Les rapports des groupes de travail de Caen

La géométrie

Animateur : GUINET (E.N.G. Evreux)

Nous nous proposons d'étudier certaines propriétés classiques des carrés *magiques*, puis certaines propriétés géométriques moins connues, qui ont donné lieu à des applications au C.M. 2.

Rappelons qu'un carré magique est un tableau carré de nombres généralement naturels tel que la somme en ligne, colonne, diagonale, est partout la même.

On appellera cette somme : la somme magique.

Si les diagonales ne sont pas magiques, on dira que le carré est *semi-magique*.

Dans ce qui suit, nous ne considérerons, sauf indication contraire, que les carrés magiques dont les éléments sont les termes d'une progression arithmétique.

I — Voici quelques propriétés algébriques générales que nous ne démontrerons pas, pour des raisons évidentes.

C_n est un carré magique de "côté" n formé des termes de la suite $1, 2, ..., n^2$.

Si S_n désigne la somme magique, il est clair que :

$$S_n = \frac{1 + 2 + ... + n^2}{n} = \frac{n(n^2 + 1)}{2}$$

Ainsi $S_3 = 15$, $S_4 = 34$, $S_5 = 65$.

Si on ajoute un même entier a à tous les termes d'un carré magique C_n, le carré obtenu est encore magique.

Dans ce cas, la somme magique est : $S'_n = S_n + na$

Si on multiplie chaque terme d'un carré magique par un entier k, on obtient un carré magique et la somme magique est : $S'_n = k.S_n$

Il s'ensuit, de tout ce qui précède, que si C_n désigne un carré magique dont les termes sont $1, 2, ..., n^2$, on obtient un carré magique en remplaçant chacun de ses termes par ceux d'une suite arithmétique $u_1, u_2, ..., u_{n^2}$.

Dans ce cas, la somme magique devient :

$$S = \frac{(u_1 + u_{n^2})}{2} n$$

Si on "ajoute" deux carrés magiques de même ordre, on obtient un carré magique de somme magique S + S'.

Remarque : Si on considère l'ensemble des carrés magiques d'ordre n construits sur Z, on obtient un Z-module.

Nous avons essayé au C.M.2, de faire découvrir et surtout expliquer certaines des propriétés ci-dessus.

Voici un des exemples que nous avons proposés.

Je passe sous silence les remarques des élèves qui prouvent combien le raisonnement était construit.

Nous avons donné le tableau :

			12
	4		15
	13	11	
		10	x

Nous avons supposé que la somme magique est 34. La croix (x) désigne le nombre cherché en premier. Ceci a amené, compte tenu de la somme magique, les élèves à décomposer certains nombres en somme de deux nombres, ce qui a donné les couples :

(1,6), (2,5), ~~(3,4)~~ en colonne (4ème)
(16,3), ~~(15,4)~~, (14,5), ~~(13,6)~~, (12,7) en diagonale.

5 est le seul compatible etc ...

Il faut veiller à ce que les élèves ne soient pas tentés de trouver les nombres au hasard.

Nous avons ajouté 5 à chacun des termes du carré magique obtenu et demandé la remarque s'imposant ainsi que l'explication.

Nous avons multiplié par 3 chacun des termes, puis ajouté les deux tableaux.

Les remarques concernant les propriétés ci-dessus font évidemment appel aux propriétés de l'additon et de la multiplication.

II — *Construction des carrés magiques*

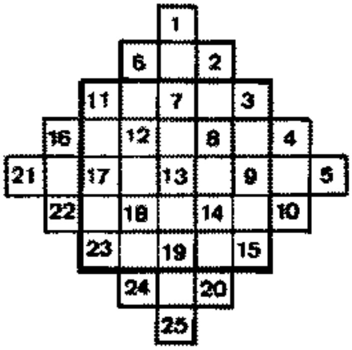
Il n'existe pas de procédés simples et généraux, sauf peut-être en ce qui concerne les carrés semi-magiques, pour engendrer des carrés magiques d'ordre quelconque.

Voici deux méthodes :

1. Méthode due à Bachet de Méziriac (écrivain des 16ème et 17ème siècles à qui l'on doit : Problèmes plaisants et délectables qui se font par les nombres) et valables uniquement pour les carrés d'ordre impair.

Nous allons construire un carré d'ordre 5 ($S_5 = 65$).

On écrit la suite naturelle de 1 à 25 dans le "moule" ci-dessous à gauche, les nombres entrant dans le cadre se trouvent placés.



11	24	7	20	3
4	12	25	8	16
17	5	13	21	9
10	18	1	14	22
23	6	19	2	15

Par simple déplacement des éléments extérieurs au cadre vers les cases vides, on obtient le carré magique ci-dessus à droite.

2. Méthode due à La Hire, mathématicien français des 17ème et 18ème siècles, applicable à la construction des carrés magiques d'ordre impair ou multiple de 4.

En ce qui concerne les carrés d'ordre pair non multiples de 4, il n'existe pas, à ma connaissance, de méthode simple.

La méthode repose sur le principe suivant :

Etant donné la suite naturelle $\{u_{n^2}\} = \{1, 2, ..., n^2\}$ et les suites arithmétiques :

$$\{v_n\} = \{1, 2, ..., n\}$$
$$\{s_n\} = \{0, n, 2n, ... (n-1)n\}$$

il est évident que chacun des termes de la suite $\{u_{n^2}\}$ peut être obtenu par addition d'un terme de la suite $\{v_n\}$ avec un terme de la suite $\{s_n\}$.

Ainsi, on est amené à construire deux carrés magiques d'ordre n, le premier étant constitué des éléments de la suite $\{v_n\}$, chaque élément étant répété n fois, le second formé de la même manière par les éléments de la suite $\{s_n\}$. Par "addition" de ces deux carrés magiques, on obtient un carré magique d'ordre n dont les termes sont ceux de la suite $\{u_{n^2}\}$, à condition qu'il n'y ait pas de répétition.

Voici deux exemples :

a) Carré d'ordre 4

On va construire deux carrés magiques :
le premier avec les termes de la suite $\{1, 2, 3, 4\}$ et le second avec les termes de la suite $\{0, 4, 8, 12\}$.

Le carré I est contruit de la manière suivante :
dans la première ligne, on inscrit la suite $\{1, 2, 3, 4\}$ dans n'importe quel ordre, dans la deuxième ligne on écrit la suite dans l'ordre inverse. La troisième ligne s'obtient en permutant les deux premiers termes de la

première ligne, puis les deux derniers termes. La quatrième ligne s'obtient en écrivant la troisième dans l'ordre inverse.

Le carré II se construit de la même façon, mais par un balayage vertical et non horizontal.

Le carré III est magique d'ordre quatre.

4	1	2	3
3	2	1	4
1	4	3	2
2	3	4	1

I

0	8	12	4
12	4	0	8
4	12	8	0
8	0	4	12

II

4	9	14	7
15	6	1	12
5	16	11	2
10	3	8	13

III

b) Carré d'ordre 5

On va construire deux carrés à partir des suites {1, 2, 3, 4, 5} et {0, 5, 10, 15, 20}.

Le carré IV est construit de la manière suivante :

On écrit dans la première ligne la suite 1, 2, 3, 4, 5 dans un ordre quelconque. La seconde ligne est obtenue par une permutation circulaire de la première ligne à partir du troisième terme. On répète ce procédé jusqu'à la dernière ligne.

Le carré V s'obtient de la même façon, mais par une permutation circulaire sur les colonnes ou bien par une permutation sur les lignes, mais à partir du quatrième terme.

4	5	3	2	1
3	2	1	4	5
1	4	5	3	2
5	3	2	1	4
2	1	4	5	3

IV

10	0	5	20	15
20	15	10	0	5
0	5	20	15	10
15	10	0	5	20
5	20	15	10	0

V

14	5	8	22	16
23	17	11	4	10
1	9	25	18	12
20	13	2	6	24
7	21	19	15	3

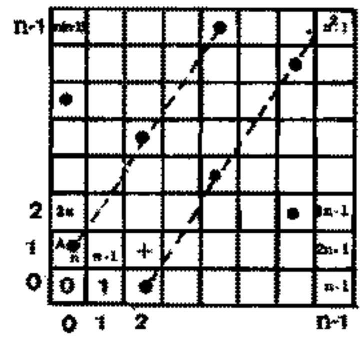
VI

III — *Procédé géométrique*

Les propriétés géométriques de certains tableaux de nombres sont beaucoup moins connues que les propriétés algébriques, mais au moins aussi intéressantes.

Afin de démontrer ces propriétés, nous allons donner un certain nombre de définitions.

Considérons un carré de côté n et numérotons les colonnes et les lignes de 0 à n−1.
Ainsi, la case indiquée par une croix (+) a pour coordonnées (2,1).
Par analogie à la géométrie, nous parlerons de droite, vecteur, direction, etc ...
Au lieu de case, nous dirons point.



Etant donné un vecteur $\vec{u}\binom{a}{b}$, un point A $\binom{x_0}{y_0}$, un naturel λ $(0 \leqslant \lambda \leqslant n-1)$: nous appellerons droite passant par A l'ensemble des points $\binom{x}{y}$ tels que :

$$x = (x_0 + \lambda a) \pmod n$$
$$y = (y_0 + \lambda b) \pmod n$$

Son vecteur directeur est $\vec{u}$.

Deux droites seront parallèles si leurs vecteurs directeurs sont linéairement dépendants.

Tout ensemble de droites parallèles sera appelé direction.

Plaçons, dans le carré de côté n, la suite naturelle 0, 1, ... n^2-1 dans cet ordre.

La case de coordonnées (α,β) sera occupée par le nombre $\alpha + n\beta$.

Nous allons démontrer que si n est premier, toutes les directions, sauf deux, sont magiques.

La somme magique est évidemment $\dfrac{n(n^2-1)}{2}$ puisque le premier terme de la suite est zéro.

Pour démontrer cette propriété, nous allons utiliser le théorème suivant : n est un naturel premier, p est un naturel non multiple de n. Les restes de la divison par n des termes de la suite : 0, p, 2p, ... (n−1)p sont dans un ordre quelconque 0, 1, 2, ..., n−1.

En effet, supposons que deux termes de la suite précédente donnent le même reste dans leur division par n. Par exemple k p et k' p.

Alors $k\,p - k'\,p = 0 \pmod n \Rightarrow (k-k')p = 0 \pmod n$.

