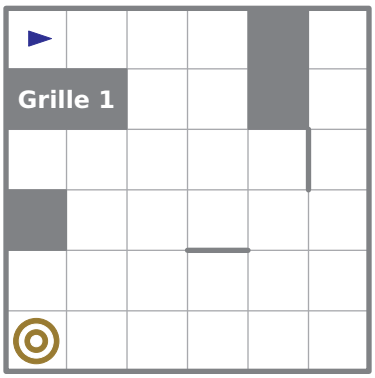
Sans obstacle devant lui, le robot bleu (►) avance sans s'arrêter.
Les bords de la grille, les cases grisées, les côtés grisés, sont des obstacles.
Devant un obstacle le robot tourne sur **sa** droite et poursuit son chemin.
S'il atteint en même temps la cible (◎) **et** un obstacle, alors il s'arrête.

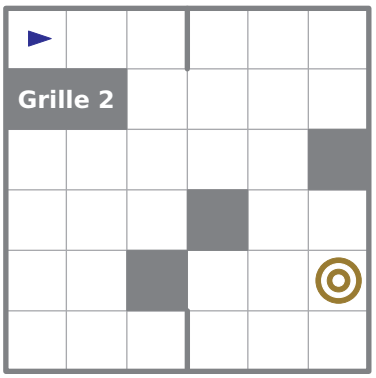


Voici quelques exemples d'activités.

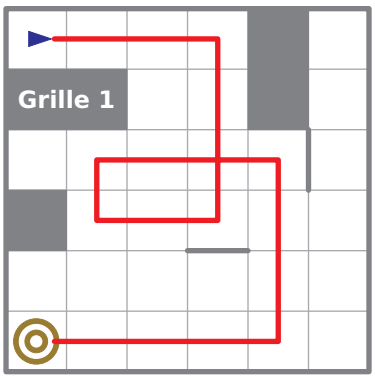
Parcourir

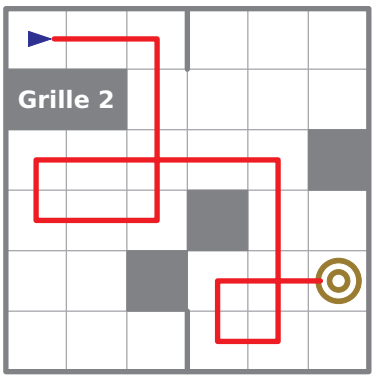
- Tracer le parcours du robot jusqu'à son arrêt sur la cible.



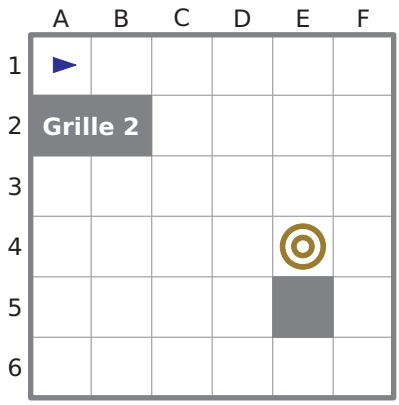


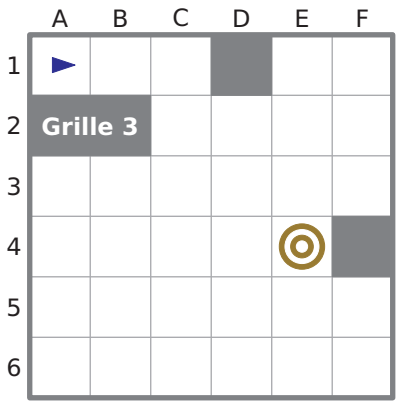
Solutions



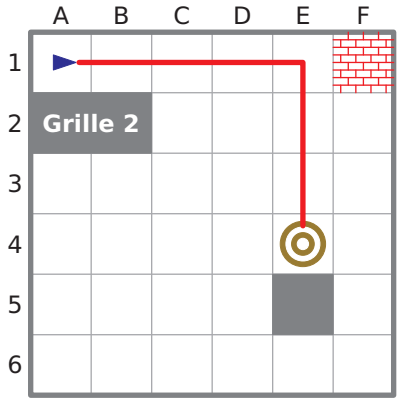


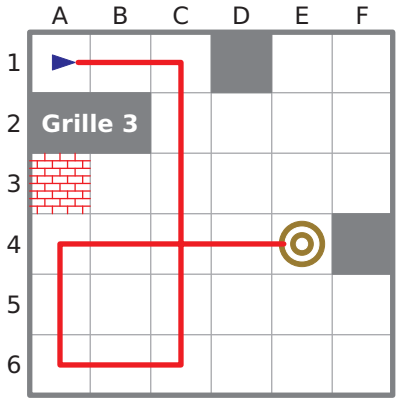
- Ajouter un ou plusieurs obstacles et tracer le parcours du robot jusqu'à son arrêt sur la cible.



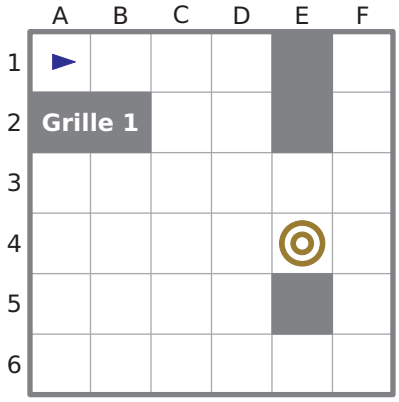


Des solutions



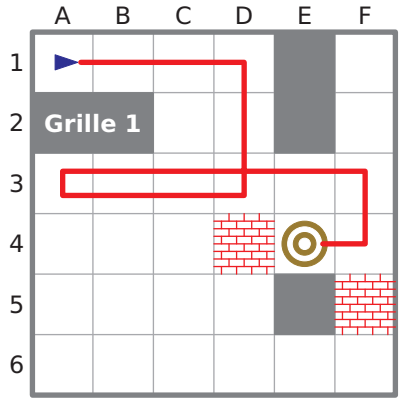


- Sur une même grille, on peut donner des contraintes différentes :



  - ajouter un obstacle et tracer le parcours du robot ;
  - ajouter deux obstacles et tracer le parcours du robot.

Solution avec deux obstacles

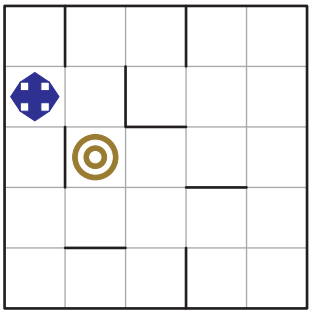


Programmer

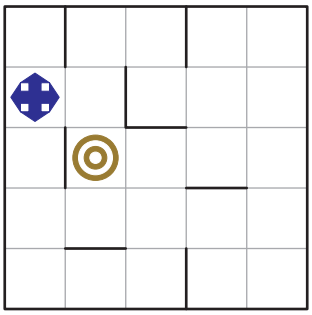
Exécuter un programme, écrire un programme.

Chaque flèche est une instruction ; sans obstacle devant lui, le robot bleu ( ) avance sans s'arrêter dans la direction indiquée par la flèche. Arrivé à un obstacle, il prend la direction de la flèche suivante et ainsi de suite jusqu'à la fin des instructions.
Une série d'instructions constitue un programme.
À l'issue de la dernière instruction du programme, le robot doit se trouver sur la cible ( ).

Trace le trajet de l'exécution du programme suivant : ➡ ⬇ ➡ ⬆ ⬅ ⬇ ⬅
et vérifie que le robot est bien sur la cible.

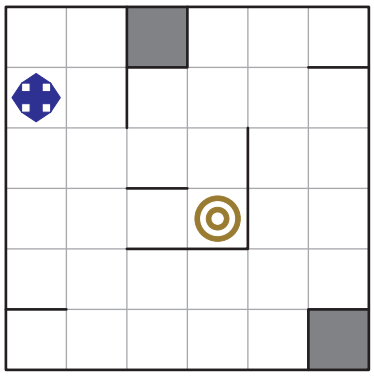


Écris un programme qui ne comporte que 4 déplacements : .....
et trace le trajet.

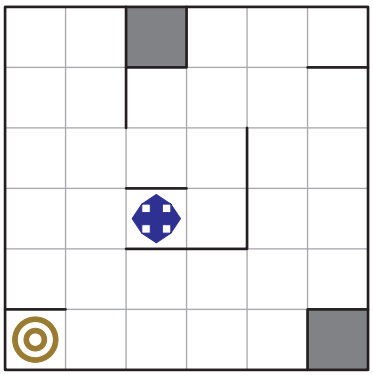


Pour chacune des grilles suivantes, écris un programme et exécute-le.

Programme : .....



Programme : .....



La brochure *JEUX-Écollège 4* propose d'autres activités, toutes mettent en œuvre de façon simple et motivante l'application et la réalisation de programmes. Vous y trouverez aussi :

- un codage de grilles débouchant sur la découverte collaborative d'un motif avec **MosaColla** ;
- des circuits électriques qui font, ou pas, passer le courant suivant les opérateurs rencontrés avec **NEOX** ;
- des wagons à échanger suivant les opérateurs proposés pour ordonner des nombres avec **Game of trains** ;
- des amibes qui changent de forme, de couleur ou de motif suivant les salles de transformation qu'elles traversent avec **Panic lab**.

Tout un programme d'apprentissages ludiques en algorithmique !

Françoise Bertrand est la responsable du groupe « *Jeux et mathématiques* » de l'APMEP. Désormais retraitée, elle a enseigné auparavant en collège.

francoise.bertrand0859@orange.fr

© APMEP *Octobre 2021*

Match Point une brochure *JEUX* pas comme les autres !

Match Point[1] *: un seul matériel, cinq types de tâches !*
Suivez le guide pour en découvrir tout le potentiel !

Cet article est paru dans le n° 535 (2020).

Jean Fromentin

Match Point — Calcul et raisonnement (brochure n° 1022)

Match Point est, à l'origine, un malin petit jeu de société créé par Madelief et Hans van Tol et diffusé de manière plutôt confidentielle par un éditeur néerlandais *The Game Master*.



Devinant un large potentiel pédagogique à ce qui n'est, au départ, qu'un jeu de pose de tuiles pour marquer le plus possible de points, le groupe *Jeux* de l'APMEP a exploré de nombreuses pistes pour proposer au final une brochure complète, tout en couleur, consacrée à ce jeu dont les activités très progressives permettent de mettre en œuvre de multiples compétences, tant en calcul qu'en raisonnement. Certaines fiches sont de réels défis pour adultes.

La brochure, accompagnée de la planche des 35 pièces du jeu, est conçue bien sûr pour une utilisation pédagogique en classe, mais aussi ludique en famille. C'est pour cette raison que les fiches pédagogiques ne sont pas incluses dans la brochure.

Ces fiches pédagogiques, les solutions et des activités supplémentaires sont en effet disponibles sur l'espace compagnon « Match Point » du site de l'APMEP (rubrique « Publications ») qui propose un forum où les utilisateurs du jeu peuvent échanger entre eux et avec les membres du groupe *JEUX*.

