Brevet de technicien supérieur session 2012
Agencement de l'environnement architectural

Les deux exercices sont indépendants

Exercice 1 **9 points**

Un thermomètre de Galilée est composé d'un cylindre contenant un liquide dans lequel sont immergées des boules de différentes masses. Lorsque la température T varie, les boules se mettent en mouvement. On se propose d'étudier le mouvement d'une boule pendant un temps t dans ce type de thermomètre.

Nous admettons ici que la vitesse v en m.s^{-1} de cette boule, en fonction du temps, est la solution de l'équation différentielle

$$\text{(E)} : \qquad y' = cg - \frac{k}{m}y$$

vérifiant : $v(0) = 0$, où :
c est une constante liée aux masses volumiques du liquide et de la boule ;
g est la constante de gravitation ;
k est le coefficient de frottement du liquide sur la boule ;
m est la masse de la boule.

On donne les valeurs numériques suivantes :
$m = 0{,}030\,19$ kg ; $k = 9\ .\ 10^{-3}$ kg.s^{-1} ; $c = 0{,}001$ et $g = 9{,}81$ m.s^{-2}.

Partie A

1. Montrer, qu'avec ces valeurs numériques, l'équation différentielle (E) s'écrit (en arrondissant les coefficients de cette équation à 10^{-2} près) :

$$\text{(E)} : \qquad y' = 0{,}01 - 0{,}3y$$

2. Résoudre l'équation différentielle :

$$(\text{E}_0) : \qquad y' + 0{,}3y = 0$$

   où y est une fonction de la variable t, définie et dérivable sur l'intervalle $[0~;~+\infty[$ et y' est la fonction dérivée de la fonction y.

3. Vérifier que la fonction $h(t) = \dfrac{1}{30}$ est solution particulière de l'équation (E).
4. En déduire la solution générale de l'équation différentielle (E) sur l'intervalle $[0~;~+\infty[$.
5. Déterminer la fonction v solution de l'équation différentielle (E) sur l'intervalle $[0~;~+\infty[$ telle que : $v(0) = 0$.

Partie B

On admet que pour tout t dans $[0~;~+\infty[$:

$$v(t) = \frac{1}{30}\left(1 - \text{e}^{-0{,}3t}\right).$$

1. Montrer que la fonction dérivée v' de sur $[0~;~+\infty[$ est définie par :
   $v'(t) = 0{,}01\text{e}^{-0{,}3t}$ puis en déduire le sens de variation de v sur son ensemble de définition.

2. Tracer la courbe représentative de v dans un repère orthogonal $\left(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ pour des valeurs de t comprises entre 0 et 10 s, sur le document annexe.

   (Unités graphiques : 1 cm représente 0,5 s sur l'axe des abscisses et 1 cm représente 0,003 $\mathrm{m.s^{-1}}$ sur l'axe des ordonnées.).
3. Déterminer la limite v_l, de la vitesse.
4. À l'aide du graphique puis par le calcul, déterminer à partir de quelle valeur de t la vitesse de la boule est égale à 90 % de v_l, (arrondir la réponse à $0,1$ seconde près).

Exercice 2 **11 points**

La fabrication d'une boule d'un thermomètre de Galilée requiert une certaine précision, dans la mesure où les masses des différentes boules diffèrent de peu.
Une machine produit des boules dont la masse volumique idéale doit être $900,92 \mathrm{kg/m^3}$.

Préliminaire

Déterminer, au centième près, la masse volumique d'une boule sachant que le rayon de cette boule est de 0,02 m et de masse 0,030 19 kg. Le volume est rappelé :
$V = \dfrac{4}{3}\pi R^3$.

Partie A

On prélève, au hasard, un échantillon de 250 boules, dont on calcule les masses volumiques. On obtient la série suivante :

Masse volumique en $\mathrm{kg/m^3}$	[900,9 ; 900,91[	[900,91 ; 900,915[	[900,915 ; 900,92[	[900,92 ; 900,925[	[900,925 ; 900,93[	[900,93 ; 900,94]
Effectif	2	8	125	105	9	1

1. À l'aide de la calculatrice déterminer la masse volumique moyenne, arrondie au centième, et l'écart-type, arrondi au millième, de cette série.
2. Une boule est retenue si sa masse volumique appartient à l'intervalle :

   [900,915 ; 900,925[.

   Quel est le pourcentage de boules retenues dans cet échantillon ?

Partie B

On note X la variable aléatoire qui, à une boule prise au hasard dans la production, associe sa masse volumique et on admet que X suit une loi normale de moyenne $m = 900,92$ et d'écart type $\sigma = 0,0022$.

1. Calculer, à 10^{-2} près, la probabilité $P(900,915 \leqslant X \leqslant 900,925)$.
2. En déduire la probabilité, toujours à 10^{-2} près, qu'une boule, prise au hasard dans la production, ne soit pas retenue.

Partie C

Ces boules sont conditionnées par lots de 200. On considère que le nombre de boules produites est suffisamment important pour permettre d'assimiler un lot à un tirage de 200 boules choisies au hasard et avec remise.