Comme n est premier, et p non multiple de n, $k - k' = 0 \pmod n$ ce qui est impossible.

Corollaire 1

Les restes de la division par n de la suite 0, ap, 2a p, ..., (n−1)a p, (a étant un naturel non multiple de n) sont dans un ordre quelconque 0, 1, 2, ..., n−1.

Corollaire 2

Dans les mêmes hypothèses que précédemment, quel que soit le naturel b, les restes de la division par n de la suite b, b + a p, ..., b + (n—1)a p, sont dans un ordre quelconque 0, 1, 2, ..., n—1.

Considérons dans un carré de côté n (n premier) la case de coordonnées (α, β) et une direction de vecteur $\vec{u}(a, b)$.

La droite passant par (α, β) de direction $\vec{u}$ est l'ensemble :

(α, β) ; $(\alpha+a, \beta+b)$; $(\alpha+2a, \beta+2b)$; ..$(\alpha+pa, \beta+pb)$; ..$(\alpha+(n-1)a, \beta+(n-1)b)$

chacun des éléments étant divisé euclidiennement par n, on obtient :

(a_1, b_1) ; (a_2, b_2) ; (a_3, b_3) ; .. (a_{p+1}, b_{p+1}) ; ... ; (a_n, b_n) .

D'après le corollaire 2, chacun des a_i et b_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$ est dans un ordre quelconque 0, 1, 2, ..., n—1 si $a \neq 0$ et $b \neq 0$.

La case (a_i, b_i) est occupée par le naturel $a_i + n\, b_i$. Faisons la somme, on obtient :

$$\sum_{i=1}^{i=n} (a_i + n\, b_i) = \sum_{i=1}^{i=n} a_i + n \sum_{i=1}^{n} b_i$$

$$\sum_{i=1}^{i=n} (a_i + n\, b_i) = (1 + 2 + ... + n-1) + n(1 + 2 + ... + n-1)$$

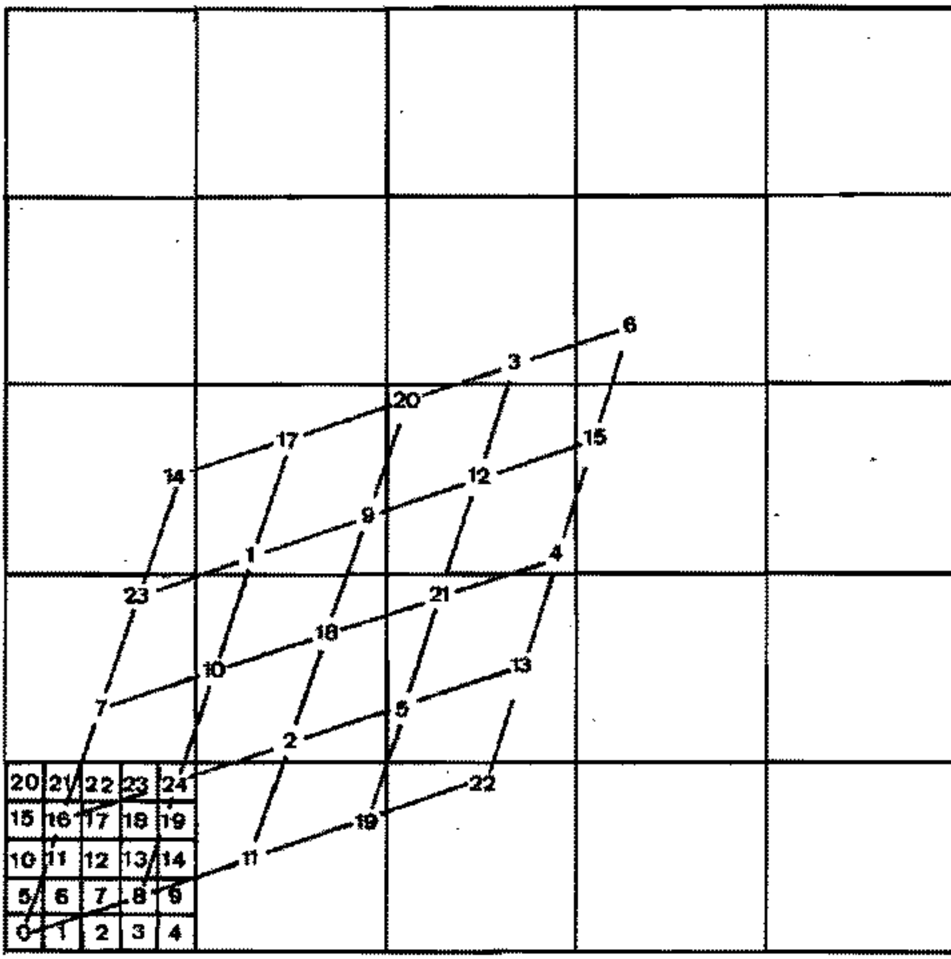
$$= \frac{n(n^2-1)}{2}$$

Ce qui montre que la direction (a,b), si $ab \neq 0$, est une direction magique.

A partir de cette propriété remarquable, on peut construire un carré magique d'ordre n premier par un procédé géométrique.

En effet, il suffit de prendre un point et un vecteur $\vec{u}\binom{a}{b}$ $(ab \neq 0)$ et le vecteur $\vec{u}'\binom{b}{a}$ (ces deux vecteurs étant de directions symétriques par rapport à la diagonale), et de "développer" le carré selon ces deux directions et à partir du point choisi.

Au niveau du CM.2, ceci se présente comme un déplacement sur un quadrillage infini où le carré de côté n se reproduit indéfiniment.

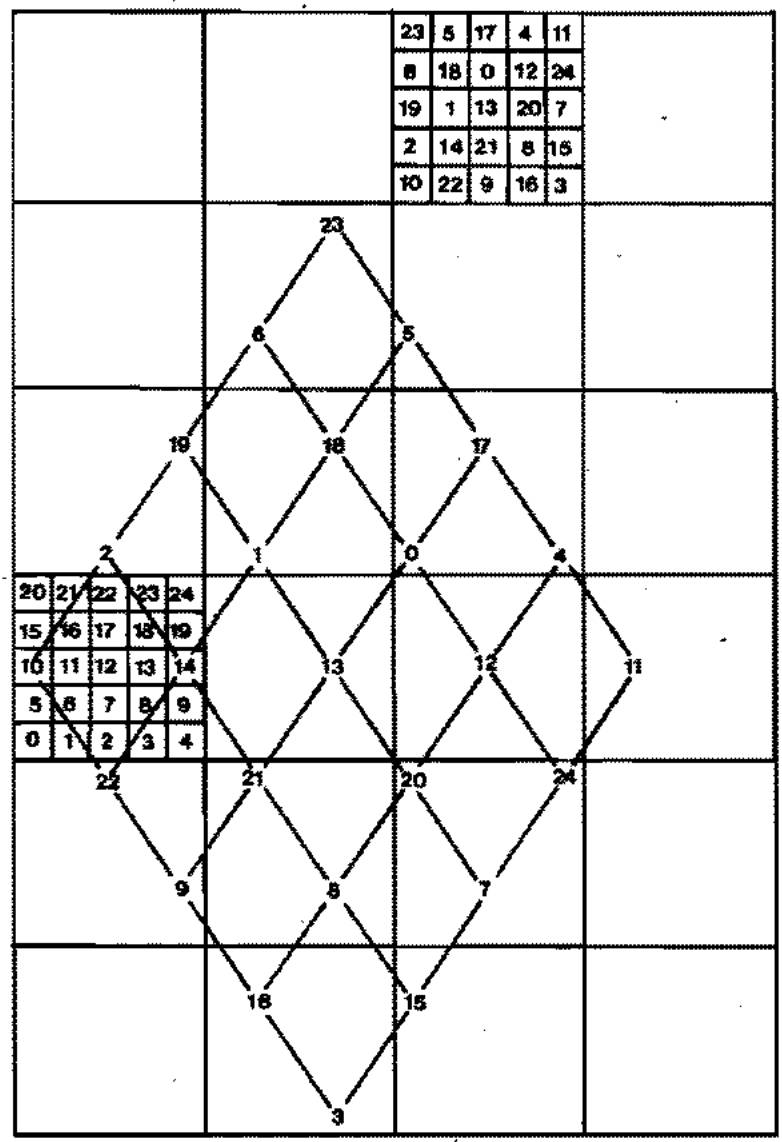


14	17	20	3	6
23	1	9	12	15
7	10	18	21	4
16	24	2	5	13
0	8	11	19	22

On a choisi ici $a = 3$, $b = 1$.

Remarque : Il est possible de développer le carré symétriquement par rapport à une des deux médianes qui sont magiques, le carré obtenu aura une diagonale non magique, sauf si on fait en sorte que le centre du carré initial se transforme en le centre du carré final.

Dans la figure ci-dessous la diagonale secondaire est non magique.



La géométrie à l'école élémentaire

Animateur : D. DUCLOS

La séance débute par les questions suivantes :

— Est-ce qu'on pourrait définir le domaine de la géométrie ?

— Que faut-il proposer aux enfants avant la classe de sixième ?

— En quoi la nouvelle géométrie diffère-t-elle de l'ancienne ? Il s'agit avant tout d'une nouvelle manière plus dynamique de la présenter et de l'exploiter.

Un participant indique trois directions de travail :

— Observation des êtres géométriques
— Construction
— Transformation.

Le problème du *vocabulaire* est alors posé : "côtés égaux", "angle" etc ...

Il faut s'entendre sur un minimum.

Pour les "côtés égaux", la difficulté apparaît lorsqu'on observe deux figures et que l'on veut les superposer. On constate que des segments ont même longueur. Le maître doit être discret, muet, et les enfants ne prononceront pas le mot "égal".

On peut dire côtés isométriques ou de même longueur.

On peut aussi faire de la géométrie sans utiliser de terminologie.

Autre question : On fait des transformations sur des *réseaux*. Est-ce naturel ? Il semble que ce soit très algébrique.

Réponse : C'est une gradation des difficultés. Il est très difficile de travailler sur un plan. D'autre part, pour les coordonnées d'un point, on utilise surtout des couples d'entiers.