Match Point — Matériel (brochure n° 1023)

La brochure comprend une planche prédécoupée des pièces du jeu. Ces planches sont aussi proposées à l'unité pour permettre aux enseignants d'avoir, en plus de la brochure, un équipement complet pour leurs classes.



Les pièces du jeu sont des carrés partagés en quatre zones carrées, chacune comportant de une à cinq valeurs (1 à 5 points). Sur chaque pièce, les quatre valeurs sont différentes.

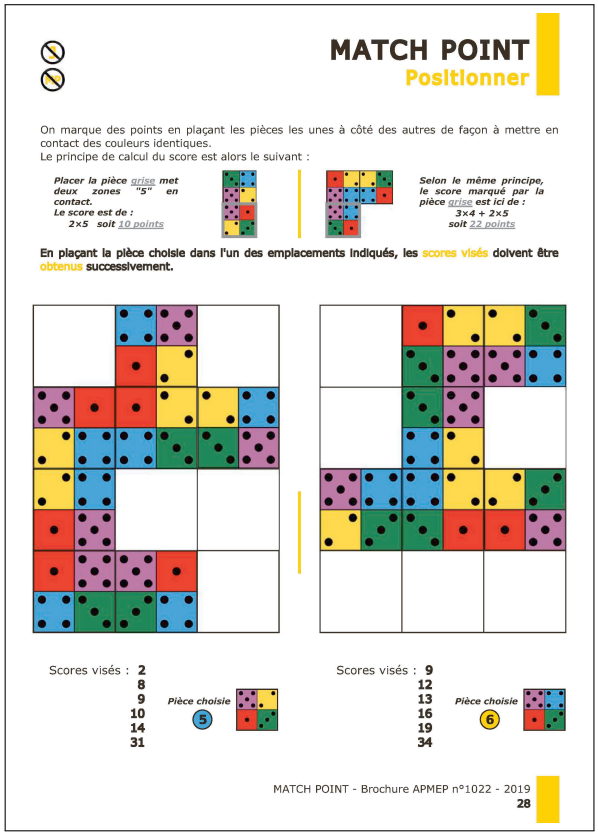
Il y a donc cinq séries de six pièces, chacune comprenant quatre valeurs parmi les cinq. Chaque pièce est repérée au verso par un nombre (de 1 à 6) et une couleur (celle de la valeur manquante), ceci pour permettre de repérer facilement les pièces utilisées pour telle ou telle activité. Les pièces comportant des jokers sont repérées au verso par les nombres de 1 à 5 sur une étoile grise.

Les figures de l'ensemble des activités sont aux dimensions des pièces qui peuvent donc y être placées, ce qui facilite recherche et manipulation.

1. 22 €, à commander sur le site de l'APMEP.

Les activités

La présentation générale de la brochure et de la règle du jeu du commerce est suivie de cinq chapitres, comme les nombres de points des pièces du jeu, chacun repéré par les couleurs associées aux points. Toutes les fiches sont désignées par des verbes du premier groupe : Marquer, Révéler, Déterminer. . . un défi ! Mais quoi de plus normal que des verbes d'action pour désigner des activités ! De plus, ces verbes ne donnent aucun indice sur le niveau des fiches, même si elles sont plus ou moins complexes, ce qui permet à l'enseignant d'appliquer une différenciation non apparente entre ses élèves.



Le premier chapitre « Initiation » comprend 18 fiches pour découvrir et se familiariser avec le jeu lui-même : manipuler les pièces, les juxtaposer, marquer des points, calculer. . . Cette découverte des bases du jeu est prétexte à développer des compétences numériques et un préalable à de futurs raisonnements.

Le deuxième chapitre « Calibration », avec 18 fiches, reprend bien sûr les compétences du premier chapitre mais avec un nouvel objectif : viser un score déterminé, d'où la nécessité de raisonner, d'anticiper.

Dans le troisième chapitre « Optimisation », comme son nom l'indique, il faut chercher à obtenir les meilleurs scores possibles en envisageant tous les cas de figures dans ses 18 fiches d'activité.

C'est l'aspect chronologique qui domine les 14 fiches du quatrième chapitre « Évolution ». Les scores successifs étant donnés, dans quel ordre et dans quelle disposition faut-il placer les pièces proposées ? Analyser, raisonner, anticiper, choisir : que de compétences qui dépassent de loin celles du simple calcul !

Après les défis proposés par ces trois derniers chapitres sur des situations de jeu, découvrons les nouveaux défis que nous lance le cinquième chapitre « Hybridation » qui prend ses distances avec la règle du jeu. Dans les 16 fiches de ce dernier chapitre, les pièces sont soumises à de nouvelles contraintes : dispositions des pièces et répartition des points sur des patrons de cube, disposition des pièces suivant les séries de couleurs ou suivant les sommes de points sur les lignes et colonnes d'une figure, et enfin de vrais puzzles à partir d'informations d'orientations et de placements de zones de couleurs.

Qui aurait pu imaginer qu'un tel jeu puisse engendrer des activités aussi riches que variées ? À consommer sans modération de 5 à 105 ans !

Jean Fromentin est un enseignant de mathématiques à la retraite, toujours très actif au sein de l'APMEP et du groupe *JEUX*.

© APMEP *Octobre 2021*

Vergnaud *versus* Singapour

La résolution de problèmes, au centre de l'activité des élèves dès l'école. . . Dans cet article, l'auteur interroge des catégorisations de problèmes additifs basiques, leur rôle, leur utilisation pour enseigner et leur appropriation par les collègues.

Richard Cabassut

La résolution de problèmes : un thème d'actualité dans la formation à l'école primaire

À la suite du rapport Villani-Torossian [1], une importante réforme de la formation continue des professeurs d'école a été mise en oeuvre, notamment pour ce qui concerne l'enseignement des mathématiques. Un des dispositifs clés de cette réforme est la mise en place de constellations, regroupant six à huit enseignants de la même zone locale (sans être obligatoirement rattachés à la même école), animées par un même Référent Mathématique de Circonscription (RMC). Pour réaliser cette étape il a fallu recruter et former ces RMC, parfois dans des académies très déficitaires du point de vue des ressources humaines disponibles. Un des premiers thèmes de formation envisagé est celui de la résolution de problèmes [2]. Nous proposons dans cet article de réfléchir sur le rôle des catégorisations de problèmes pour montrer sur ce thème de la résolution de problèmes la délicate articulation entre recherche et enseignement.

Le rôle des catégorisations de problèmes

La catégorisation des problèmes semble un outil intéressant pour un enseignement de la résolution de problèmes [3, p. 4] : *« de l'avis général des chercheurs consultés, il est utile d'engager, en formation initiale comme en formation continue, un travail de catégorisation des problèmes mathématiques. Il permet d'outiller les enseignants afin : de faire "l'analyse* a priori*" des énoncés proposés, d'évaluer la nature de la difficulté soulevée par tel ou tel énoncé, de s'assurer de varier les types de problèmes proposés ».* Une partie des justifications des pratiques d'enseignement et de formation se fondent sur des résultats de la recherche. C'est pourquoi nous allons évoquer deux catégorisations de problèmes issues de la recherche.

Deux exemples de catégorisations de problèmes verbaux arithmétiques additifs issus de la recherche

Un problème verbal est un problème énoncé par un discours oral ou écrit, sans recours à des représentations non linguistiques (schéma, dessin, photo, geste, matériel, . . .). Un problème arithmétique est un problème qui se modélise par des relations entre nombres impliquant au plus les quatre opérations

de base de l'école primaire (addition, soustraction, multiplication, division). Un problème additif est un problème précédent impliquant seulement l'addition ou la soustraction.

Catégorisations sémantiques (Vergnaud)

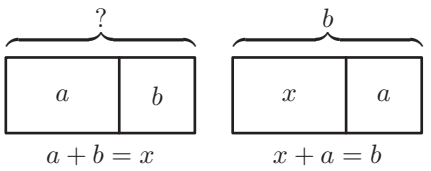
Dans les années 70, des catégories sémantiques de l'énoncé sont apparues. Illustrons avec l'exemple de Riley [4] traduit dans la thèse de Maryvonne Priolet [5, p. 104].

TYPES DE PROBLÈME		TAUX DE RÉUSSITE			
PROBLÈMES DE CHANGEMENT		5 ans	6 ans	7 ans	8 ans
Changement 1	X avait 3 billes. Puis Y lui a donné 5 billes. Combien de billes a maintenant X ?	0,87	1,00	1,00	1,00
Changement 2	X avait 8 billes. Puis il a donné 5 billes à Y. Combien de billes a maintenant X ?	1,00	1,00	1,00	1,00
Changement 3	X avait 3 billes. Y lui en a donné. X a maintenant 8 billes. Combien de billes Y a-t-il donné à X ?	0,61	0,56	1,00	1,00
Changement 4	X avait 8 billes. Il en a donné à Y. Maintenant X a 3 billes. Combien a-t-il donné de billes à Y ?	0,91	0,78	1,00	1,00
Changement 5	X avait des billes. Y lui en a donné 5 de plus. Maintenant X a 8 billes. Combien X avait-il de billes ?	0,09	0,28	0,80	0,95
Changement 6	X avait des billes. Il en a donné 5 à Y. Maintenant X a 3 billes. Combien avait-il de billes ?	0,22	0,39	0,70	0,80
PROBLÈMES DE COMBINAISON					
Combinaison 1	X a 3 billes. Y a 5 billes. Combien X et Y ont-ils de billes ensemble ?	1,00	1,00	1,00	1,00
Combinaison 2	X et Y ont ensemble 8 billes. X a 3 billes. Combien Y a-t-il de billes ?	0,22	0,39	0,70	1,00
PROBLÈMES DE COMPARAISON					
Comparaison 1	X a 8 billes. Y a 5 billes. Combien X a-t-il de billes de plus que Y ?	0,17	0,28	0,85	1,00
Comparaison 2	X a 8 billes. Y a 5 billes. Combien Y a-t-il de billes de moins que X ?	0,04	0,22	0,75	1,00
Comparaison 3	X a 3 billes. Y a 5 billes de plus que X. Combien Y a-t-il de billes ?	0,13	0,17	0,80	1,00
Comparaison 4	X a 8 billes. Y a 5 billes de moins. Combien Y a-t-il de billes ?	0,17	0,28	0,90	0,95
Comparaison 5	X a 8 billes. Il a 5 billes de plus que Y. Combien Y a-t-il de billes ?	0,17	0,11	0,65	0,75
Comparaison 6	X a 3 billes. Il a 5 billes de moins que Y. Combien Y a-t-il de billes ?	0,00	0,06	0,35	0,75

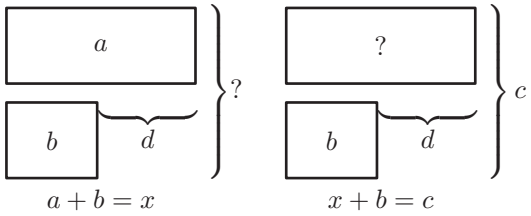
Dans cet exemple, trois grandes catégories sémantiques de problèmes additifs apparaissent : les changements, les combinaisons et les comparaisons (appelés respectivement transformations d'états, compositions d'états et comparaisons d'états dans la catégorisation de Vergnaud [6]). Les résultats précédents montrent une variation des réussites suivant les catégories et les sous-catégories, et suivant les âges. Ces recherches ouvrent donc l'étude des progressions, des dispositifs, des aides dans l'enseignement, non plus en fonction de catégories dépendant des seules opérations mathématiques impliquées dans le problème (ici l'addition et la soustraction), mais en tenant compte d'autres variables (ici la catégorie du récit), mais aussi dans d'autres recherches la taille et la nature des nombres, les grandeurs en jeu, la complexité sémantique et syntaxique de l'énoncé, les registres de formulation de l'énoncé (énactif, iconique, symbolique)...

