Concours ADVANCE ESME–EPITA–IPSA

5 mai 2012 – Calculatrice interdite

ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

- L'épreuve de Mathématiques se déroule sur 1h30 et est constituée de 8 questions obligatoires et de 4 questions à choisir parmi les questions numérotées de 9 à 16.
- Chaque question comporte cinq propositions : A, B, C, D, E.
- Pour chaque question :
  — Vous cochez la (ou les) case(s) V de la fiche optique correspondant à toute proposition que vous jugez vraie.
  — Vous cochez la (ou les) case(s) F de la fiche optique correspondant à toute proposition que vous jugez fausse.
  — Les cinq propositions peuvent être toutes vraies ou toutes fausses
- Toute case correctement remplie entraîne une bonification. Toute erreur est pénalisée.

Il est donc préféré une absence de réponse à une réponse inexacte.

Questions obligatoires

---

1. Pour tout nombre réel x, on a

(A) $2x^2 - x - 1 = (x-1)\left(x - \frac{1}{2}\right)$

(B) $x^2 + 2x + 5 \geqslant 0$

(C) $3 - 2x - x^2 \geqslant 0$ si et seulement si $x \in [-3\ ;\ 1]$

(D) Si $x \geqslant 1$ alors $3 - 2x - x^2 \geqslant 0$

(E) Si $x^2 - 5x + 6 = 0$ alors $x \geqslant 0$

---

2. Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$, telle que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 3$.

Alors :

(A) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 3$

(B) $\lim\limits_{u \to +\infty} f(2u) = 3$

(C) $\lim\limits_{y \to +\infty} f(y+1) = 4$

(D) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 0$

(E) Il existe $a \in [0\ ;\ +\infty[$ tel que pour tout $x \in [a\ ;\ +\infty[,\ f(x) \leqslant x$

3. Les fonctions suivantes sont dérivables en $x = 0$

(A) $x \longmapsto x|x|$

(B) $x \longmapsto |x|\sin x$

(C) $x \longmapsto \sin|x|$

(D) $\left\{\begin{array}{lllll} x & \longmapsto & x^2+2 & \text{si} & x \geqslant 0\\ x & \longmapsto & x^3-x^2+2 & \text{si} & x < 0\end{array}\right.$

(E) $\left\{\begin{array}{lllll} x & \longmapsto & x+2 & \text{si} & x \geqslant 0\\ x & \longmapsto & x-2 & \text{si} & x < 0\end{array}\right.$

---

4. Soit f définie sur $\mathbb{R}^*$ par : $f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x}{x^2}$. Alors :

(A) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

(B) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} = 0$

(C) f est décroissante sur $]0\,;2[$

(D) f est croissante sur $]-\infty\,;\,0[$

(E) L'équation de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse $x = 1$ est $y = -\mathrm{e}x + 2\mathrm{e}$

5.

(A) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 2t\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}$

(B) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin 2t\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}$

(C) $\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} \ln t\,\mathrm{d}t = 1$

(D) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin t}{\cos^2 t}\,\mathrm{d}t = 1$

(E) $\displaystyle\int_0^1 t\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t = 1$

6.

(A) Pour tout $x \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ $\quad\ln\left(2^x\right) = x\ln 2$

(B) Pour tout $x \in]0\,;\,+\infty[$ $\quad\ln x = 2\ln\sqrt{x}$

(C) Pour tout $x \in]0\,;\,+\infty[$ $\quad\ln\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\right) = -\ln\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x}\right)$

(D) Pour tout $x \in]0\,;\,+\infty[$ $\quad\ln\left(x^2+4x+4\right) = 2\ln(x+2)$

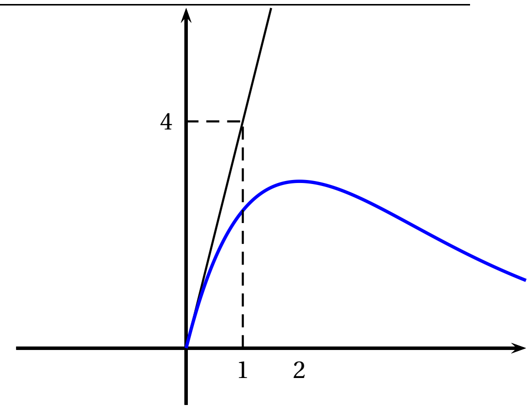
(E) Pour tout $x \in]0\,;\,+\infty[$ $\quad[\ln(x+1)]^2 = \ln(2x+2)$

7. Soit C la courbe représentative d'une fonction f définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ dont l'allure est donnée ci-contre :

L'expression de f est de la forme :

$f(x) = (ax + b)\mathrm{e}^{cx}$.

Alors :



(A) $c < 0$

(B) $f'(0) = 4$

(C) $f'(2) = 0$

(D) Pour tout $x \in [0\ ;\ +\infty[$, $f'(x) = (ax + a + b)\mathrm{e}^{cx}$

(E) Pour tout $x \in [0\ ;\ +\infty[$, $f(x) = 4x\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x}$

---

8. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} \text{si } x \leqslant 1 & f(x) = x^2 - 2x - 3 \\ \text{si } x > 1 & f(x) = \dfrac{x-5}{x} \end{cases}$$

On note C sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

Alors :

(A) f est dérivable en $x = 1$

(B) C admet une demi-tangente horizontale au point I$(1\ ;\ -4)$

(C) L'équation $f(x) = 0$ admet exactement trois solutions

(D) La droite d'équation $x = 0$ est asymptote à C

(E) La droite d'équation $y = 1$ est asymptote à C

Questions à choisir (4 questions à choisir parmi les suivantes)

---

9. Soit (u_n) une suite géométrique de premier terme $u_0 = 1$ et de raison $q \in]0 ; +\infty[$.

On note $S_n = u_0 + u_1 + \ldots + u_n$.