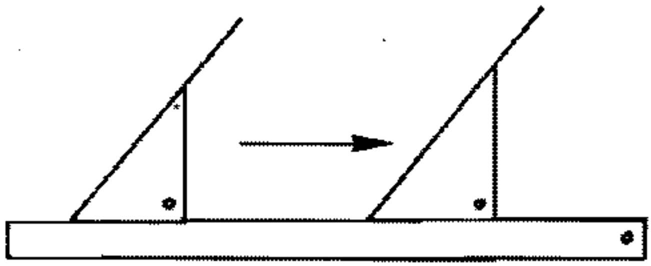
Si on veut travailler sur une figure, on la trace, on la découpe, on étudie son trajet. C'est une sorte d'animation. On peut aller d'une direction dans une autre direction. Il faut faire prendre conscience de la nécessité d'une orientation, de la nécessité d'un repérage (exemple du globe terrestre).

On peut prendre des réseaux finis. Il y a une meilleure imprégnation pédagogique lorsqu'on travaille sur un modèle fini.

On peut craindre de créer des habitudes (pour l'élève) de travailler sur le discret, le discontinu et qu'il n'éprouve par la suite des difficultés pour les réels. Mais il faut démultiplier le processus d'apprentissage et en affinant le quadrillage on fait une approche de **R**.

Le *parallélisme*, comment l'aborder ?

Une règle qui roule (translateur) permet de tracer des parallèles. C'est un appareil à tracer des parallèles de même que la règle est un appareil à tracer des droites.



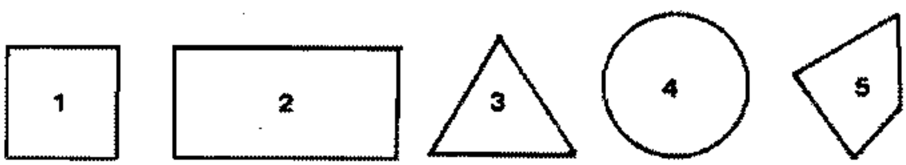
Beaucoup pensent que c'est une notion intuitive et qu'il faut montrer que la distance est constante.

Pour d'autres, la notion de distance sera introduite ultérieurement.

Il serait intéressant de déterminer les notions essentielles, les *concepts primitifs* (rond, carré, ...)

Ainsi à partir d'un ensemble de figures on observe les propriétés suivantes :

La figure n° 1 est un carré.



Il y a 8 façons de le faire coïncider avec son calque.

4 façons pour le rectangle,

une infinité de façons pour le disque.

On fait des pliages, on note les plis (axes de symétrie) d'où une classification des figures.

Le rectangle fait partie de "la famille de ceux qui peuvent coïncider par deux pliages".

On pourrait travailler sur des notions *topologiques* (qui plaisent aux enfants) avant de travailler sur des notions plus difficiles comme la perpendicularité, le parallélisme, la distance ... etc ... C'est une approche plus globale de l'espace.

Exemples :

— La géométrie sur un ballon permet de découvrir la propriété topologique : "un point situé sur la ligne reste sur la ligne après déformation".

— Les notions d'intérieur, d'extérieur, de frontière, de ligne, de connexion permettent la créativité de l'enfant.

— Construire un labyrinthe à quatre régions.

La topologie prépare aussi l'étude des solides :

— "construire un solide à partir d'un patron"

— un ballon et une tasse sans queue sont "topologiquement équivalents" etc ...

— avec une feuille de papier peut-on construire un ballon ?

Un participant pose le problème de la *finalité* de l'enseignement de la géométrie (à l'école élémentaire).

S'agit-il de l'acquisition d'un certain nombre de concepts ? ou de l'adaptation à un problème quelconque, c'est-à-dire l'apprentissage de la mathématisation d'une situation ?

Il semble que ce soit un début de mathématisation et qu'il faille essayer de dégager des concepts qui permettent de classer d'autres situations dans une situation déjà rencontrée.

La *géométrie projective* est un domaine intéressant à explorer. Toutes les propriétés topologiques sont conservées.

Exemples :

- L'ombre par le soleil d'une fenêtre rectangulaire a la forme d'un parallélogramme, quelle que soit la position du plan de projection par rapport au plan de la fenêtre (exceptionnellement un segment de droite).
- La projection plane d'un triangle est toujours un triangle (exceptionnellement un segment de droite).

En projection ponctuelle, lorsque le plan de figure est parallèle au plan de projection, la figure et sa transformée sont homothétiques l'une de l'autre.

Mais cela demande une mise en scène, une installation matérielle spéciale.

Conclusion : Il existe des difficultés pour les maîtres du 1er degré, n'ayant pas de formation spéciale. Ces derniers réclament quelques lignes directrices pour avoir une route commune.

Et l'A.P.M. devrait agir dans ce sens dans les différentes académies.

Les opérateurs numériques

Animateur : M. ROBERT

Les opérateurs numériques étudiés sont des fonctions de N vers N définies par le moule

$$\ldots\ldots * n = \ldots\ldots$$

n étant un naturel quelconque, et $*$ désignant l'une des quatre opérations dans N : addition, soustraction, multiplication, division. S'il s'agit de la division, on opère dans $N^* = N - \{O\}$.

L'opérateur est noté $\overset{*}{n}$.

1 — *Ensemble des opérateurs définis à partir de l'addition*

$$O_+ = \{\overset{+}{0}, \overset{+}{1}, \overset{+}{2}, \overset{+}{3} \ldots\}$$

La loi composition de deux opérateurs est une loi de composition interne dans O_+, on la désigne par $\top$

$$\overset{+}{n} \top \overset{+}{p} = \overset{+}{\overline{n+p}}$$

2 — *Ensemble des opérateurs définis à partir de la soustraction*

$$O_- = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \ldots\}$$

$\top$ est une loi de composition interne dans O_-

$$\bar{n} \top \bar{p} = \overset{-}{\overline{n+p}}$$

3 — *Réunion de ces deux ensembles*

$$O_+ \cup O_- = \{\ldots\bar{3}, \bar{2}, \bar{1}, \overset{\pm}{0}, \overset{+}{1}, \overset{+}{2}, \overset{+}{3}, \ldots\}$$

Dans cet ensemble le composé de la forme $\bar{n} \top \bar{p}$ est toujours défini.

Mais le composé de la forme $\bar{n} \top \overset{+}{p}$ n'est pas défini $\begin{pmatrix} \bar{n} \ne \overset{+}{0} \\ \overset{+}{p} \ne \bar{0} \end{pmatrix}$. C'est une fonction qui n'appartient pas à l'ensemble considéré.

— En "agrandissant" l'ensemble précédent par l'introduction de ces nouveaux composés on montre que $\top$ est une loi de composition interne dans le nouvel ensemble Ω

— On introduit dans Ω une relation d'équivalence $\mathcal{R}$:
Deux éléments de Ω sont équivalents s'il existe un naturel q tel qu'ils donnent la même image à tout naturel $x \geqslant q$.
Ω est alors partagé en classes d'équivalence telles que

$$\{\overset{+}{1}, \bar{1} \top \overset{+}{2}, \quad \bar{2} \top \overset{+}{3}, \ldots\}$$

La relation d'équivalence est compatible avec la loi $\top$. On peut appeler chacune de ces classes "opérateur" en modifiant le sens de ce mot. La loi de composition est alors la loi induite par $\top$ sur les classes. C'est une loi de composition interne dans l'ensemble $\frac{\Omega}{\mathcal{R}}$, qui donne à cet ensemble une structure de groupe abélien isomorphe à $(Z, +)$.

4 — *Ensemble des opérateurs définis à partir de la multiplication*

$$O_{\times} = \{\overset{\times}{0}, \overset{\times}{1}, \overset{\times}{2}, \overset{\times}{3}, \ldots\}$$

$\top$ est une loi de composition interne dans $O_{\times}$, il en est de même dans

$$O^{*}_{\times} = \{\overset{\times}{1}, \overset{\times}{2}, \overset{\times}{3}, \ldots\}$$

5 — *Ensemble des opérateurs définis à partir de la division*

$$O^{*}_{:} = \{\dot{1}, \dot{2}, \dot{3}, \ldots\}$$

$\top$ est une loi de composition interne dans $O^{*}_{:}$

6 — *Réunion des ensembles* $O^{*}_{\times}$ et $O^{*}_{:}$

$$O^{*}_{\times} \cup O^{*}_{:} = \{\ldots\ \dot{3}, \dot{2}, \overset{\times}{\dot{1}}, \overset{\times}{2}, \overset{\times}{3}, \ldots\}$$

Le composé de la forme $\overset{\times}{n} \top \dot{p}$ n'est défini que si un des naturels n ou p est multiple de l'autre.

S'il n'en est pas ainsi, le composé $\overset{\times}{n} \top \dot{p}$ est un nouvel opérateur n'appartenant pas à l'ensemble précédent.

Il est noté $\overset{\times}{\frac{n}{p}}$.

Le composé $\overset{\times}{\frac{6}{4}}$ désigne la même fonction que $\overset{\times}{\frac{3}{2}}$. Donc

$$\overset{\times}{\frac{6}{4}} = \overset{\times}{\frac{3}{2}} \text{ et plus généralement } \overset{\times}{\frac{3}{2}} = \overset{\times}{\frac{3\,k}{2\,k}},\ k \in N^*$$

Nous ne garderons pour cet opérateur que la notation : $\overset{\times}{\frac{3}{2}}$

"Agrandissons" l'ensemble précédent par l'introduction de ces nouveaux opérateurs :

$$\Omega = \{\overset{\times}{\dot{1}}, \overset{\times}{2}, \overset{\times}{3}, \ldots\ \dot{2}, \dot{3}, \ldots, \overset{\times}{\frac{2}{3}}, \overset{\times}{\frac{2}{5}}, \overset{\times}{\frac{2}{7}}, \ldots, \overset{\times}{\frac{3}{2}}, \overset{\times}{\frac{3}{4}}, \overset{\times}{\frac{3}{5}}, \ldots\}$$

Dans cet ensemble un composé du type $\overset{\times}{n} \top \dot{p}$ est toujours défini.

De plus $\dot{2} \top \overset{\times}{3} = \overset{\times}{3} \top \dot{2}$

Mais le composé $\dot{4} \top \overset{\times}{6}$ n'est pas défini. Il en est ainsi pour tout composé de la forme $\dot{n} \top \overset{\times}{p}$ lorsque les naturels n et p ne sont pas premiers entre eux.