Catégorisations par des modélisations en barres (Singapour)

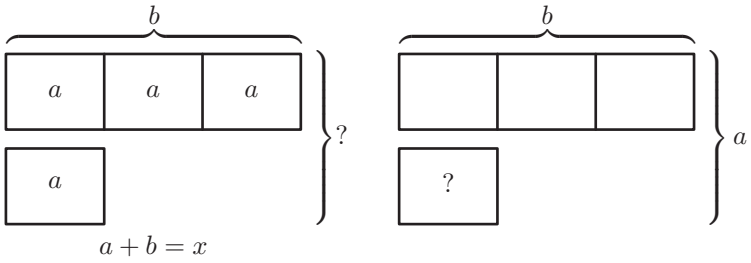
À partir des années 1980, l'État de Singapour a développé une catégorisation des problèmes arithmétiques reposant sur une modélisation visuelle à l'aide de représentations en barres. Les trois catégories suivantes, extraites de [7], concernent les problèmes additifs basiques. La modélisation de la multiplication et la division apparaît comme un cas de modélisation d'addition répétée de nombres égaux.



Modèle parties-tout.



Modèle de comparaison.



Modèle de multiplication et division.

Par rapport aux catégorisations précédentes, l'aspect sémantique est absent. Il est pris en charge dans une étape de verbalisation en amont de la représentation. Par contre, l'aspect modélisation est valorisé et le type de registre de représentation (des barres visuelles) est dominant. Des recherches [8] ont étudié l'effet de ces catégorisations sur l'apprentissage et l'enseignement, confortées par les bons résultats de Singapour aux évaluations internationales, sans que le lien entre l'usage de ces catégorisations et ces bons résultats aux évaluations soit avéré [9].

L'utilisation des catégorisations pour enseigner

Dans les ressources officielles

Pour accompagner les programmes de 2008, une ressource officielle [10] se réfère plusieurs fois (pp. 22, 57, 73, 90, 96) aux catégorisations de Vergnaud. D'autres ressources apparaissent pour étudier

les progressions à partir de ces catégorisations et les aides possibles, en utilisant par exemple des schématisations de Vergnaud [11, 12]. Pour accompagner les programmes réajustés en 2018, des guides sur la résolution de problèmes sont proposés [13] s'appuyant sur les modélisations en barres et des ressources apparaissent pour appuyer cette approche [14, 15].

> L'enseignant pourrait donc se sentir écartelé entre ces deux catégorisations différentes. Ce qui nous apparaît important c'est que l'enseignant soit conscient des justifications de ces catégorisations, c'est-à-dire des intérêts à les utiliser dans l'enseignement. Chacune de ces catégorisations présentent des avantages et des inconvénients.

Comparaison des deux catégorisations

Pour faire court, le mérite des catégorisations sémantiques est d'avoir sensibilisé les enseignants à l'importance des éléments sémantiques de l'énoncé dans la compréhension de l'énoncé et dans la recherche de solutions aux problèmes, et donc dans les difficultés que peuvent rencontrer les élèves et dans la progression de ces difficultés.

Le mérite des catégorisations avec des représentations en barres est d'avoir sensibilisé l'enseignant à l'importance de la modélisation, notamment avec l'usage d'une représentation visuelle particulière utilisant des barres.

Dans les catégorisations de modélisation en barres, le nombre de catégories est plus réduit par rapport aux catégorisations sémantiques : quelle opérationnalité pour l'enseignement et l'apprentissage des quatorze sous-catégories sémantiques des problèmes additifs évoquées dans Durpaire [10, p. 73] ? Cependant ce nombre réduit de catégories contraint les élèves à reconnaître par exemple qu'un problème de transformation des catégories sémantiques relève du problème parties-tout. Les exercices de recodage sémantique [16] vont permettre cette reconnaissance dans la phase de verbalisation en amont de la modélisation en barres. Les difficultés repérées par les catégorisations sémantiques seront bien à traiter dans la phase de verbalisation.

Les représentations sémantiques versus les représentations en barres

Concernant ses schémas de modélisation des problèmes additifs, Vergnaud rappelle qu'« *en tant que support pour les problèmes, ils sont faits pour être oubliés au fur et à mesure de la maîtrise de ces problèmes* » [17, p. 34]. Au contraire, les schémas de modélisation en barres peuvent être utilisés avec différents thèmes (numération, mesure, fraction, pré-algèbre…) et de la grande section au collège, assurant ainsi une continuité horizontale et verticale.

L'expérience de Singapour a permis de pointer des difficultés liées à la modélisation en barres [18, p. 47] :

- la précision du schéma en barres : par exemple, certains auteurs [14, pp. 21, 25] préconisent, à tort de notre point de vue, une barre de longueur proportionnelle à la valeur qu'elle représente ;
- le partage d'une barre pour un grand nombre de parts ;
- la pertinence de la modélisation en barres : dans certains cas de proportionnalité (notamment multiple) une représentation en tableau permet d'utiliser la linéarité plus facilement qu'une représentation en barres ; dans d'autres cas une écriture pré-algébrique est préférable à des représentations en barres.

Varier les registres de représentations

L'utilisation de différents registres de représentation (énoncé écrit, énoncé oral, type de schéma, écriture pré-algébrique) permet de travailler la conversion d'un registre à l'autre [19] et de mieux saisir le concept commun à tous ces registres (la relation additive entre les données dans le cas des problèmes additifs).

Quelle que soit la catégorisation choisie, les problèmes complexes à plusieurs étapes demanderont, dans chaque registre, de savoir traiter le problème (reformulation et inférences pour les énoncés, évolution des schémas complexes, calcul pré-algébrique). Avec le temps, le calcul pré-algébrique devrait apparaître comme le plus efficace dans les problèmes complexes. Les problèmes complexes semblent insuffisamment travaillés en France, ce qui peut expliquer la faiblesse des élèves français sur la construction de modèles complexes. Une catégorisation des problèmes proposée par Houdement [20] propose trois catégories : le problème basique qui pourra se résoudre en utilisant une des quatre opérations arithmétiques, le problème complexe qui se décompose en problèmes basiques et le problème atypique qui ne relève pas des catégories précédentes. Cette catégorisation permet de redonner une place aux problèmes complexes et atypiques. D'ailleurs, les repères annuels de progression [21] confirment ce point de vue.

On voit donc qu'un enseignant dispose de plusieurs catégorisations de problèmes pour choisir une stratégie d'enseignement sur la résolution de problèmes : le plus important sera de justifier ses choix.

L'appropriation des catégorisations dans les constellations

Pour les enseignants, concernant les catégorisations, deux points de vigilances sont relevés ici [3] :

«
- *Si le problème proposé est centré sur un contenu mathématique, comme objet central de l'apprentissage ciblé par l'enseignant, il est nécessaire de s'assurer que le travail de réflexion extérieur à l'objet d'apprentissage visé ne va pas empêcher l'apprentissage. Certains chercheurs s'interrogent donc sur le risque que l'activité de catégorisation proposée n'aide pas forcément les élèves à focaliser leur attention sur l'objet mathématique étudié.*
- *La résolution de problème nécessite un travail de transposition langagière, entendu comme traduction, décodage-recodage, ou décryptage de l'énoncé du problème, pour reconnaître les éléments d'ordre mathématique qui sont donnés, et ce qu'il faut trouver. Pour certains chercheurs, le travail de catégorisation risque de conduire certains élèves à un travail de prélèvement d'indices lexicaux ou syntaxiques hasardeux, qui parfois déboucheront sur un résultat juste avec une catégorisation erronée. Ce risque des "analogies non contrôlées" par des savoirs suffisants concerne davantage les élèves les plus éloignés de la culture scolaire, et peut leurrer les enseignants les moins chevronnés. »*

La mise en place de constellations complète le travail collectif bien souvent engagé dans les écoles. Les constellations contribuent à la réflexion sur le choix de progressions, d'énoncés de problèmes, de représentations et de procédures attendues, de situations d'enseignement. Ces choix ne doivent pas être l'application d'injonctions venues de l'autorité hiérarchique mais le fruit de justifications basées sur des résultats de la recherche et sur l'observation et l'évaluation des pratiques professionnelles. Il faut faire confiance à ce jeune dispositif de formation continue qui, avec le temps, saura gagner en compétence et en efficacité.

Références

[1] C. Villani et C. Torossian. *21 mesures pour l'enseignement des mathématiques*. France : Ministère de l'Éducation nationale, 2018.

[2] Annie Feyfant. « La résolution de problèmes de mathématiques au primaire ». In : *Dossier de veille de l'IFÉ* N° 105 (2015).

[3] Centre Alain Savary. *Catégorisation des problèmes en mathématiques, un enjeu langagier majeur*. . 2018.

[4] M. S. Riley, J. G. Greeno et J. I. Heller. « Development of children's problem-solving ability ». In : *The development of mathematical thinking* (1983). Sous la dir. de H. P. Ginsberg (Ed.), pp. 153-196.

[5] Maryvonne Priolet. « Enseignement et apprentissage de la résolution de problèmes mathématiques : le cas des problèmes numériques au cycle 3 de l'école primaire française. Approches didactique et ergonomique ». Thèse. Université Lyon 2, 2008.

[6] G. Vergnaud. « Psychologie du développement cognitif et didactique des mathématiques, un exemple : les structures additives ». In : *Petit x* N° 22 (1989), pp. 51-69.

[7] S. F. Ng et K. Lee. « The Model Method: Singapore Children's Tool for Representing and Solving Algebraic Word Problems ». In : *Journal for Research in Mathematics Education* Vol. 40.N° 3 (2009), pp. 282-313.

[8] B. Kaur. « The why, what and how of the 'Model' method: a tool for representing and visualising relationships when solving whole number arithmetic word problems ». In : *ZDM Mathematics Education* N° 51 (2019), pp. 151-168.

[9] R. Cabassut. « Les représentations en barres : « *ni cet excès d'honneur, ni cette indignité* » ». In : Au fil des maths N° 537 (2020).

[10] Jean-Louis Durpaire et Marie Mégard. *Le nombre au cycle 2*. . CANOPE-CNDP, 2010.

[11] Olivier Graff, Antonio Valzan et Benoît Wozniak. *Problèmes additifs et soustractifs au CP-CE1*. Nord – Pas de Calais : SCÉRÉN/CRDP, 2013.