Alors :

(A) S'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $u^n > 2012$ alors $q > 1$

(B) Si $q < 1$ alors il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $0 < u_n < \dfrac{1}{2}$

(C) Si $q > 1$ alors $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} S_n = +\infty$

(D) Si $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} S_n = 2$ alors $q = \dfrac{1}{2}$

(E) Si $q = 2$ alors $S_4 = 15$

---

10. Soit la suite réelle (u_n) définie par $u_0 \in]1 ; +\infty[$ et la relation de récurrence :

$$\text{pour tout } n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = \sqrt{3u_n - 2}$$

Alors :

(A) (u_n) est monotone

(B) (u_n) est minorée par 1

(C) Si $u_0 \in]1 ; 2[$ (u_n) converge vers 1

(D) Si $u_0 \in]1 ; 2[$ (u_n) converge vers 2

(E) Si $u_0 \in]2 ; +\infty[$ (u_n) converge vers 2

---

11. Dans une mare vivent des grenouilles vertes et des rainettes. 30 % des grenouilles sont des rainettes et donc 70 % des grenouilles sont des grenouilles vertes.

Un héron mange 10 % des rainettes et 20 % des grenouilles vertes.

Alors la probabilité

(A) qu'une rainette soit mangée par le héron est $\dfrac{1}{10}$

(B) qu'une grenouille verte soit mangée par le héron est $\dfrac{1}{5}$

(C) qu'une grenouille soit mangée par le héron est $\dfrac{13}{21}$

(D) qu'une grenouille soit une rainette et mangée par le héron est $\dfrac{3}{100}$

(E) qu'une grenouille mangée par le héron soit une rainette est $\dfrac{63}{100}$

12. Une compagnie aérienne dessert 6 villes (Rennes, Brest, Nantes, Lorient, Quimper, Morlaix). On appelle ligne aérienne tout trajet joignant 2 villes. (Rennes-Brest et Brest-Rennes désignent la même ligne).

(A) La compagnie a 30 lignes en service

(B) La compagnie a 15 lignes en service

Pendant l'été la compagnie envisage d'augmenter le nombre de villes desservies

(C) Si la compagnie décide d'assurer 36 lignes alors le nombre de villes desservies sera 9

(D) Si la compagnie décide d'assurer 45 lignes alors le nombre de villes desservies sera 10

(E) La compagnie ne peut envisager d'assurer 32 lignes

---

13. On considère un triangle MNP et les points I, J, K tels que :

I est le barycentre de (M, 2), (P, 1), J est le barycentre de (M, 1), (N, 2) et K est le barycentre de (N, -4), (P,1).

Alors :

(A) N est le barycentre de (K, 3),(P, 1)

(B) J est le barycentre de (M, 2),(K, 3),(P, 1)

(C) l, J et K sont alignés

(D) J est le barycentre de (I, 1), (K, 1)

(E) J est le milieu de [I, K]

---

14. Pour tout nombre complexe z, $\text{Re}(z)$ désigne la partie réelle de z, $\text{Im}(z)$ sa partie imaginaire et $\arg(z)$ son argument.

Alors :

(A) $\text{Re}\left((1+\text{i})^4\right) = 4\,\text{Re}(1+\text{i})$

(B) $\arg\left((1+\text{i})^4\right) = 4\arg(1+\text{i}) \quad \text{modulo}\, 2\pi$

(C) $\text{Im}((-1+\text{i}\sqrt{3})^3) = 3\,\text{Im}(-1+\text{i}\sqrt{3})$

(D) $\left|(-1+\text{i}\sqrt{3})^3\right| = 3\left|-1+\text{i}\sqrt{3}\right|$

(E) $\dfrac{(1+\text{i})^4}{\left(-1+\text{i}\sqrt{3}\right)^3} = -\dfrac{1}{2}$

15. Soit $x \in \mathbb{R}$. On pose $z = \cos x + \mathrm{i}\sin x$ et $z' = \sin\left(x + \dfrac{\pi}{2}\right) + \mathrm{i}\cos\left(x + \dfrac{\pi}{2}\right)$

Alors :

(A) $z = z'$

(B) $z + z'$ est réel

(C) $z - z'$ est imaginaire pur

(D) $zz' = 1$

(E) $\arg\left(\dfrac{z}{z'}\right) = 2\arg z$

16. On considère la fonction f définie sur $[0\,;\,10]$ par : $f(x) = -6x^2 + 6x - 5$.

On note C la courbe représentative de f dans un repère orthonormé, et T_M la tangente à C au point M de C.

Alors :

(A) Il existe un point M de C tel que T_M soit parallèle à l'axe des abscisses

(B) Il existe un point M de C tel que T_M soit parallèle à la droite IJ où $\mathrm{I}(1\,;\,0)$ $\mathrm{J}(4\,;\,3)$

(C) Il existe un point M de C tel que T_M ait pour coefficient directeur 8

(D) Il existe deux points distincts M et N de C tels que T_M et T_N soient parallèles

(E) Il existe deux points distincts M et N de C tels que T_M et T_N soient perpendiculaires