Les composés $\overset{\times}{\frac{n}{p}} \top \dot{q}$ et $\overset{\times}{q} \top \overset{\times}{\frac{n}{p}}$ sont toujours définis. Mais les composés

$\frac{\overset{\times}{n}}{p} \top \overset{\times}{q}$, $\dot{q} \top \frac{\overset{\times}{n}}{p}$, $\frac{\overset{\times}{n}}{p} \top \frac{\overset{\times}{q}}{r}$ ne sont en général pas définis.

Ainsi

$$\frac{\overset{\times}{3}}{4} \top \frac{\overset{\times}{4}}{3} \text{ n'est pas défini}$$

Remarque

Nous ne rencontrons pas l'écriture "$\frac{3}{2}$" . Appellerons-nous "fraction" l'opérateur $\frac{\overset{\times}{3}}{2}$?

Si nous avons $\frac{\overset{\times}{3}}{2}$: $4 \mapsto 6$

dirons-nous que la "fraction $\frac{3}{2}$" donne à 4 pour image 6 ?

Pourrons-nous dire que 6 est le "produit" de 4 par la "fraction $\frac{3}{2}$" ?

Ce serait parler d'une opération inconnue faisant intervenir un "nombre" inconnu !

Par convention, nous pouvons écrire l'expression $(4 \times 3) : 2$ sous la forme abrégée $4 \times \frac{3}{2}$, mais alors ce signe "$\times$" n'est pas un signe de multiplication.

D'autre part, nous pouvons appeler "produit" le composé, s'il existe, de deux éléments de Ω par $\top$. Mais désigner cette opération dans Ω par "$\times$" paraît une grave confusion entre une opération sur les naturels et une opération sur les fonctions.

De toutes façons, l'expression "produit de deux fractions" est généralement dépourvue de sens dans Ω.

7 — On peut "agrandir" l'ensemble Ω par l'introduction des opérateurs du type

$$\dot{n} \times \overset{\times}{p}$$

pour lesquels les naturels n et p ne sont pas premiers entre eux.

Nous obtenons ainsi un nouvel ensemble Ω' dans lequel :

a) $\top$ est une loi de composition interne ;

b) on peut introduire une relation d'équivalence $\mathcal{R}$: deux éléments de Ω' sont équivalents s'il existe un naturel p tel qu'ils donnent la même image à tous les multiples de p. Ω' est alors partagé en classes d'équivalence telles que

$$\left\{ \frac{\overset{\times}{2}}{3},\ \dot{6} \top \overset{\times}{4},\ \dot{9} \top \overset{\times}{6},\ \dots \right\}$$

c) la relation d'équivalence est compatible avec la loi $\top$. On peut appeler chacune de ces classes "opérateur" en changeant le sens de ce mot. La loi de composition de ces nouveaux "opérateurs" est alors la loi induite par T sur les classes. C'est une loi de composition interne dans l'ensemble $\Omega'/\mathfrak{R}$, qui donne à cet ensemble une structure de groupe abélien isomorphe à celui des rationnels strictement positifs muni de la multiplication.

Conclusion

Il est souhaitable de ne pas utiliser le mot "fraction" dans l'enseignement élémentaire, de se borner à l'étude des opérateurs n ou n, de la composition de deux opérateurs de même type et, dans quelques cas précis, de la composition de deux opérateurs de types différents.

Opérateurs numériques (suite)

Rapporteurs : Janine TOUPIN et Alain BOUVIER

Pendant et après l'exposé de Madame ROBERT, s'établit une discussion générale entre les participants.

Les participants sont d'accord avec Madame Robert, pour conclure à l'impasse de la construction présentée puisqu'elle ne permet pas de retrouver le corps des nombres rationnels $(2/3 \times 3/2 \neq 1)$.

La lourdeur de cette construction la condamne du point de vue pédagogique ; cette "pseudo-théorie", ne reposant en outre sur aucun fondement mathématique, apparaît comme particulièrement dangereuse.

Dans l'étude et l'exploitation des opérateurs numériques, certains suggèrent d'aborder les restrictions de ces opérateurs, ces dernières étant définies sur une partie de N.

Le problème du recyclage a été soulevé. Les instituteurs présents témoignent de leur inquiétude. Tous s'accordent à trouver ridicule le stage de six mois et jugent indispensable la formation permanente.

Les "recycleurs" sont ainsi amenés à poser les questions suivantes :

— Doit-on bloquer ce stage ?

— Faut-il donner un certain savoir ou traiter de façon prioritaire certains sujets auxquels les recyclés sont sensibles ? par exemple, le signe d'égalité ?

Musique et mathématique à l'école maternelle

Animatrice : Angélique FULIN
Rapporteur : Monique GOUSSIEZ

Le sujet de ce groupe de travail avait suscité un intérêt certain et les inscriptions y étaient nombreuses. Cependant ni l'animatrice ni les participants ne se sont résolus à rester dans les limites qu'il imposait. Les concerts de la veille avaient, de différentes manières, ouvert des horizons plus vastes. Il était impossible de ne pas s'y référer pour apprendre à connaître mieux "*Nos Cousins de la Musique*".

La parenté est lointaine, depuis Pythagore, et nombreux sont ceux qui, aujourd'hui encore, cultivent simultanément les arts libéraux du Quadrivium. L'A.P.M. se devait, dans un moderne souci d'interdisciplinarité, de contribuer à la survivance de l'humanisme ancien. Les temps semblent favorables : nos compositeurs contemporains ont presque tous une formation de mathématiciens ou de physiciens : leur musique s'est dite "sérielle" puis "stochastique". La musique concrète elle-même, tout empirique au départ, dose et varie les sons avec une précision, une perfection mathématique.

Mais qu'en est-il au niveau de l'enseignement ? Nous trouvons là soit simplement des procédés et un langage mathématiques, soit surtout un esprit de recherche pédagogique commun à toutes les disciplines. En fait, les questions soulevées par l'auditoire auraient pu être posées à quelque spécialiste que ce fût :

— Doit-on utiliser dès le départ un langage universel déjà connu ?

— Les enfants doivent-ils refaire le chemin chronologique de l'humanité ?

— N'ont-ils pas plus de facilité à emprunter, aux côtés de leurs parents, le chemin jalonné par les grandes oeuvres dont nous avons convenu qu'elles constituent notre "culture" ?

— Faut-il donner de hauts exemples ?

— Certaines conventions sont-elles inéluctables ?

— Dans quelle mesure l'enfant doit-il (peut-il) être réceptif ou créateur ?

A l'instar de nos plus réputés animateurs A.P.M., c'est avec une foi souriante, chaleureuse, étayée, efficace, qu'Angélique Fulin, sans vouloir toutefois donner "la" réponse, entraîne ses interlocuteurs à creuser davantage les questions, apportant tout le poids de son savoir et de son expérimentation personnels. A chaque question, des exemples de réponses mêlant procédés, moyens, finalités, interviennent.

Evoque-t-on les particularismes de chaque folklore et la difficulté d'approche réelle des différentes *musiques populaires* ? Une étude convergente permet de dégager des constantes universelles : l'octave, la quarte, la quinte, phénomènes physiques, rapports numériques simples de fréquences, perceptibles par les premiers harmoniques d'un fondamental, se retrouvent quasiment partout. Ces intervalles vont constituer le cadre de structures qui pourront s'organiser de différentes façons, chargeant de sens parfois opposés des éléments en apparence semblables : dans l'échelle pentatonique de la musique chinoise, la tierce mineure, intervalle mélodique conjoint, exprime le bien-être ; la tierce majeure, qui se présente comme un intervalle distendu, convient pour illustrer la douleur. Dans la musique européenne, la tierce majeure, intervalle harmonique intégré à l'accord parfait, donne une impression de plénitude, mais c'est autour de la tierce mineure mélodique que se chantent beaucoup de nos vieux refrains. Ajoutons qu'il ne faudrait pas réduire les chants du folklore aux transcriptions contestables que nous ont transmis de bonne foi les auteurs de recueils dont la valeur scientifique reste assez faible. Ignorants de cette affirmation que le rythme français est dominé par le "binaire", nos enfants se transmettent encore de bouche à oreille le rythme à cinq temps de "A ma main droite j'ai un rosier" ou de "J'ai descendu dans mon jardin".

Il conviendra de la même façon de se méfier de l'*acquis culturel* dont les morceaux de bravoure peuvent être dénaturés par une vulgarisation excessive, par l'esthétique nouvelle d'une époque pour laquelle ils n'ont pas été conçus, et ne sont plus, de toute façon, adaptés à notre genre de vie : le génie de Mozart extrapolait sur des perruques poudrées.

Le moment est alors venu de se poser plus précisément la question (préoccupation parallèle, là encore, à celle de nos mathématiciens) : "*Qu'est-ce que la musique ?* " — Une création humaine ? — Alors, le chant des oiseaux, non ? Un son électronique, oui ? — Peut-être est-elle un ensemble, à l'occasion un singleton, de sons "humanisés", c'est-à-dire perçus, interprétés par l'oreille et le cerveau. Le Musicien est-il forcément un "auteur", un "génie" ? — Le premier musicien n'est-il pas l'enfant, l'enfant au brin d'herbe tendu, à l'élastique vibrant, à l'assiette frappée ?

Le but du musicien-pédagogue est d'abord de faire *s'exprimer*, se développer la personnalité de l'enfant. Pour cela, il lui est nécessaire de savoir écouter celui-ci, de connaître ses possibilités, ses besoins dans tous les domaines. (Le riche moment que cette six ou septième année, où l'enfant affirme son équilibre psycho-moteur, organise autour de lui l'espace et le temps !). Il existe en France peu de travaux sur les débuts musicaux de l'enfant. L'écholalie, au joli nom, a jusqu'ici suscité peu de commentaires. Citons cependant quelques ouvrages :

— Psychologie des aptitudes musicales — Boris TEPLOV — P.U.F.

— Développement génétique de la perception musicale — Arlette ZENATTI — C.N.R.S.
— Le sens tonal chez l'enfant — Michel IMBERTY — C.N.R.S.
— Les bases psychologiques de l'éducation musicale — Edgar WILLEMS — Pro Musica, Bienne.
— Le rythme, la musique et l'éducation — Emille JAQUES-DALCROZE — Foetisch Lausanne.
— L'éducation musicale en Hongrie — Jacqueline RIBIERE-RAVERLAT — Leduc.
— Traité des objets sonores — Pierre SCHAEFFER — Seuil.