[12] Kevin Guegen. *Résolution de problèmes arithmétiques*. . Centre Alain Savary, 2019.

[13] Ministère de l'Éducation nationale. *Pour enseigner les nombres, le calcul et la résolution de problèmes au CP*. . 2020.

[14] J.-M. Jamet. *Résoudre les problèmes avec la modélisation du CE2 au CM2*. . Hachette Éducation, 2019.

[15] Muriel Grandclément et al. *Une démarche pour résoudre des problèmes arithmétiques au cycle 2*. . Centre Alain Savary, 2020.

[16] E. Sander. « Une approche interprétative de la résolution de problèmes ». In : *Pré-Actes du séminaire de didactique des mathématiques* (2018). Sous la dir. de Julia Pilet & Céline Vendeira. .

[17] G. Vergnaud et alii. In : *Le Moniteur de Mathématiques – Résolution de problèmes – Fichier pédagogique* (1997).

[18] Yan Kow Cheong. « The Model Method in Singapore ». In : *The Mathematics Educator* Vol. 6.N° 2 (2002), pp. 47-64.

[19] Raymond Duval. « Transformations de représentations sémiotiques et démarches de pensée en mathématiques ». In : *Actes du 32e colloque de la COPIRELEM* (2005).

[20] C. Houdement. « Problèmes arithmétiques basiques : le cœur du problème ? » In : *Préactes du séminaire de didactique des mathématiques* (2018). Sous la dir. de Julia Pilet & Céline Vendeira (éds.) .

[21] Ministère de l'Éducation nationale. *Repères annuels de progression pour le cycle 2*. . 2018.

Richard Cabassut est maître de conférences en didactique des mathématiques à l'université de Strasbourg. Il est membre de la régionale APMEP de Strasbourg et de l'équipe d'*Au fil des maths*.

richard.cabassut@gmail.com

© APMEP *Octobre 2021*

Manipuler en mathématiques. . . oui mais

Cet article propose une mise en scène d'actions de formation afin de lancer un débat sur le rôle et la place de la manipulation au sein d'une séquence de mathématiques. À lire de la maternelle à l'université ! Vos réactions seront les bienvenues.

Cet article est paru dans le nº 531 (2019).

Joël Briand

Au moment où le ministère met en avant une méthode appelée imprudemment « méthode de Singapour » avec sa marchandisation associée[1], au prétexte que les élèves y mènent des activités « *mathématiques concrètes à partir de matériel attrayant* » et passent « *du monde concret qui leur est familier à une vision abstraite* », il convient de revenir sur le rôle et la place de la manipulation et de l'expérience[2] dans l'activité mathématique. Ce point est en effet mis en avant par les promoteurs de la « méthode ». L'enfant manipulerait, il schématiserait et enfin il passerait à l'abstraction.

> Or, depuis 40 ans, les recherches en didactique des mathématiques ont montré à la fois l'importance de la manipulation dans la genèse d'une activité mathématique mais aussi les obstacles à l'acquisition de savoirs mathématiques qu'une manipulation mal organisée pouvait créer.

En tant que formateur, j'ai l'habitude d'aborder cette question à l'aide d'un exemple qui consiste à faire une analyse comparée de deux séquences (fictives) se déroulant dans un cours préparatoire. Le même type d'analyse peut être effectué dans une séquence de classe de collège. Je donnerai donc un second exemple.

En cours préparatoire

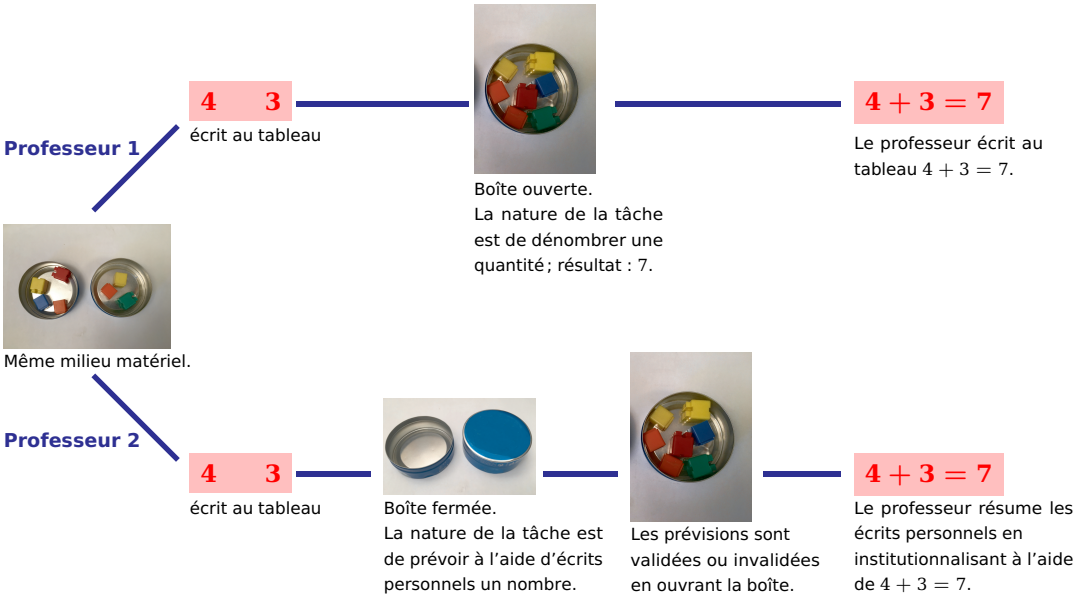
Imaginons deux professeurs des écoles qui se donnent pour but de faire concevoir que $4 + 3$ font 7. Pour organiser leur séance de classe, ces deux professeurs décident d'utiliser du matériel : ce sont deux boîtes et sept cubes.

Le premier professeur montre quatre cubes et les place dans une boîte. Il écrit « 4 » au tableau. Il montre ensuite trois cubes, les place dans l'autre boîte. Il écrit « 3 » au tableau. Devant les élèves, il renverse le contenu de la seconde boîte dans la première. Il fait alors compter le tout. Les élèves disent « 7 ». Le professeur approuve et complète au tableau en écrivant $4 + 3 = 7$. Les élèves recopient cette égalité sur leur cahier.

Le second professeur, avec le même matériel montre quatre cubes et les place dans une boîte. Il écrit « 4 » au tableau. Il montre ensuite trois cubes, il les place dans l'autre boîte. Il écrit « 3 » au tableau. Devant les élèves, il renverse le contenu de la seconde boîte dans la première et **ferme cette boîte**. Il donne alors la consigne : « *Prévoyez le nombre de cubes qu'il y a dans la boîte fermée. Pour cela, vous pouvez écrire ce qui vous paraît utile sur votre cahier de brouillon. Lorsque vous aurez prévu, nous ouvrirons la boîte pour vérifier* ».

Après un moment, les élèves annoncent leurs prévisions et la façon dont ils ont pu prévoir à l'aide d'un écrit ou/et de gestes (comptage à l'aide des doigts, dessins des boîtes et des objets, bâtonnets, numérotage, nombres écrits, etc.), la boîte est ouverte et le professeur fait compter le tout. Les élèves disent « 7 ». Certaines prévisions s'avèrent donc justes, d'autres fausses. Le professeur complète au tableau en écrivant $4 + 3 = 7$. Les élèves recopient sur leur cahier.

1. Vous trouverez une analyse didactique dans le nº 532 de notre revue.
2. *La place de l'expérience dans la construction des mathématiques en classe*, « Petit x », nº 75, pp. 7-33, 2007.



Comparons ces deux moments de classe.

Le premier professeur a illustré à l'aide d'une manipulation ce qu'il veut faire apprendre :

$4 + 3 = 7$. Les élèves n'ont eu à aucun moment à prévoir un « résultat » qui serait issu d'une utilisation des signes « 4 » et « 3 ». Leur tâche a été de dénombrer une quantité présente à leurs yeux. L'écrit lié à ce moment est celui donné *in fine* par le professeur : $4 + 3 = 7$.

Le second professeur organise un moment afin que les élèves, à l'aide d'un langage écrit en devenir, prévoient un résultat. La tâche des élèves consiste à produire des écrits qui permettent de contrôler ce que contient la boîte fermée. L'ouverture de cette boîte permettra de valider (ou d'invalider) les prévisions. L'écriture $4 + 3 = 7$ (écriture experte) qui sera donnée par le professeur sera une autre façon d'écrire ce que les élèves avaient déjà rédigé.

> Nous pouvons dire que, dans ces deux moments de classe, le **milieu matériel** est le même. C'est le **milieu d'apprentissage** qui a changé.

En comparant les deux tableaux, un visiteur pourra observer que les deux professeurs ont écrit le même texte : $4+3 = 7$, et pourra conclure un peu trop rapidement que ces deux professeurs ont fait la même leçon.

L'idée communément admise que, pour faire des mathématiques il faut manipuler, est donc porteuse de graves malentendus.

> Les deux scénarios s'appuient sur une manipulation mais seul le second propose une activité mathématique, c'est-à-dire une activité au cours de laquelle les élèves ont à produire un modèle (par une représentation ou un écrit) qui permet de contrôler une action effectuée dans un milieu matériel.

Bien sûr, il faudra plusieurs séances pour que les élèves progressent dans les écrits mais l'activité mathématique se situe au niveau de l'écrit. L'écrit sert à prévoir ; les formes d'écrit évoluent toujours avec pour but de contrôler le milieu matériel. L'écriture $4 + 3 = 7$ ponctue l'évolution des écrits des élèves. *A contrario*, le premier scénario ne donne aucune garantie sur ce que peut signifier l'écriture $4 + 3 = 7$, qui ne fait suite à aucune production écrite des élèves. La phrase $4 + 3 = 7$ sera éventuellement retenue par ceux des élèves qui ont bien intégré qu'au-delà de la manipulation, l'enjeu à l'école est d'apprendre cette égalité.

En Sixième

Cette analyse peut être conduite de l'école maternelle au lycée en passant par le collège. Imaginons le même montage de formation à partir d'un autre exemple, cette fois en nous servant des travaux des collègues de l'IREM de Lyon[3] à propos de l'addition de fractions décimales en Sixième, et en construisant deux scénarios comme précédemment.

Scénario 1 : le professeur propose à chaque élève ou groupe d'élèves deux bandes de longueurs différentes dont la mesure donnée est une fraction décimale de l'unité (l'unité pouvant être le mètre). La première bande mesure $1u + \frac{3}{10}\,u$ la seconde mesure $\frac{85}{100}\,u$. Ces deux mesures sont écrites au tableau. Il demande de mettre bout à bout ces deux baguettes puis de mesurer la baguette obtenue. Le résultat du mesurage (sous contrôle du professeur) est $2u + \frac{1}{10}\,u + \frac{5}{100}\,u$. Il écrit ensuite au tableau :

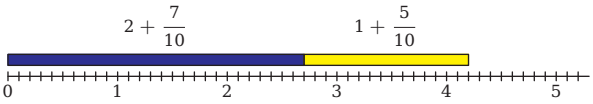
$$\left(1u + \frac{3}{10}\,u\right) + \frac{85}{100}\,u = 2u + \frac{1}{10}\,u + \frac{5}{100}\,u.$$

Scénario 2 :[4] le professeur montre les deux bandes de mesures et donne leurs mesures. La première mesure $1u + \frac{3}{10}\,u$, la seconde mesure $\frac{85}{100}\,u$. Les élèves doivent d'abord prévoir quelle sera la longueur obtenue en mettant les deux bandes bout à bout puis trouver une disposition des nombres qui leur permette d'effectuer rapidement l'addition posée des deux mesures. Les élèves effectuent des calculs et produisent un résultat. Le mesurage effectif permettra de valider ou d'invalider les prévisions des élèves. On peut prévoir une discussion liée à l'équivalence d'écritures.