On suppose désormais que la probabilité qu'une boule, prise au hasard dans la production, ne soit pas retenue est $0,02$.

On désigne par Y la variable aléatoire qui, à chaque lot de 200 boules, associe le nombre de boules non retenues.

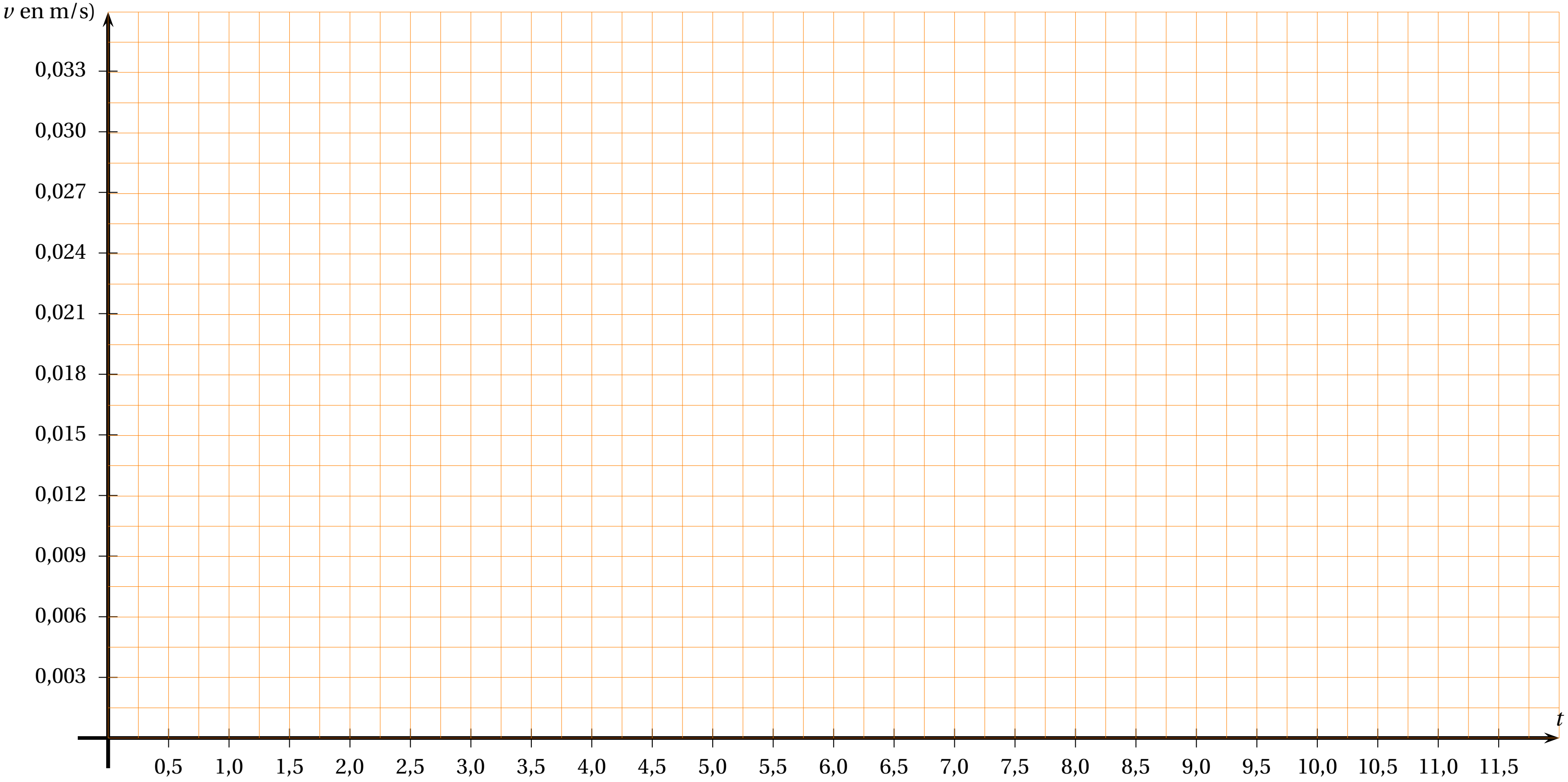
1. Justifier le fait que la variable Y suit une loi binomiale et en donner les paramètres.
2. Calculer, à 10^{-3} près, les probabilités $P(Y=0)$ et $P(Y)>1)$.

Partie D

On décide d'approcher la loi de probabilité de Y par une loi de Poisson notée Z.

1. Quel est le paramètre de cette loi ?
2. Quelle est la probabilité que, dans un lot de 200 boules, il y ait exactement 2 boules non retenues ?
3. Quelle est la probabilité que, dans un lot de 200 boules, il y ait au moins 4 boules non retenues ?

Annexe


v en m/s)
0,033
0,030
0,027
0,024
0,021
0,018
0,015
0,012
0,009
0,006
0,003
t
0,5 1,0 1,5 2,0 2,5 3,0 3,5 4,0 4,5 5,0 5,5 6,0 6,5 7,0 7,5 8,0 8,5 9,0 9,5 10,0 10,5 11,0 11,5