Il convient, et particulièrement en pédagogie de la musique, de respecter les trois démarches qui, bien que progressives, peuvent être simultanées :

1) travail sensori-moteur, essentiellement instinctif, qui correspond à un moment d'exploration et où la perception s'affine ;
2) contribution affective, nécessitant une motivation : on utilise la découverte, on la complète, on y répond ;
3) travail intellectuel : organisation, représentation écrite, codage.

Ce classement est à rapprocher de celui que propose Edgar Willems :

1) à la vie physiologique correspond l'instinct, spécialement celui du rythme (battements de la sève, du sang — cycles saisonniers) ;
2) à l'affectivité, la mélodie (gazouillement) ;
3) à l'intellect, l'harmonisation (com-préhension des accords, des dissonances).

(Edgar Willems ajoute une quatrième classe : l'élément "supra-intellectuel", aspiration vers un "pôle spirituel" à quoi il associe l'intuition, la création musicales).

Précisons pour chacun de ces classements que l'intersection des différents ordres est possible à tous les niveaux : l'invention d'un rythme simple, par frappés de mains, celle d'une mélodie, ne serait-elle que de sons consécutifs, sont déjà *improvisation* et peuvent être exploitées en vue d'une création. Encore faut-il que ces premières tentatives soient encouragées, ce que la pédagogie traditionnelle de la musique instrumentale a trop souvent négligé au profit d'un seul aspect : la reproduction d'oeuvres écrites. Ainsi ont été formés nos grands interprètes, instrumentistes brillants, virtuoses au service des génies créateurs. Se rend-on toujours exactement compte du caractère d'élite d'une telle éducation qui, par ailleurs, aliène l'enfant en le rendant rapidement prisonnier d'une technique et incapable d'une expression personnelle ?

Mais qui dit *création* dit composition, choix de règles, de consignes de jeu. Il y aura pour les maîtres un grand intérêt à connaître la démarche des artistes contemporains car les trouvailles des enfants peuvent s'orienter inconsciemment sur les mêmes voies.

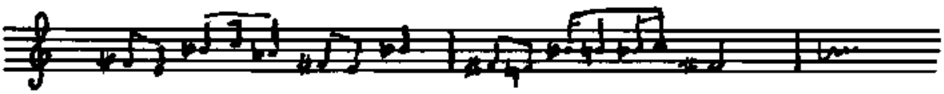
Ainsi en est-il dans le domaine du *rythme*.

Le rythme ne s'apprend pas : il vient, il se respire, il se sent, il se vit. Et non pas d'abord ce battement régulier qui n'est que la mesure, mais la phrase rythmée que l'enfant, encore incapable de compter, répète spontanément ou à laquelle il répond.

— Remarques : la latitude d'inventer une réponse personnelle éloigne la possibilité de jugements de valeur de la part des autres enfants ; on sait l'importance qu'accordent les psychologues à l'aptitude plus ou moins grande à reproduire un rythme ; défaillance notable des petits "intellectuels" qui veulent d'abord comprendre et dont la raison inhibe déjà les réflexes ; là comme en mathématique, l'enfant montre une facilité d'adaptation, une ouverture dont beaucoup d'adultes sont incapables — voir la sûreté avec laquelle il répète les rythmes syncopés des moindres chansons modernes ! Le fait qu'à l'armée certaines recrues soient physiquement incapables de marcher au pas est-il un contre-exemple ? — Au contraire, il est bien plutôt l'illustration d'une autre analogie mathématique-musique : le rythme militaire, traditionnel et imposé comme l'on sait, est mécanique, automatique ; c'est le rythme par division de la première page de nos anciens solfèges dont chacun se rappelle l'arbre très "mathématique" (au sens péjoratif !) Celui-ci donnant, d'évidence, la prépondérance au rythme binaire et invitant, pour marquer la mesure, à compter ! Or, battre une mesure à 3/4, ce n'est pas compter : 1, 2, 3, c'est déjà valser ! —

Et qu'advient-il quand un musicien veut transcrire les pulsations irrégulières de la danse populaire ? quand Stravinsky veut contrarier tel rythme par d'autres totalement différents et faire exploser, dans certaines de ses oeuvres, ce qu'Henry Barraud appelle "une espèce de subversion rythmique" ? — (Pour comprendre les musiques d'aujourd'hui — Henry Barraud — Seuil) — Il n'est plus question d'admettre une fois pour toutes un système unique de références. Messiaen, lui, pour vaincre un automatisme qu'il juge néfaste, propose le rythme par multiplication : partir de la plus petite pulsation (ou) — le pas-unité dans la danse folklorique — et la multiplier librement ; librement mais non anarchiquement, comme le montre l'utilisation qu'il fait de la valeur ajoutée ou du "rythme non rétrogradable" (combinaison rythmique dans laquelle on rencontre la même succession de valeurs de notes, qu'elle soit lue de gauche à droite ou de droite à gauche — séquence "réfléchie", symétrique, qui coïncide avec son image-miroir, et ne peut donc être différenciée de sa propre rétrogradation) :

Chant populaire basque - unité de pulsation : la croche



Messiaen : Quatuor pour la fin du temps.
Exemple de valeur ajoutée

Messiaen : id. - rythme non rétrogradable
(unité de pulsation : la double croche)
3 5 8 5 3 | 4 3 7 3 4 |

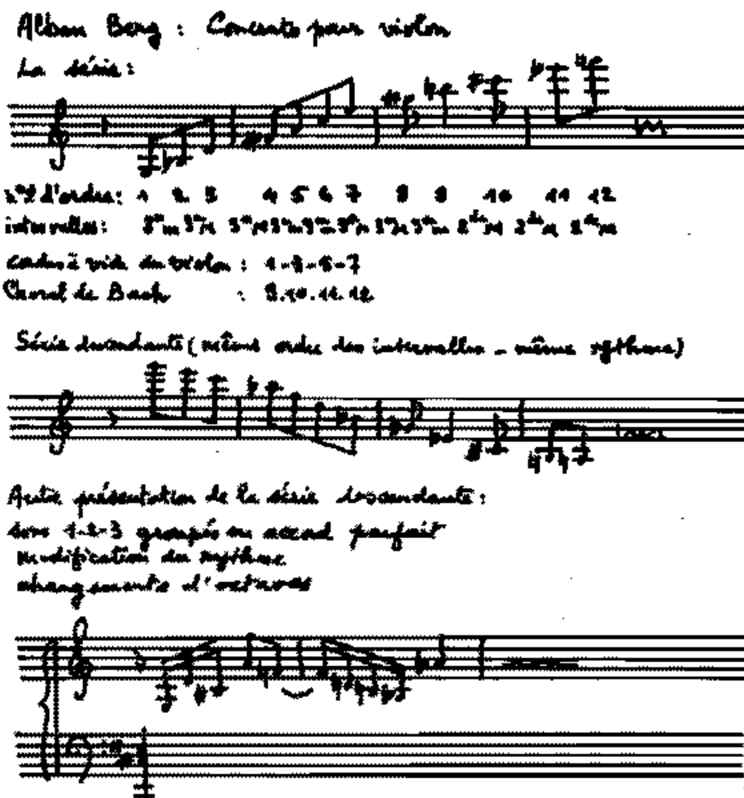
Hauteur des sons, autre terrain de recherches mais champ d'expériences tout-à-fait analogue pour Stockhausen qui voit dans les qualités du son quelles qu'elles soient les manifestations d'un seul et unique phénomène vibratoire dont la fréquence est perçue comme hauteur pour les périodes comprises entre 1/3.200ème et 1/16ème de seconde,, comme durée entre 1/16ème et 8 secondes et comme forme entre 8 secondes et 15 minutes.

La tonalité est-elle convention ou structure naturelle ? L'enfant, d'une part influencé par son milieu et nos habitudes, d'autre part dépendant de sa propre perception et de son stade génétique, est-il "tonal" ou "atonal" ? La désagrégation du diatonisme par ses hardiesses de plus en plus grandes (polytonalité, chromatisme, dodécaphonisme) s'explique-t-elle par la pure spéculation ou par la redécouverte de possibilités latentes que nous avait fait négliger le trop fini système tonal ? Ne faut-il pas se garder de répondre et chercher toujours davantage, d'abord avec les enfants ?

Teplov a expérimenté qu'un enfant — voire un adulte musicalement inculte — ne perçoit pas de différence à l'audition d'un chant accompagné d'une part dans le ton exact, d'autre part dans un ton différent, ce qui sonne étonnamment faux pour une oreille exercée. Un enfant qui invente une chanson ou une phrase musicale sur quelques lames de xylophone ne termine pas nécessairement par une tonique et si, un début de phrase lui étant suggéré, il achève alors cette phrase par une cadence tonale, on peut supposer que ce début était suffisamment inscrit dans le sytème tonal pour que la convention de la formule finale soit implicite et impose d'elle-même le modèle connu.

Education du sens mélodique : obtenir qu'avec le moindre objet (bâtonnets, couvercles métalliques, boîtes remplies de graines, bouteilles d'eau) l'enfant, produisant un bruit, l'écoute, le cultive, l'affine, faisant de ce bruit un son ; qu'avec deux ou trois lames de carillon il organise toutes les séries de sons possibles ; qu'il alterne des timbres, choisissant parmi les diverses combinaisons soit celle qui lui plaît le plus, soit celle qui illustre le mieux telle idée à exprimer. Jouer à trouver chacun, successivement, une note différente de celle des autres, à tenir tous ensemble chacun sa note, quitte à revenir enfin à l'unisson. Nous revoici tout près des règles de composition contemporaines.

L'observation attentive de partitions permet de mieux mesurer cette évidence : dans son Concerto pour violon, Alban Berg a organisé les 12 sons de la série à partir des 4 notes fondamentales du violon et d'un choral de Bach, puis il joue à renverser les intervalles obtenus, à modifier les rythmes, à créer des polyphonies, faisant oublier la technique dodécaphonique au profit d'une intense émotion dramatique :



Au delà du dodécaphonisme, Xenakis ou Ohana enrichissent l'échelle par la présence des quarts de tons ou des tiers de tons, créant ainsi leurs palettes personnelles comme le font nos enfants avec leurs "bouteillophones" ou leurs cithares désaccordées, soucieux de ranger les éléments de l'ensemble obtenu suivant des ordres déterminés. Et ce seront alors de nouveaux "modes" à l'instar de Messiaen et de ses "modes à transpositions limitées" ; ou bien, les enfants constitueront des "réservoirs" de notes dont ils feront des "formes ouvertes" ainsi que Boucourechliev laissant le choix du parcours libre d'un îlot à l'autre de ses Archipels. Nous voici donc conduits aux plus récentes partitions qui réservent d'autres surprises, d'autres parallèles avec les recherches poursuivies dans nos classes : inventions dans le codage du langage musical qui ne s'exprime plus uniquement sur des portées, mais par des procédés si différents suivant les auteurs que plusieurs pages préalables sont nécessaires pour l'explication de ce codage — symboles personnels, signes de communication ... Quant à accuser les compositeurs modernes de fantaisie et leurs oeuvres de facilité, il n'est que de lire leurs écrits ou de considérer leurs partitions pour écarter ce préjugé.