La même analyse que celle effectuée au cours préparatoire peut être conduite. Le milieu matériel est le même ; le milieu d'apprentissage diffère.

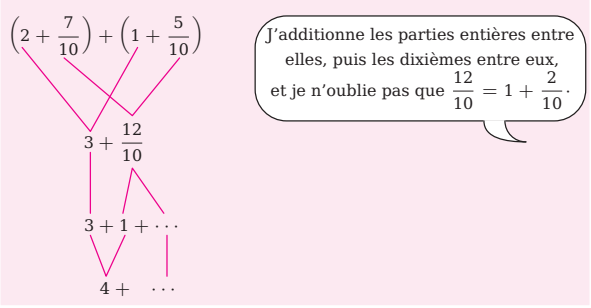
Dans le scénario 1, la manipulation est une finalité. La tâche des élèves est de mesurer la bande obtenue par mise bout à bout des deux bandes. Seuls les élèves qui ont compris que l'enjeu n'était pas de mesurer mais de se servir des mesures données auront éventuellement appris quelque chose. Dans le scénario 2, la manipulation sert à la fois à poser le problème et à valider (ou invalider) des résultats prévisionnels obtenus à l'aide d'un travail sur les écrits mathématiques. La consigne du professeur engage les élèves à travailler à l'aide des écritures des deux mesures.

Ajoutons que le passage d'une validation pragmatique (par mesurage de la bande obtenue par mise bout à bout des deux bandes) à une validation syntaxique (les calculs) est porteur de ruptures. Prenons cette fois deux bandes l'une de mesure $2u + \frac{7}{10}\,u$ et l'autre de mesure $1u + \frac{5}{10}\,u$ et reprenons le déroulement du scénario 2. Les élèves prévoient. La vérification des prévisions s'effectue par mise bout à bout des deux bandes :



Vérification par mise bout à bout.

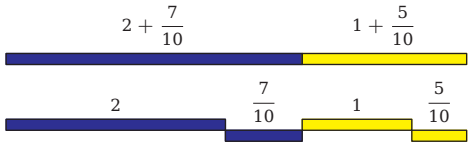
Cette vérification matérielle valide ou invalide les prévisions. Le professeur s'appuie alors sur les écritures et leur transformation, à la manière de cette illustration.



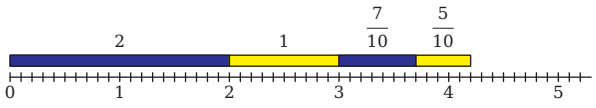
Les calculs.

3. S. Roubin et B. Rozanès (IREM de Lyon).
4. Proposé par l'équipe de l'IREM de Lyon : .

Si, pour les élèves, les deux mesures signifient « les deux bandes », alors les calculs constituent une rupture de signification. En effet, les élèves qui cherchent à faire le lien entre le matériel et les calculs sont à la peine. Pour que le lien puisse se reconstruire, il faut sans doute revenir sur les deux bandes et effectuer des découpages et un réassemblage :



Retour sur le matériel.



Réassemblage.

Conclusions

- Dans les deux exemples, le premier scénario aurait sa place en classe à condition qu'il ait pour seul objectif d'expliquer la règle d'un jeu qui se joue avec le second scénario.
- La manipulation, si elle n'est pas intégrée dans un processus d'apprentissage, ne permet pas aux élèves de progresser, sauf pour ceux qui ont compris qu'au-delà de la manipulation, le seul enjeu était de retenir le savoir affiché par le professeur. Si le résultat peut être obtenu par l'action, les élèves n'ont pas à engager un travail cognitif. Ils se bornent à faire des constats qui restent attachés au contexte.
- Le passage d'une validation pragmatique à une validation syntaxique est constitué de continuités et de ruptures. Il est donc utile de lier les transformations dans le milieu des signes et les transformations dans le milieu matériel lorsque c'est possible.
- Cet enseignement qui consiste à demander de prévoir est-il destiné à une élite du côté des élèves ? Non, bien au contraire ! **La tendance à vouloir faire manipuler (au sens des premiers scénarios) les élèves qui seraient en difficulté en mathématiques ne fait que creuser l'écart entre ceux qui sont déjà entrés dans les écrits mathématiques et ont compris leur usage et ceux qui tardent à comprendre l'intérêt de ces écrits.**

En conclusion, déclarer qu'il est nécessaire de passer « *du monde concret. . . à une vision abstraite* » est une vieille lune qui n'a jamais aidé à construire des séquences de classe et à laquelle il est toujours bon d'opposer ce qu'écrivait Paul Langevin : « *Le concret, c'est de l'abstrait devenu familier par l'usage* ».

Références

[1] I. Bloch. « Différents niveaux de modèles de milieux dans la théorie des situations didactiques : recherche d'une dialectique scientifique entre analyse théorique et contingence ». In : *Actes de la 11e école d'été de DDM, Corps 2001* (2002), pp. 125-140.

[2] T. Assude. « Travaux pratiques au collège ? Conditions et contraintes d'émergence et de vie d'un dispositif ». In : *M. Bridenne (eds)* Nouveaux dispositifs d'enseignement en mathématiques dans les collèges et les lycées (2002).

[3] J. Bolon. « L'enseignement des décimaux à l'école élémentaire ». In : *Grand* $\mathbb{N}$ nº 52 (1992).

[4] J. Briand. « La place de l'expérience dans la construction des mathématiques en classe ». In : *Petit x* nº 75 (2007), pp. 7-33.

[5] J. Briand. « Réflexions actuelles sur les mathématiques à l'école primaire ». In : *Le Café pédagogique* (2010).

[6] C. Chambris. « Relations entre les grandeurs et les nombres dans les mathématiques de l'école primaire. Évolution de l'enseignement au cours du xxe siècle. Connaissances des élèves actuels ». Paris 7, 2008.

[7] G. Brousseau. « Le contrat didactique : le milieu ». In : *RDM* nº 9.3 (1988).

[8] Y. Chevallard. « Le caractère expérimental de l'activité mathématique ». In : *Petit x* 30 (2007), pp. 5-15.

[9] T. Dias. « La dimension expérimentale des mathématiques : un levier pour l'enseignement et l'apprentissage ». Lyon, Université Claude Bernard, 2009.

Joël Briand est maître de conférences honoraire en mathématiques et formateur en IUFM-ÉSPÉ à Bordeaux.

briandjoel@free.fr

© APMEP *Octobre 2021*

Matériaux pour une documentation

JEUX-Écollège 4
Groupe JEUX, APMEP, 2020
* * *
Passerelles. Enseigner les mathématiques par leur histoire au cycle 3
Commission Inter-IREM, ARPEME, 2017
* * *
Enseigner les mathématiques à l'école
Thierry Dias, Éditions Magnard, 2018
* * *
Mathématiques élémentaires pour l'école
Alain Mercier et Serge Quilio, Presses universitaires de Rennes, 2018
* * *
Le théorème du parapluie
Mickaël Launay, Flammarion, 2019
* * *
Le cercle des problèmes incongrus
Axel Bellos, Flammarion, 2018
* * *
Je fais des maths en laçant mes chaussures
50 histoires inattendues et amusantes
Clara Grima, Éditions Les Arènes, 2018
* * *
Histoire des codes secrets
Simon Singh, Le livre de poche, édition 2016
* * *

Ces recensions sont parues dans divers numéros.

Pour la classe

JEUX-Écollège 4



Brochure publiée par l'APMEP :
144 pages, 22 €
Brochure en couleur constituée de fiches photocopiables.

Cette publication[1] vient à la suite des brochures *JEUX-École 1*, *JEUX-École 2* et *JEUX-École 3*. Pourquoi ce drôle de titre ? En fait, elle s'adresse aussi bien à l'école qu'au collège, c'est-à-dire aux cycles 2, 3 et 4.

Cette fois, le groupe s'est attaqué à une partie assez nouvelle dans les programmes, l'initiation à la programmation et l'algorithmique. Qu'en disent les programmes ?

L'initiation à la programmation permet notamment de travailler les compétences suivantes :

- *se repérer, s'orienter en utilisant des repères ;*
- *adopter une démarche scientifique : utilisation d'un langage spécifique, contrôle, essais-erreurs ;*
- *développer l'abstraction : apprendre à anticiper l'effet de telle ou telle séquence d'instructions avant même de la faire exécuter par une machine ou un programme.*

Au cycle 2

Coder et décoder pour prévoir, représenter et réaliser des déplacements dans des espaces familiers, sur un quadrillage, sur un écran.

Au cycle 3

Programmer les déplacements d'un robot ou ceux d'un personnage sur un écran.

Au cycle 4

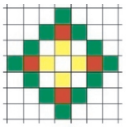
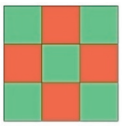
Les élèves s'initient à la programmation, en développant, dans une démarche de projet, quelques programmes simples, sans viser une connaissance experte et exhaustive d'un langage ou d'un logiciel particulier.

Comme toujours dès le début de la brochure, un tableau synoptique présente chaque jeu avec les niveaux concernés et le matériel à prévoir.

La présentation détaillée avec la mise en œuvre, les objectifs et les contenus mathématiques est déclinée dans la fiche 0 de chaque activité.

1. Voir également l'article p. 127.

Un petit aperçu des activités proposées :

	**Trois sans quatre**	Inspiré d'un jeu du commerce, voici un joli jeu de cartes avec quatre formes et quatre couleurs à proposer dès le cycle 2. La règle du jeu est simple : trouver sur chaque carte la forme manquante dans la couleur manquante. On reconnaît et nomme des formes géométriques simples, on trie et classe des objets en fonction de leur forme, on respecte une règle du jeu, on verbalise, le raisonnement se construit. . .
	**Frises évolutives**	Là aussi le principe est vite compris, les élèves des cycles 3 et 4 doivent colorier des cellules en respectant une règle toute simple d'abord, puis de plus en plus complexe. . . Ils ont à mettre en oeuvre un algorithme sur différents réseaux géométriques. Le résultat très esthétique donne envie de continuer. . . jusqu'aux limites de la page ! Et pourquoi ne pas inventer d'autres règles et créer ainsi de jolies nouvelles frises ?
	**Rouge et vert**	Encore une idée de coloriage facile « Une case est rouge ou verte » à proposer dès le cycle 2. On code, on décode et on colorie un quadrillage en suivant une règle simple.
	**Mosacolla**	Voici un travail collaboratif pour les cycles 3 et 4. Selon un principe déjà vu dans *JEUX-École 3* et *JEUX 10*, il faut colorier avec quatre couleurs des grilles qui seront rassemblées pour découvrir une mosaïque ; mais pour cela, il faut d'abord décoder les grilles !
	**T'robot**	Dès le cycle 2, on peut déplacer un robot sur une grille en respectant une règle simple qui peut être répétée. Le robot a des espaces de déplacements de plus en plus grands ou avec plus ou moins d'obstacles. . . On s'oriente et se repère, on respecte un programme de déplacements, on code et on crée d'autres programme.
	**Mosacolla T'robot**	Encore une mosaïque collaborative pour les cycles 3 et 4, mais avec des déplacements de robot, pas facile ! ! !
	**NEOX**	Comme dans tous les circuits électriques, le courant passe ou le courant ne passe pas ! Dans cette activité pour les cycles 3 et 4, ce phénomène est codé en couleur et il faut trouver la couleur de sortie ou d'entrée sur des circuits modulés par des opérateurs, ou trouver des opérateurs cachés.
	**Game of Trains**	Inspirée d'un jeu du commerce du même nom, cette activité est à proposer aux cycles 3 et 4. Les élèves doivent utiliser des codages pour effectuer ou prévoir des déplacements de wagons, appliquer un programme, écrire un programme avec un objectif donné. Et bien sûr pourquoi ne pas inventer son train programmé ?
	**Panic lab**	Nouvelle initiation à la programmation pour les cycles 3 et 4. Comme dans le joli jeu du commerce du même nom, des amibes ayant trois caractéristiques, forme, couleur et motif, se déplacent dans un laboratoire et se transforment en traversant des salles de mutation. Là encore, selon les mutations, le programme varie. . .

Attention, la plupart des activités proposées nécessitent des photocopies en couleur. . .

Comment ne pas rester admirative de la créativité sans limite des collègues du groupe JEUX ? Le fourmillement d'idées est toujours sans borne et le travail d'équipe si enrichissant que chaque enseignant pourra s'approprier les activités proposées dans cette nouvelle brochure.

Le groupe JEUX de l'APMEP a produit de nombreuses autres brochures de jeux mathématiques clé en main. Vous pouvez les découvrir et les commander ici .

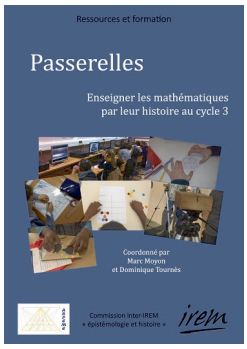
Thérèse Escoffet

*

* *

Passerelles

Enseigner les mathématiques par leur histoire au cycle 3



Commission Inter-IREM, ARPEME, 2017

ISBN 978-2-917294-19-2, 256 pages,
22 € (prix adhérent APMEP : 16 €).

La commission inter-IREM « Épistémologie et histoire des mathématiques » signe là un ouvrage qui devrait faire référence dans les bibliothèques personnelles des enseignants mais aussi celles des formateurs et de tous les établissements de formation dans l'enseignement des mathématiques, les INSPÉ n'étant pas des moindres.

« *Pourquoi* » avoir recours à l'histoire dans la classe de mathématiques et « *Comment* » ? Telles sont les questions privilégiées par cette commission dans l'écriture de cet ouvrage. De plus, les activités proposées sont facilement transférables à la classe ou en formation pour tous les lecteurs, spécialistes ou non de l'histoire des mathématiques. Aucune connaissance préalable n'est nécessaire.

> Et c'est bien là l'immense intérêt de cet ouvrage dont l'ensemble des documents est disponible sur une page internet dédiée ou site compagnon avec les fiches-élèves, les principales illustrations, des présentations directement utilisables en classe, des liens hypertextes vers des articles ou ouvrages utilisés, des tutoriels ou autres vidéos.

Chacun des neuf chapitres est organisé selon la structure suivante :

- deux tableaux synthétiques (en une page) des notions de programmes abordées et des compétences développées ;
- une courte introduction ;
- un contexte historique donnant les éléments nécessaires et suffisants pour prendre en charge les activités proposées ;
- des aspects scientifiques et pédagogiques en jeu dans les activités proposées ;
- de la mise en œuvre dans la classe avec analyse de travaux d'élèves ;
- des pistes pour aller plus loin ;
- des éléments de bibliographie et sitographie ;
- des annexes pour une utilisation en classe ou en formation.

> L'ouvrage répond aussi à une demande institutionnelle à laquelle les auteurs souscrivent pleinement : lier l'enseignement des mathématiques à leur histoire et à l'Histoire. De nombreuses références sont citées et figurent dans l'ouvrage.

Cet ouvrage est donc un outil précieux en direction des professeurs des écoles, pour qui les mathématiques ne représentent qu'une des nombreuses matières à enseigner, mais aussi en direction des professeurs du collège, spécialistes de leur seule discipline et soucieux d'élaborer des projets interdisciplinaires, en particulier dans le cadre des EPI (Enseignements Pratiques Interdisciplinaires).

« L'interdisciplinarité est omniprésente dans notre travail ainsi que de nombreuses compétences transversales ; ce sont même certains de ses ferments. Bien sûr, étant donné son premier objectif, le lien privilégié entre les mathématiques et l'histoire est fortement développé dans tous les chapitres. Mais, cela ne s'arrête pas à ce seul couple, déjà fécond. En effet, le français, la géographie, l'histoire des arts ou encore la technologie sont aussi des disciplines bien représentées. »

Les trois grands domaines du programme du cycle 3 sont abordés :

Nombres et calculs

- Voyage en numération maya
- De l'abaque à jetons au calcul posé
- La numérisation du calcul
- Les rapports de nombres : une autre approche des fractions

Grandeurs et mesures

- Doubler le carré avec Platon
- 1793, la révolution du temps
- Et si nous mesurions la cour de l'école ? Expériences d'arpentage

Espace et géométrie

- La géométrie des carnets de Léonard de Vinci
- Se protéger grâce aux mathématiques : la géométrie des fortifications

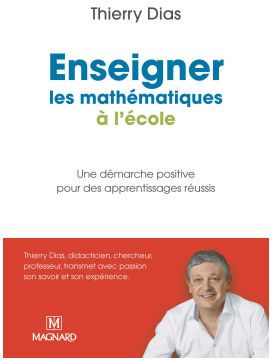
Cet ouvrage m'a enthousiasmée dès que j'en ai pris connaissance et tous les enseignants de mathématiques en tireront profit, même sans formation spécifique. En effet, les activités présentées sont quasiment « clé en main », à l'image des brochures *JEUX* de l'APMEP. Elles ont été certes expérimentées dans des classes du cycle 3 mais, outre que le cycle 3 contient le niveau 6e, certaines d'entre elles ont tout à fait leur place en 5e, voire… jusqu'en Seconde en les adaptant !

Que nos collègues de collège et de lycée s'emparent donc de cette brochure, ils ne le regretteront pas !

Nicole Toussaint

Envie de didactique…

Enseigner les mathématiques à l'école



Thierry Dias, Éditions Magnard
Août 2018
ISBN 978-2-210-50399-1, 256 pages, 22 €.

L'auteur, Thierry Dias, ex-formateur en éducation spécialisée à l'IUFM de Lyon est docteur en didactique des mathématiques et sciences de l'éducation, professeur à la Haute École Pédagogique du canton de Vaud en Suisse. Il a enseigné pendant plus de 20 ans dans le premier degré en France, notamment auprès d'élèves en difficulté. Thierry Dias est par ailleurs membre du comité de culture mathématique de l'Institut Henri-Poincaré (IHP) ainsi que de la Mission Mathématiques Villani-Torossian (2018).

Thierry Dias est l'auteur d'ouvrages destinés aux professeurs des écoles leur permettant de construire et de consolider les connaissances nécessaires pour enseigner sereinement et efficacement les mathématiques. Citons notamment *Manipuler et expérimenter en mathématiques* (2012) et *Nous sommes tous des mathématiciens* (2015), édités chez Magnard.

Son dernier ouvrage, *Enseigner les mathématiques à l'école*, destiné aux enseignants, apporte des connaissances disciplinaires et didactiques, avec pour objectif d'aider chacun à analyser les difficultés de ses élèves.

Neuf chapitres proposent des pistes d'enseignement qui prennent en compte les tâches profes-

sionnelles et les connaissances mathématiques requises pour enseigner mais aussi l'analyse didactique des erreurs des élèves dans les domaines des nombres et calculs, de la géométrie et des grandeurs et mesures.

Thierry Dias dresse un état des principaux éléments de la recherche en didactique des mathématiques et en sciences de l'éducation. On reconnaît à cet ouvrage sa volonté d'associer la recherche aux pratiques professionnelles pour exemplifier les propos, de sorte que l'enseignant, s'il est à l'aise avec les théories, trouvera des situations qui les illustrent alors que s'il ne l'est pas, il pourrait s'appuyer sur la situation décrite pour s'engager dans une posture d'analyse didactique. Une attention particulière au langage, — dire et écrire dans le domaine des mathématiques —, est présente dans tous les chapitres, à l'instar de la question des troubles et difficultés en mathématiques. Ces sujets sont traités dans l'analyse des différentes phases d'apprentissage.

La question des savoirs mathématiques nécessaires pour enseigner à l'école primaire est centrale dans ce livre. Prenant appui sur le travail de ses collègues Michel Deruaz et Stéphane Clivaz[2], l'auteur décline dans les chapitres Construire le nombre, Au-delà des entiers naturels, Les calculs à l'école : apprentissages et difficultés, Construire des connaissances spatiales et géométriques, Des grandeurs à leurs mesures, ... une structuration efficace des concepts fondamentaux à aborder dans la scolarité primaire.

Thierry Dias ancre sa démarche dans la tradition socio-constructiviste française et européenne. Son point de vue est assumé, explicité et étayé. Il propose des précisions ou des ajustements au constructivisme (rôle de l'entraînement ou de l'enseignement par modelage par exemple). Or les enseignants eux-mêmes apprennent par des phénomènes d'essai-erreur et on peut regretter que cet aspect ne figure pas explicitement comme une caractéristique des gestes professionnels dans cet ouvrage. Cette absence produit par moment une sorte de rupture de sens. Nous relevons : *Notre propre rapport aux connaissances mathématiques est donc essentiel pour pouvoir comprendre les difficultés des élèves, même s'il ne suffit pas à réussir dans leur enseignement. Par exemple, lorsque j'ai commencé à enseigner à Vénissieux, la discipline qui m'a mis le plus en échec était pourtant celle avec laquelle j'étais le plus à l'aise : les mathématiques. Je ne comprenais pas ce que mes élèves ne comprenaient pas.* Thierry Dias semble penser qu'une connaissance didactique complémentaire (aux connaissances des notions mathématiques) est primordiale. Cependant, il n'interroge pas le cheminement et l'analyse produits par l'enseignant qu'il était dans la compréhension des erreurs des élèves. Qu'est-ce qui est premier ? Le besoin de remédier à un obstacle ou la connaissance d'analyse didactique de cet obstacle ? De quelle interaction cela relève-t-il ? Quelle dialectique entre le disciplinaire et le didactique ? La fonction du temps n'est pas le propos de l'auteur : ce temps nécessaire pour devenir capable de « poser ses valises » et entrer dans une vision épistémique des concepts enseignés et de leur didactique. Il ne faudrait donc pas que cet ouvrage soit perçu comme une somme de connaissances à maîtriser pour « bien enseigner les mathématiques » car il pourrait être victime d'une lecture trop linéaire, avec le risque de reléguer le métier à une fonction affine.