Créateur plus modeste mais non plus négligeable, l'enfant peut aller plus loin que sa spontanéité qui n'est qu'une première étape. Familiarisé d'emblée avec les méthodes d'audition active et d'improvisation, il s'habitue au langage musical et l'utilise avec aisance pour compléter ses moyens d'expression. Un cours préparatoire de Corbeil a travaillé toute l'année de cette façon : après avoir assisté à une exposition d'automates, il a fabriqué son propre robot ; celui-ci est devenu l'inspirateur d'une musique puis d'une danse "espacienne", tandis que s'est créé tout un jeu dramatique mis en scène autour d'une vaste fresque et que s'est progressivement réalisée par l'invention de symboles une partition très précise de l'"oeuvre".

Créativité chez l'enfant, participation inspirée de l'exécutant et même de l'auditeur "actif", foisonnement de recherches et d'expérimentations de la part des compositeurs, à tous les niveaux, la musique d'aujourd'hui se vit.

La Charte de CHAMBERY a marqué les cinq années qui viennent de s'écouler.

La Charte de CAEN jouera un rôle important dans les années à venir.

Reportez-vous sans tarder à la page 713.

L'école moderne et les mathématiques

Animateur : DELBASTY
Rapporteurs : R. UEBERSCHLAG, O. ROBIOLLE

Le groupe qui s'est réuni avec Delbasty comprenait une trentaine de personnes et la discussion s'est établie très librement autour des thèmes suivants :

1/ Quelles mathématiques apprendre aux élèves ?

2/ Quel est le rôle de l'école ?

3/ Comment démarrer dans sa classe ?

1. Delbasty raconte comment il est arrivé à la mathématique : à l'Ecole Normale, on lui avait appris à utiliser différents matériels ; il s'est rendu compte que le calcul n'intéressait pas les enfants et que les exercices qu'il leur proposait transformaient ceux-ci en singes savants. Il redoute qu'une certaine façon d'enseigner la mathématique moderne conduise à utiliser un matériel d'école au lieu de donner à l'école sa vraie destination qui est de faire aimer la vie. Actuellement, ce qu'il y a de plus urgent, c'est d'apprendre aux enfants à voir. Si on éveille l'enfant au milieu, il mathématise naturellement. L'école devrait regarder dans l'enfance ce qui est éveil. Les enfants n'ont pas besoin de structures imposées pour apprendre le langage, il faut leur laisser le temps, le droit à la parole.

Une auditrice fait remarquer que la mathématique s'exerce et qu'elle n'est pas seulement affaire d'intuition ; il faut trouver un lieu d'exercice, c'est l'école car on ne peut confier à la famille le soin de former intellectuellement les enfants. Delbasty répond qu'il ne tient pas à supprimer l'école mais la situation d'élèves dans laquelle on place les enfants. Il examine comment naturellement les enfants découvrent des structures : pour le calcul des probabilités, il constate que l'enfant doit vaincre d'abord des superstitions ancestrales : en lançant une pièce de multiples fois pour compter la répartition des "pile ou face" il ne se contente pas de constater, il veut agir sur le résultat. Ainsi, il parle à sa pièce, il se met en colère, il ment, il lui attribue un désir de le contrarier. Il faut qu'un compagnon décide ("il faut nous mettre libre") pour que la classe procède à cent mille jets de pièces pour vérifier l'effet du hasard. Delbasty conclut que ce qui est important est d'arriver à l'état d'enfance et d'empirisme. En lisant Boole, Galois, Helmholtz, il a vérifié que ces auteurs avaient eu le génie de la simplification et procédé par tâtonnement empirique, par économie d'énergie.

2. Delbasty précise que son école n'est pas celle de la non-directivité : il a un emploi du temps mais il accorde toujours un temps

suffisant à se mettre à l'écoute des enfants. Il estime que les enfants ne doivent pas tellement acquérir des connaissances mais plutôt se faire des racines. Ainsi, ils gardent l'habitude de lever la tête. Plus tard, même avec un métier ingrat, ils resteront positifs. Il cite l'exemple d'un de ses élèves qui revient le voir, non pas pour se plaindre de son métier actuel (cuisinier) mais pour lui annoncer qu'il est sûr de faire mieux : "tu verras ce dont je suis capable quand je trouverai autre chose..."

Il estime que la pédagogie a peur de la vie, elle est en danger de vie. Actuellement, selon lui, les enseignants devraient être préoccupés par la défense de l'existence humaine, sa survie. On n'a pas besoin de grammaire, on a besoin de dire non. Les enseignants, comme les intellectuels, se consolent par la grammaire, les mathématiques modernes, mais ils sont incapables d'actions civiques, c'est-à-dire de tirer les conséquences de la science actuelle. Rostand parle dans le désert. Il faut rendre les choses biologiques et non logiques, il faut craindre une grande dessication par l'école.

On objecte que la renaissance s'est faite en réaction contre une vie trop primitive, trop naturelle. Delbasty ne conçoit pas la renaissance comme un phénomène intellectuel mais comme le fleurissement de la sensibilité populaire. L'école, de même, ne devrait pas transmettre les connaissances (sauf secondairement), elle devrait enseigner la création, développer la fibre créatrice et contestataire.

3. Quelques camarades se plaignent d'avoir échoué en appliquant les méthodes Freinet. Ils font remarquer à Delbasty que c'est le fait de travailler à la campagne qui lui a permis d'enseigner ainsi. Réponse : si tu ne réussis pas, c'est parce que tu es trop orgueilleux, et nous le sommes tous. Il faut démarrer par le petit, c'est-à-dire en modifiant un détail secondaire. Notre classe est en route lorsque nos enfants ont un peu plus de confiance en eux-mêmes. Pour cela, nous utilisons un certain nombre de techniques de communication. Mais ces techniques sont parfois détournées de leur destination. Ainsi, des correspondants échangent des étiquettes de fromages alors que les enfants voudraient savoir comment on vit ailleurs, ce qu'on y invente, ce qu'on y cherche.

Travailler à la campagne, ce n'est pas un privilège, c'est travailler avec des gens méfiants, réservés, hostiles à la nouveauté. Il faut de nombreuses années pour conquérir le milieu.

Question : que faire des enfants qui ne veulent pas s'engager dans un travail ?

Réponse : si des jeunes refusent le travail, c'est parce qu'on charge la jeunesse de toute une pathologie.

Il faut enfin se méfier des mots. Il y a des gens qui attendent qu'on invente un mot nouveau pour agir. Ainsi, la pédagogie d'attente n'existe pas car personne n'aime attendre.

En ce qui concerne un enseignement individuel, Delbasty pense avant tout que la classe doit vivre pour que les enfants s'enrichissent les uns les autres. L'acquisition de la mémoire se fait par le corps, par les pieds, et non seulement par l'exercice intellectuel : on perd les réflexes de faire quand on sait trop.

On s'aperçoit que cette séance n'a pas été consacrée exclusivement à la mathématique, mais a cherché essentiellement l'action et la responsabilité des enseignants.

Calcul numérique à l'école élémentaire

Animateur : M. CREPIN

1. *Utilisation du signe* =

C'est, en première approche, un signe sténographique qui correspond à un moule du type : ...=...

Il y a égalité au niveau des *représentants* d'une même chose, et non au niveau des *représentés*.

On peut écrire $3 + 3 + 3 + 3 = 3 \times 4$

mais on ne peut écrire 3 billes rouges = 3 billes rouges.

En fait, la relation " ... est égal à ..." ou "égale" est une relation d'*équivalence* : les différentes propriétés de cette relation permettent de préciser certaines utilisations du signe =

Réflexivité

On peut donc écrire $3 = 3$
(ceci était déconseillé, voire interdit, dans les instructions de 1945).

Symétrie

Ceci est très important car en raison de notre système d'écriture, on a trop tendance à favoriser la lecture de gauche à droite.

Exemple 1 : $3 + 5 = 8$ mais aussi $8 = 3 + 5$.

La deuxième écriture étant favorisée à l'école primaire par ce qu'on appelle "les décompositions des nombres" : ces dernières seront très utiles au niveau de la technique des opérations.

$$13 \times 4 = (10 + 3) \times 4 = \ldots$$

Il faut aussi remarquer pour la première écriture $3 + 5 = 8$ que $(3 + 5)$ et 8 jouent le même rôle : c'est une écriture "statique" et non dynamique : il faudra dans cet esprit éviter de dire "3 + 5 *fait* 8", laquelle relation n'est pas symétrique (la réciproque serait : 8 *est fait* par 3 + 5 ? !).

Exemple 2 : $\forall_N a, \ \forall_N b, \quad (a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

Il est évident que dans l'optique "factorisation", c'est dans le sens droite — gauche que l'on utilise le plus l'égalité.

Il faudra donc dans cette optique conditionner dès l'école primaire la symétrie de la relation.

Transitivité

$$\left.\begin{array}{r} 3 + 3 + 3 + 3 = 3 \times 4 \\ 3 \times 4 = 144 : 12 \end{array}\right\} \Rightarrow 3 + 3 + 3 + 3 = 144 : 12$$

Cette transitivité permet d'écrire une suite d'égalités :

$$3 + 3 + 3 + 3 = 3 \times 4 = 144 : 12$$

Nous abordons à partir de cet exemple et en conclusion le fait que l'égalité a pour but de mettre en valeur les multiples écritures d'un même nombre.

2. *Le calcul numérique*

Il doit être basé sur la lecture et l'exploitation des tables d'addition et de multiplication.

Celle-ci permettront (à partir de nombreux exemples) l'approche des *propriétés des opérations*, sans la compréhension desquelles il ne peut y avoir de calcul numérique.

Dans un deuxième temps, le but du calcul numérique sera de décoder des situations concrètes.