Ce livre est pourtant bien autre chose qu'un *compendium*. Il propose une analyse intime, structurée et documentée des questions liées aux enjeux de la formation en didactique et de la formation disciplinaire. Il offre des exemples simples ciblés pour leur mise en pratique. Il rend compte de la trajectoire éprouvée (ressentie, testée, expérimentée) par Thierry Dias. Il est une transposition fonctionnelle de ce qui constitue, pour l'auteur, la démarche d'aide qui l'anime au regard de sa connaissance de terrain. Et en ce sens, il a toute sa place dans la bibliothèque d'un enseignant qui interroge sa pratique.

Alice Ernoult, Agnès Gateau

*

* *

2. Des mathématiques pour enseigner à l'école primaire PPUR (2018).

Mathématiques élémentaires pour l'école



Alain Mercier et Serge Quilio, Presses universitaires de Rennes

ISBN 978-2-7535-7400-75, 246 pages, 24 €

L'ouvrage *Mathématiques élémentaires pour l'école* s'adresse à la fois aux enseignants, aux formateurs et aux étudiants. Son objectif est d'interroger les liens entre savoirs de référence, épistémologie, didactique et situations de classe. Ce qui est scruté dans ce livre est tout entier contenu dans le rapport entre enseignement et construction des concepts par l'élève, en particulier dans le domaine de la construction du nombre et celui de l'usage des symboles dans l'activité écrite des pratiques numériques.

Les auteurs cherchent à répondre à deux questions centrales : « Qu'est-ce que c'est que faire des mathématiques dans les premières années d'enseignement (cycles 1 et 2) ? » et « Quelles sont les activités que l'école doit être en mesure de proposer pour que l'élève apprenne et comprenne ? ».

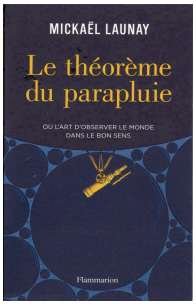
Alain Mercier et Serge Quilio ont pris le temps d'analyser leurs propres travaux et expérimentations, au sein des LéA[3] notamment. Ils structurent leurs résultats en trois parties. Les deux premières, « États des lieux » et « État des connaissances » tissent une chronologie des orientations choisies en France pour l'enseignement des mathématiques avec les fondements théoriques qui peuvent les justifier. La forme échappe heureusement à celle d'un compte-rendu. La rédaction reste alerte, les auteurs confrontent leurs propres recherches à celles d'autres chercheurs permettant de connaître leurs prises de position et les courants de pensées actuels. La troisième partie de l'ouvrage contient des propositions d'enseignement qui sont aussi des pistes de travail pour les cycles suivants. Les formes d'activités (dont le travail sur fichier) sont conçues de sorte que la fréquentation du nombre à l'école soit différente de celle que l'enfant va rencontrer dans la sphère familiale ou sociale, la construction du nombre étant un enjeu de l'enseignement des mathématiques au cycle 1.

Cette somme de questionnements et de pistes est riche, précieuse tant la réussite des élèves en mathématiques est difficile à appréhender complètement par les évaluations. L'ouvrage replace la pratique enseignante comme préalable indispensable à des démarches réflexives sur les connaissances, compétences et attitudes que les élèves doivent acquérir en venant à l'école, notamment la posture de chercheur en herbe…

Agnès Gateau

Culture mathématique

Le théorème du parapluie
ou l'art d'observer le monde dans le bon sens



Mickaël Launay
Flammarion

ISBN 978-2-0814-2752-5, 295 pages, 20 €.

3. Lieux d'Éducation Associés.

Pas de suspense, ce livre est, à mon goût, un excellent ouvrage de vulgarisation ! Mickaël Launay fait passer au fil des cinq chapitres de nombreuses idées scientifiques simples et profondes. Le style est alerte et rend l'ouvrage facile à lire. Le livre comporte cinq parties, globalement indépendantes les unes des autres. Chacune d'elles contient cinq à six sous-parties permettant une respiration. Si chacune des parties peut être lue dans un ordre quelconque, l'auteur n'hésite cependant pas à faire écho ponctuellement aux parties précédentes pour renforcer son propos.

Mais au fait que trouve-t-on dans ce « Théorème du parapluie » ? La partie I (La loi des supermarchés) nous plonge dans le monde du logarithme en y entrant par la loi de Benford qui régit la répartition des premiers chiffres des nombres que l'on peut voir un peu partout. Quelques détours historico-mathématiques plus loin et nous voilà aux côtés de John Napier. Évidemment un prof de maths pourra être un peu frustré devant le choix de l'auteur de ne présenter aucun calcul. Mais n'est-ce-pas le principe d'un livre de vulgarisation ? Un élève motivé y trouvera, quant à lui, sûrement de quoi le faire rêver et éveiller sa curiosité. La partie II (Des pommes et des lunes) aborde la question de la gravitation au fil de détours tout à fait intéressants. La partie III (Les méandres de l'infini) relie l'infini et les questions de dimension en passant par les fractales. La partie IV (L'art du flou) évoque l'axiomatisation des mathématiques et le postulat d'Euclide sur les parallèles. Enfin la dernière partie (Les abysses de l'espace et du temps) convoque Einstein et ses théories de la relativité. Pour terminer, un appendice « Pour aller plus loin » propose des conseils de lecture.

Bref une saine lecture à laquelle s'ajoutent les superbes illustrations en noir et blanc de Chloé Bouchaour qui renforcent formidablement bien le texte.

Et au fait, pourquoi ce titre ? Rendez-vous au chapitre 2 pour le savoir !

Vincent Beck

*

* *

Le cercle des problèmes incongrus



Axel Bellos, Flammarion, 2018

ISBN 978-2-0814-1766-3, 21,90 €.

Axel Bellos, vulgarisateur scientifique anglais, nous propose un recueil de 124 énigmes qu'on peut bien qualifier de mathématiques. On pourrait penser qu'il ne s'agit que d'un ouvrage de plus sur un sujet largement abondé depuis 30 ans en particulier par les éditions du Kangourou. Erreur !

D'entrée, l'introduction propose un casse-tête simplissime mais totalement addictif, chef-d'œuvre du japonais Nob Yoshigahara. Le but avoué est de tester l'aptitude du lecteur à apprécier les casse-tête en faisant fonctionner ses petites cellules grises.

De façon assez classique, l'ouvrage est divisé en cinq chapitres :

- Problèmes logiques
- Problèmes géométriques
- Problèmes pratiques
- Problèmes avec accessoires
- Problèmes pour puriste

Dans chaque chapitre, les énigmes sont rangées par ordre chronologique ; et la chronologie s'étale sur 2 000 ans — et même 3 000 annonce la première de couverture mais en étirant un peu les millénaires. . . — car l'auteur a enquêté pour trouver l'origine des problèmes proposés ; cela lui

permet de faire régulièrement un petit commentaire historique à la fois sur l'auteur (ou le propagateur), sur la culture du pays d'origine ou sur les mathématiques utiles dans la résolution du problème concerné.

En effet, l'auteur ne se limite pas à l'univers anglo-saxon (même si ce dernier se taille un peu la part du lion) : l'Europe, le Moyen-Orient, l'Inde, Singapour, la Chine et surtout le Japon y sont bien représentés. Si on en doutait, on verra que la tradition du casse-tête mathématique est vraiment universelle dans le temps et dans l'espace.

> Les problèmes font appel à des attitudes de recherche variées : essai-erreur, épuisement des cas, analogies, pas de côté, diagrammes, mise en équations, etc.

Si les rubriques « logique » et « géométrique » sont de contenu classique, les rubriques « pratique » et « accessoire » sont plus originales avec des problèmes d'allumettes, de pièces ou de pentaminos.

Enfin, la rubrique « puriste » porte exclusivement sur les nombres et si on y trouve l'inévitable cryptarithme SEND+MORE = MONEY, on se régalera des questions sur les « pandigitaux » (nombres à dix chiffres comportant chacun des dix chiffres).

Aucun des problèmes posés ne nécessite de connaissances mathématiques dépassant celles du collège. Les plus difficiles sont indiqués par un signe particulier (et ils le sont effectivement !). L'humour (so british ?) n'est pas absent ; ainsi le lecteur y apprendra qu'il y a un point commun entre Siméon-Denis Poisson et le Bruce Willis du *Die hard*.

Les différents chapitres sont introduits par une rubrique *En guise d'apéritif* qui reprend des énoncés des Junior Challenges du Royaume-Uni (11-13 ans) ; un exemple qui oblige vraiment à regarder de côté : « Quelle est la lettre qui suit QQSDDDVVVVVVVVV ? ».

Bien sûr des solutions abondantes sont proposées, intelligemment exposées, avec des commentaires bienvenus sur les erreurs fréquemment commises. Un seul problème (le jeu des tangloïdes) n'est pas corrigé afin que le lecteur puisse faire l'expérience de la joie pure que procure la résolution du problème posé et que Paul Dirac utilisa comme support pédagogique à l'université de Copenhague pour « illustrer le fait que le groupe fondamental du groupe des rotations dans l'espace tridimensionnel admet un unique générateur d'ordre deux » (fin de citation).

L'ouvrage se termine par une indication des sources pour chacun des problèmes posés.

Les amateurs d'énigmes y retrouveront des noms bien connus (Sam Llyod, Martin Gardner, Henry Dudeney, Édouard Lucas, Charles-Ange Laisant, Boris Kordemsky, Walter William Rouse Ball), tous auteurs d'ouvrages fréquemment réédités ; mais aussi des mathématiciens (ou savants) de premier plan (Euclide, Alcuin, Abu Kamil, Isaac Newton, Claude-Gaspard Bachet de Méziriac, Georges Gamow, John von Neumann, Stan Wagon, John Conway pour ne citer que les plus célèbres). Et si Conway propose un problème, on peut s'attendre à devoir transpirer pour le résoudre.

> En conclusion, un livre vraiment original, qui a sa place dans toutes les bibliothèques, en particulier des C.D.I. de nos établissements et de tous les collègues qui y trouveront éventuellement matière à remue-méninges pour leurs élèves.