Pour terminer cette présentation du calcul numérique et avant d'aborder le problème des techniques, nous pouvons dire qu'il y a peu de modèles (addition et multiplication) mais de nombreuses écritures (provenant des propriétés).

3. *Opérateurs*

Il ne rentrait pas dans le cadre de ce groupe de travail d'aborder le problème épineux de l'introduction des opérateurs à l'Ecole Primaire.

D'autres groupes de travail se sont penchés sur la question (voir en particulier les articles de Madame Robert et de F. Colmez dans "La Mathématique à l'Ecole Primaire").

Cependant il est permis de penser que si l'approche théorique des opérateurs, approche qui déboucherait sur la notion d'application de N ou de fonction dans N est difficile à l'école primaire en raison du fait qu'on travaille sur des ensembles numériques finis, les opérateurs présentent un intérêt dans la mesure où ils *aident au calcul numérique* en variant les situations et les présentations.

C'est cette variété de présentations qui d'après les commentaires semble dominer l'esprit du programme rénové de 1970.

En particulier, la présentation de la soustraction à partir de l'addition, et de la division à partir de la multiplication, apparaissent clairement par cette notation.

4. *Techniques opératoires*

Le problème des techniques opératoires paraît être un bon exemple de l'esprit du *programme rénové*, à savoir qu'il n'y a pas de changement sur le fond, mais sur la forme.

Ce n'est pas un nouveau programme quant au contenu, mais le même programme avec des méthodes différentes.

L'opération fondamentale est l'*addition*.

Le fait que ce soit la seule opération au programme du C.P. doit permettre de mieux l'appréhender, en partant de la table, et en étudiant ses propriétés sur de nombreux exemples.

Il convient de distinguer deux choses pour les techniques opératoires :

- le niveau mathématique
- le niveau pédagogique.

a) *le niveau mathématique*

- *soustraction*

La recherche de la différence se présente comme une *équation*, abordée dès la fin du C.P. comme "exercices à trous".

La recherche de la solution se fait à partir de la table.

- *multiplication*

C'est une addition réitérée.

Ceci apparaît très nettement dans la construction des tables de multiplication.

Pour bien faire appréhender cette construction, il convient de varier les exemples, et nous voyons ici l'intérêt de la construction des tables en base quelconque.

A ce propos, il faut bien remarquer que le but de la numération dans une base autre que dix n'est pas de faire du codage et du décodage, mais bien de dégager les structures et les propriétés des opérations en "cassant les habitudes".

Remarque : Au niveau du maître un exercice très intéressant est, pour une opération donnée en base dix, de faire la même opération dans une autre base : l'habitude et la mémorisation ne jouant plus, nous nous rendons bien mieux compte des difficultés que peut avoir l'élève.

● *division*

Elle se présente à partir de la multiplication de la même manière que la soustraction à partir de l'addition.

Le but donc de ce niveau mathématique est de faire comprendre le lien existant entre ces différentes opérations.

Le problème de la technique va en découler, en précisant bien au départ que, pour chaque opération, nous connaissons une *technique générale bien élaborée*, mais qu'il convient ici de ne rien imposer (contrairement aux définitions et aux propriétés) et de faire découvrir la technique par les enfants.

b) *le niveau pédagogique*

C'est précisément à ce niveau qu'intervient la découverte *des* techniques opératoires (et pas obligatoirement de la technique "idéale").

Il est bon à ce propos de rappeler deux choses :

— il existe des techniques transitoires (nous allons en développer certaines)

— il est bon de toujours revenir aux définitions et propriétés, car certaines opérations peuvent se présenter comme cas particuliers, et il serait inutile d'appliquer la technique générale.

● *la soustraction*

A côté de la technique classique (avec le principe des retenues), il convient de noter certaines méthodes qui dans des cas simples évitent de "poser la soustraction".

$$x = 9283 - 995 \Leftrightarrow x + 995 = 9283$$
$$x + 1000 = 9288 \Leftrightarrow x = 8288$$

Il est bon également de favoriser la technique dite "compter en addition" (recherche du complémentaire).

● *la multiplication*

Il est intéressant pour le maître de connaître la technique dite *à la musulmane* (développée dans de nombreux manuels d'arithmétique).

Elle présente l'avantage d'éviter les retenues partielles en séparant l'utilisation de la table de multiplication et de la table d'addition.

Ceci est particulièrement intéressant quand la mémorisation n'est pas encore parfaite.

Pour la multiplication par un nombre de deux chiffres, notre technique (arbitraire) du "décalage" devra être motivée.

Ex. : $236 \times 42 = (236 \times 40) + (236 \times 2)$

et $(236 \times 40) = (236 \times 4) \times 10$

D'où une disposition transitoire intéressante :

$$\begin{array}{r} 236 \\ \times\ \underline{42} \\ 9440 \\ \underline{472} \\ 9912 \end{array}$$

• *la division*

Cette technique est très élaborée donc très difficile à retenir si l'on reste au niveau du procédé.

Il suffit pour s'en convaincre d'effectuer une division soi-même en base huit (ou en base douze).

Ici aussi nous pourrons utiliser des techniques transitoires et en particulier

— poser les différences partielles, de manière à bien séparer multiplication et soustraction

— utiliser la méthode dite : "division en soustractions successives" (qui est celle utilisée par les machines à calculer).

$$\begin{array}{rr|l} & 728 & 17 \\ - & \underline{68} & \overline{42} \\ & 048 & \\ - & \underline{34} & \\ & 14 & \end{array}$$

4. *Calcul numérique et mesures*

Il convient tout d'abord de différencier à propos des mesures :

— l'aspect physique

— l'aspect calcul numérique

Ceci se traduira par une progression pédagogique que l'on peut schématiser ainsi :

— C.E. : usage des instruments

— C.M. : mesures à l'aide des instruments
calculs à propos des mesures.

Nous abordons ici une utilisation des techniques opératoires pour les problèmes concrets, et la notion d'encadrement et d'ordre de grandeur prend ici tout son intérêt.

Il est à noter que ceci est favorisé par l'introduction dans le programme des signes > et < dès le cours préparatoire.

Géométrie en troisième

Animateurs : R. GAUTHIER et A. MYX
Rapporteurs : LOUQUET et PRIMOIS

Résumer en deux pages ce débat est impossible. Indiquons succinctement ses "lignes de force", pour développer plus tard éventuellement certains points précis. Il faudra y revenir : la "géométrie" passionne les foules. On s'aperçoit très vite que les Collègues ne mettent pas tous, il s'en faut, le même contenu derrière les mots.

1. — *Sur les notations utilisées en géométrie en quatrième*

Les Collègues sont nombreux à souhaiter une harmonisation des notations dès la cinquième ou la quatrième. L'A.P.M. a déjà joué un rôle important dans ce sens : il faut poursuivre cet effort.

Les écritures (A,B), | A,B | , $\vec{AB}$, [A,B] ou [AB], d(A,B) semblent être adoptées par une majorité, avec un sens précis. Les notations pour la "droite AB", la "demi-droite d'origine A qui contient B" sont encore très diversifiées. Peut-on parvenir à un accord ?

D'ailleurs, si l'on demande aux collègues la raison de ce souhait, on évoque très vite le problème des examens, des changements d'établissement.

Il ne faut pas, trop vite, figer une notation, mais habituer l'enfant à passer de l'une à l'autre, à s'adapter à un autre mode d'écriture. En géométrie, le passé est tellement lourd, les habitudes tellement fortes ...

2. — *Sur le programme de quatrième*

Les Collègues, un peu affolés par ce programme, souhaitent savoir ce qui est important en quatrième pour aborder avec profit celui de troisième. Nombre d'entre eux vont pratiquer leurs propres allègements, avec le souci de bien préparer leurs élèves pour l'année suivante. La notion de *programme* prend donc le pas sur celle d'*intérêt pédagogique :* si l'on ne peut terminer un programme de l'année x, au moins faire le maximum pour achever celui de l'année (x + 1), l'année (x +1) étant année d'examen ! Cette course d'obstacles est-elle compatible avec la rénovation pédagogique ?

Cette attitude fréquemment rencontrée est conditionnée par nos habitudes, ces fameux examens, et la structure hiérarchisée du système.

Pour revenir à des considérations plus terre à terre, disons que ce qui est important en quatrième dépend de la manière d'aborder le programme de troisième. Cette lapalissade est un peu facile, mais elle est.

Les Collègues unanimes pensent qu'ils ne termineront pas le programme de quatrième. Est-il bon de sacrifier le vectoriel ? Nous pensons au contraire que l'outil vectoriel est indispensable et facile : l'expérience l'a prouvé. Il est souhaitable de l'aborder en fin de quatrième et de l'utiliser à fond en troisième.

Alors, que peut-on alléger ? Il n'est pas possible de passer trop de temps sur droite affine, droite euclidienne ... La notion de barycentre ne doit pas prendre trop de temps. Les calculs sur les polynomes peuvent être répartis sur toute l'année.

On s'accorde à penser que ces programmes de quatrième et troisième ne peuvent rester très longtemps tels qu'ils sont. Il est souhaitable que la Commission Ministérielle ne se contente pas d'allègements, mais repense très vite les objectifs de ces programmes.

N'est-ce pas d'ailleurs la notion même de programme qu'il faut revoir ?

3. — *Sur le programme de troisième*

Nous ne reprendrons pas ici un exposé détaillé : on trouvera les contenus de ces exposés dans le Bulletin n° 284 (pour les points de vue 1 et 2)

p. 437 — Point de vue 1 : Usage d'un produit scalaire

p. 450 — Point de vue 2 : Une conception de la géométrie

p. 463 — Point de vue 3 : Présentation du plan euclidien (voir Commentaires officiels)

Le point de vue développé dans les Commentaires officiels a l'inconvénient de ne pas utiliser le vectoriel mis en place en quatrième.

A quoi bon forger un vectoriel si l'on ne l'utilise pas lorsqu'il serait efficace ?

Dans la discussion, les Collègues se posent des questions sur le problème des doublants en troisième l'an prochain, sur le B.E.P.C. (encore l'examen), sur l'entrée en seconde, sur le cours de physique en seconde.

A propos du B.E.P.C., à défaut de sa suppression, peut-on envisager une autre forme de l'épreuve de mathématiques ?