François Boucher

*
* *

Je fais des maths en laçant mes chaussures
50 histoires inattendues et amusantes



Clara Grima
Éditions Les Arènes
ISBN : 978-2-35204-749-0, 310 pages, 20 €

Avec son ouvrage, Clara Grima fait souffler la nouveauté dans la vulgarisation mathématique pour plusieurs raisons. Tout d'abord, par le style, le texte est une compilation des billets de son blog mathématique. Le style est donc extrêmement vivant, les chapitres sont courts (5 à 6 pages). Ils sont souvent en lien avec des actualités, ce qui est parfois un brin gênant pour un format « livre » : le texte aurait pu être un peu plus remanié par endroit. Ensuite, Clara Grima est espagnole (Séville) et cela change des textes américains ou anglais. Elle nous fait découvrir la politique espagnole, les clubs de foot espagnols, etc. Elle partage aussi ses engagements politiques, économiques, écologiques et montre les mathématiques en action. Enfin, comment ne pas être sensible à son adage : *« Tout le monde aime les mathématiques mais certains ne le savent pas encore »*.

Quelles sont les mathématiques au programme ? Beaucoup de graphes : Facebook, sudoku, animaux en ballons de baudruche, plans de métro, *Game of Thrones*. Tout est pour elle l'occasion de parler de graphes. Mais on y trouve aussi de la géométrie : donuts et voyages en avion font bon ménage, des probabilités et plein d'autres choses encore ! Soit beaucoup de mathématiques variées, toujours présentées de façon très alerte. Pour finir, signalons le chapitre d'actualité : « Alerte virus ! Pourquoi se faire vacciner ? ». Dès la fin du collège, un élève trouvera dans ce livre de quoi aiguiser son appétit et sa curiosité pour les mathématiques ; mais s'il souhaite comprendre tous les tenants et les aboutissants de chacun des chapitres, il devra se montrer patient et apprendre beaucoup de mathématiques… Ces divers niveaux de lecture permettent de cibler un public large.

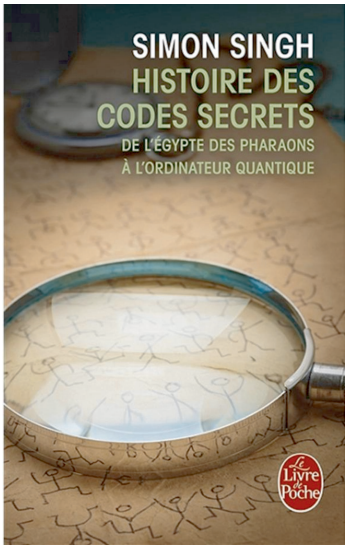
Côté forme, le texte est joliment illustré par Raquel Gu qui met en scène de façon ludique la chevelure rousse de Clara Grima à chacun des chapitres.

Bref, un texte rafraîchissant ! Olé !

Vincent Beck

*
* *

Histoire des codes secrets
De l'Égypte des pharaons à l'ordinateur quantique.



Simon Singh
Le livre de poche
ISBN 978-2-253-15097-8, 440 pages hors annexe, 8,70 €.

Qui n'a jamais essayé d'envoyer un message à un destinataire en souhaitant que son contenu reste secret, ou du moins inconnu d'un lecteur extérieur ? Peut-être avez-vous tenté l'écriture invisible ? Ou bien avez-vous décidé de créer un nouvel alphabet pour crypter votre message ?

Histoire des codes secrets regroupe un ensemble de techniques de cryptographie utilisées depuis la nuit des temps. Ce livre raconte la course folle entre cryptographes et cryptanalystes qui se livrent une bataille sans merci : « *Pendant deux millénaires, les créateurs de codes se sont évertués à protéger des secrets, et les briseurs de codes ont fait de leur mieux pour les découvrir. Cela a toujours été une lutte au corps à corps, avec des attaquants désarmés lorsque les concepteurs de code étaient les plus forts, et des inventeurs contraints de créer de nouvelles formes de chiffrement lorsque leurs systèmes précédents étaient compromis.* »

Arithmétique et permutations rendent certains passages du livre ardus pour des élèves de collège ou du début du lycée. En revanche, cet ouvrage permettra à un enseignant d'enrichir son répertoire d'anecdotes historiques. On peut aussi prendre plaisir à le lire sans comprendre tous les détails mathématiques, et juste l'apprécier pour ces aspects historiques. En effet, on n'imagine pas l'influence de ces pratiques sur notre monde actuel, encore moins l'impact de ces découvertes sur l'Histoire. Voici un extrait de la quatrième de couverture illustrant ce propos : « *De l'arrestation de Marie Stuart, à l'entrée en guerre des États-Unis en 1942, [en passant par] des messages cachés dans la chevelure des émissaires grecs aux salles de calcul de la National Security, ce livre, aussi excitant qu'un roman policier, déploie une véritable fresque historique.* »

Ce livre en huit parties suit globalement l'ordre chronologique des découvertes des différents codes abordés. Il contient également un bon nombre d'illustrations et de schémas, permettant au lecteur de bien comprendre le fonctionnement des codes, même les plus complexes. À la fin de l'ouvrage se trouvent dix textes à décrypter. À l'origine, un prix de 10 000 £ était offert à la première personne qui en viendrait à bout… La récompense fut attribuée au bout d'un an[4]. Mais rien ne vous empêche cependant de vous y atteler pour votre plaisir personnel.

Simon Singh est un vulgarisateur qui prouve qu'il sait bien manier la plume, laissant souvent un suspens insoutenable qui nous entraîne dans une lecture sans fin. Il arrive à faire passer, avec ses mots, les émotions ressenties par les cryptanalystes lorsque le code commence à se briser et que la découverte de la clé ne tient qu'à un fil. Vous vibrerez sûrement d'angoisse lors de la lecture du chapitre 4, « *À l'attaque d'Enigma* », lorsque la France décide dans un premier temps d'ignorer les informations obtenues sur cette machine par le biais de traîtres au régime nazi[5], et de les donner à la Pologne qui, pour retarder une invasion de son pays, créera son propre bureau du chiffre. L'auteur écrit alors : « *Si la nécessité est la mère de l'invention, peut-être que l'angoisse est-elle mère de la cryptanalyse.* ».

On découvre un monde rempli de mystères. Des textes codés restent encore indéchiffrés, comme le chiffre de Beale dont la légende raconte qu'il mènerait à un véritable trésor. Le chiffrement RSA[6] n'aurait-il pas été en réalité découvert en trente minutes par un mathématicien britannique d'un établissement top secret ? Existe-t-il un code absolument inviolable appelé cryptographie quantique dont le fonctionnement reposerait sur des photons ? L'histoire des codes secrets est en réalité bien plus secrète que les codes secrets eux-mêmes…

Ressource : le site de Simon Singh : .

Clémence Fillon

G T C

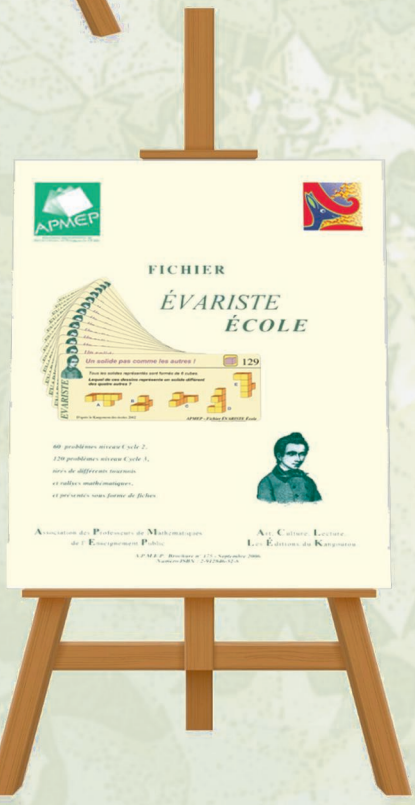
© APMEP *Octobre 2021*

4. Pour en savoir plus sur les gagnants du défi : .
5. L'officier allemand Hans-Thilo Schmidt décida de trahir son pays en communiquant des informations aux Alliés, dont la France. Il échangera notamment avec un homme des services secrets français dont le nom de code est Rex.
6. Le chiffrement RSA est l'acronyme des initiales de ses trois inventeurs : Ronald Rivest, Adi Shamir et Leonard Adleman. Datant de 1977, cet algorithme de cryptographie asymétrique est très utilisé dans le commerce électronique, et plus généralement pour échanger des données confidentielles sur l'internet.



Comment faire du calcul un jeu d'enfant
Cycles 2, 3 et 4

De nombreux jeux, classiques et moins classiques sur les nombres et le calcul.
Pour chaque jeu, sont présentés le matériel utilisé, la règle du jeu, des exemples, des commentaires mais aussi des illustrations humoristiques.
Toutes les cartes et planches de jeux sont téléchargeables sur le site de l'APMEP.



Fichier Évariste École
Cycles 2 et 3

Des problèmes « résistants et maîtrisables », issus de Rallyes et tournois mathématiques, abordant de nombreux thèmes : numérique, géométrique, dénombrement, mesure et logique. À chaque problème, sont ajoutés la réponse, des coups de pouce et des prolongements possibles.
Un index permet de choisir les problèmes en fonction des objectifs pédagogiques.



Match Point

Un seul jeu de trente-cinq pièces et, en cinq parties, quatre-vingt-deux fiches d'activités riches, variées et progressives, accessibles dès le cycle 2 et pouvant être aussi pratiquées en famille ou individuellement.
De nombreux défis à relever de « 6 à 106 ans » !

Sommaire

Spécial « Premier degré »

Éditorial, présentation, mode d'emploi et sommaires 1

Éditorial 1

Présentation 2

Mode d'emploi 5

Sommaires 6

Avec les élèves 11

Décomposition des nombres en maternelle
Laurence Le Corf 11

Mouvement mathématique en Bretagne
Claudie Asselain-Missenard 18

La *course aux nombres*
Anne-France Acciari 28

Le Rallye Mathématique Transalpin
Christine Le Moal 31

Des caches multitâches
François Drouin 39

M@ths en-vie
Carole Cortay et Christophe Gilger 44

Math & Manips en géométrie au cycle 1
M.-F. Guissard, V. Henry, P. Lambrecht, P. Van Geet & S. Vansimpsen 52

Le nuancier de couleurs en cycle 3
Agnès Gateau 65

Le « coin marchande »
Élisabeth Boisson et Catherine Würtz 74

Ouvertures 85

MathCityMap
Groupe *Numatécol*, IREM de Lyon 85

Géométrie de bout de ficelle dans la cour de récré
Bernard Parzysz 92

Mathématiques contées
Marie Lhuissier 99

Avec le puzzle de Marine
François Drouin 108

Le jeu du manchon
Thérèse Escoffet & Christine Oudin 117

Ressources pour un professeur des écoles
Agnès Gateau 123

Récréations 127

Trois jeux de la brochure *Jeux Écollège 4*
Françoise Bertrand 127

Match Point une brochure *JEUX* pas comme les autres !
Jean Fromentin 134

Opinions 136

Vergnaud *versus* Singapour
Richard Cabassut 136

Manipuler en mathématiques. . . oui mais
Joël Briand 142

Au fil du temps 146

Matériaux pour une documentation 146

CERCLE DE RECHERCHE ET D'ACTION PÉDAGOGIQUES

MATh.en.JEANS

APMEP
www.apmep.fr

CultureMATH