On semble souhaiter quatre à cinq exercices assez variés, pour lesquels on ne demanderait pas seulement à l'enfant d'appliquer des recettes, des formules, mais on solliciterait son aptitude à la réflexion, à l'initiative.

Réformer la nature d'une épreuve d'examen final n'est-il pas une composante indispensable d'une réforme d'ensemble ?

4. — *Pour l'avenir*

A chaque discussion sur les programmes actuels, on ressent cette inquiétude, ce profond malaise des Collègues devant les nouveaux programmes de quatrième et troisième. Il semble bien y avoir une profonde contradiction entre l'esprit des programmes de sixième, cinquième et ceux de quatrième — troisième. Autant les premiers peuvent favoriser la recherche, la découverte, le sens de l'initiative, autant les seconds semblent conçus pour de futurs mathématiciens. La construction linéaire, axiomatique et rigide de la géométrie semble mal convenir pour des élèves de 13-14 ans.

Les Collègues souhaitent que la Commission Ministérielle se remette rapidement au travail sur ces programmes en tenant le plus grand compte de résultats d'expériences, de suggestions diverses.

Ils souhaitent des programmes moins ambitieux et moins linéaires, de telle sorte que toute idée de "course de vitesse" disparaisse de leurs préoccupations quotidiennes : ils seront alors disponibles pour réfléchir à une pédagogie vivante. C'est une condition indispensable pour une réforme véritable.

Finalités de l'enseignement des mathématiques du premier cycle dans le cadre de l'enseignement obligatoire jusqu'à 16 ans

Animateur : P. BUISSON

De l'examen de la situation actuelle dans le premier cycle, il ressort que le problème de la répartition des élèves dans les diverses sections est crucial. Il semble totalement inadmissible qu'un pourcentage soit fixé à l'avance par le gouvernement (40%, 40%, 20%). C'est la négation même de la démocratisation de l'enseignement. Les critères de sélection, s'il en existe, sont difficiles à dégager, d'autant plus que les élèves viennent d'écoles différentes et qu'il n'y a aucune uniformité de notation.

La création de classes homogènes conduit actuellement à donner aux élèves "faibles" des conditions de travail plus mauvaises que dans les classes hétérogènes. Les classes de "faibles" sont aussi chargées que les autres, les professeurs qui en ont la charge sont souvent moins qualifiés et les élèves sont, dès le départ, traumatisés d'être catalogués comme "faibles". Même avec de meilleures conditions d'enseignement, le principe de cette sélection est mauvais ; l'aspect psychologique est déterminant. Les "forts" aussi bien que les "faibles" considèrent cette classification comme définitive et ne font plus d'effort.

L'enseignement dans le premier cycle prépare à l'entrée en seconde ou au passage du B.E.P.C. Les participants semblent avoir des opinions différentes sur la valeur de cet examen. S'il permet d'obtenir encore diverses situations, certains parents y semblent attachés pour des raisons affectives. Comme tout examen actuel, le B.E.P.C. a le tort de juger l'élève seulement sur une épreuve et il est permis de douter de sa validité quand le pourcentage de réussite est fixé à l'avance à 80%. Une attestation fondée sur les avis du conseil de classe ne serait-elle pas meilleure ? Dans les deux cas, il faudra envisager le problème de l'orientation des élèves.

Il semble indispensable de donner à l'enseignement des mathématiques dans le premier cycle deux finalités complémentaires :

— D'une part, habituer l'esprit à une démarche intellectuelle :

. cultiver l'esprit déductif,
. former l'esprit de découverte, l'esprit créatif en donnant à l'enfant la possibilité de dégager les axiomes à partir d'une étude intuitive du concret,
. développer l'esprit critique en confrontant la théorie avec le réel ou en comparant le problème posé avec le problème résolu,
. favoriser l'expression et la communication, apprendre à poser un problème et à le résoudre.

— D'autre part donner une formation technique et scientifique :

. vivre son siècle, comprendre le monde qui nous entoure, savoir s'adapter aux changements susceptibles de se présenter, démystifier ce qui semblerait de la magie,
. éviter la formation de deux classes sociales : ceux qui savent et ceux qui suivent parce qu'ils ne comprennent rien.

L'enseignement des mathématiques contribuera ainsi à former un citoyen libre.

La conception que l'on a des programmes actuels est à revoir ; ils sont trop ambitieux, trop longs, conçus pour une élite,surtout dans les classes de quatrième et troisième. Il serait souhaitable que les programmes ne soient pas seulement des rubriques de connaissances mais qu'ils soient axés sur des thèmes ou des types d'activités.

Il semble qu'il ne soit pas possible de définir la finalité de l'enseignement des mathématiques à court terme d'un point de vue utilitaire; il convient plutôt de se soucier de l'épanouissement de l'individu et de l'aptitude à une formation permanente.

Il importerait donc, dans le cadre de l'A.P.M.E.P., d'établir des listes de thèmes d'étude, certains obligatoires et d'autres laissés au choix du professeur.

Face au programme de quatrième

J. BOLON et L. DUVERT
Rapporteur : M. CHARRUEL

Les points suivants ont été abordés :

I — Objectif du premier cycle.

II — Mathématisation et terminologie.

III — Programmes.

IV — Conditions de travail des élèves.

V — Questions particulières à la première année d'application du programme de quatrième.

Une motion a été rédigée.

Certains points, en particulier ceux de la motion, ont été repris à la Commission du Premier Cycle l'après-midi.

La motion a été refondue dans un cadre plus général ; il n'y a pas lieu de la reproduire ici.

I — Objectif du premier cycle

Construire l'enfant plutôt que construire la mathématique.

Apprendre à raisonner :

— la géométrie n'est pas le domaine privilégié du raisonnement déductif ;

— l'algèbre s'y prête également.

II — Mathématisation et terminologie en géométrie

Difficultés

— double sens des mots dans le modèle mathématique et dans le modèle physique,

— nécessité de fixer une terminologie dans le secondaire,

— la distinction entre modèle mathématique et modèle physique est mal établie dans les commentaires,

— théorie déductive trop longue, donc s'échelonnant sur une trop grande durée,

— énoncés longs et difficiles,

— l'unicité du modèle introduit une identification avec la réalité, identification qui n'aurait pas lieu s'il y avait plusieurs modèles pour une situation ou plusieurs situations pour un même modèle ; la compréhension serait alors plus aisée,

— part à donner aux constatations et aux démonstrations.

Caractères de la mathématisation

— un modèle est une construction de l'esprit qui ne rend compte que d'une partie de la réalité

— une démonstration ne dit rien sur la réalité

III — Programmes

Actuellement

— l'ordre pour traiter le programme n'est pas imposé ; mais c'est une liberté toute relative : on ne peut, par exemple, aborder la géométrie sans avoir introduit les réels.

— il n'est pas obligatoire de suivre les commentaires, commentaires qui constituent une présentation du programme ; d'autres modes de présentation pourront faire l'objet d'annexes ... mais quand ? ici encore la liberté est relative.

— il n'y a pas accord sur ce qu'est l'essentiel :
espace vectoriel ou droite affine ?

Les espaces vectoriels interviennent en Sciences Economiques et sont utiles également aux élèves entrant en CET.

Caractères d'un programme futur

— se mettre d'accord sur ce qui doit être connu en fin de troisième et le répartir de la sixième à la troisième,

— constitution d'un noyau obligatoire et de thèmes choisis par le professeur, sur une liste donnée, suivant le niveau de sa classe.

Inconvénient : de nombreux thèmes pourraient tomber dans l'oubli et seul le noyau subsisterait.

IV — Conditions de travail des élèves

Il n'est pas souhaitable qu'il y ait des programmes différenciés pour les sections de types I et II.

On souhaite la suppression de la distinction entre les classes des types I et II (suppression qui est déjà réalisée dans certains établissements).

Dans le cas de l'existence de groupes de niveaux, l'heure supplémentaire accordée aux plus faibles n'est pas une solution très satisfaisante.

Il semble qu'une meilleure solution soit celle de la création d'heures de bureau "self-service" (solution expérimentée avec l'aide d'étudiants à Grenoble).

V — Questions particulières à la première année d'application du programme de quatrième

Une collègue, sur l'ensemble des présents, pense finir le programme.

Passage des élèves de quatrième en troisième

— pour les élèves restant dans leur établissement : entente entre les professeurs sur ce qui a été vu,

— pour les élèves changeant d'établissement : munir les élèves de la liste des questions étudiées.

Allègements

— en raison du retard pris cette année, les allègements prévus en troisième sont insuffisants.

La suppression des isométries a comme intérêt d'éviter le retour aux cas d'égalité.

— il ne faudrait pas, pour raccourcir le programme de quatrième, en verser une partie en cinquième où le programme est de longueur raisonnable.

Sur le programme de quatrième

Animateur : H. BAREIL

(Parmi les participants, un tiers environ enseigne en quatrième.)

Première partie : Exposé par LASSAVE et BAREIL

Lassave et Bareil se sont proposé, non pas de juger du bien-fondé ou non du programme actuel, mais de rechercher comment il pouvait être exploité du mieux possible.

Pour eux, il ne s'agit pas tellement de le traiter en vue de connaissances à faire acquérir (ce sera souvent un effet second, sans plus, encore que non négligeable) mais surtout en vue d'approfondir les démarches d'activités et de pensée qu'il peut mettre en jeu. Et cela pour TOUS les enfants, de type II aussi bien que de type I.

Activités permises par le programme de quatrième

1. *Calcul* (numérique, algébrique, vectoriel)

   — Z et D sont à étudier à fond. Mais d'une part, dans la plupart des classes la construction de D se fait en pure perte, d'autre part il s'agit essentiellement de savoir manipuler à fond les nombres correspondants et de voir l'insuffisance de D.

   Aussi Z et D peuvent-ils être vus, dans cet esprit, non en des "leçons" qui leur soient propres, mais à l'occasion de la révision des relations (avec le cas échéant utilisation de figures géométriques usuelles donnant lieu à des fonctions vers N ou D), et à propos des nombreuses études expérimentales sur la droite physique.

Tout ceci peut se doubler d'exercices de calcul mental précisant ordre de grandeur et approximation.

— Les formulations littérales sont généralement sant intérêt (par exemple à propos des encadrements).

— Le calcul algébrique à propos d'exemples "concrets" est un excellent exercice déductif pourvu que l'on oblige à expliciter ce qui se fait et parfois à confronter avec le "concret" les diverses étapes du calcul.

— Les calculs explicatifs sur les quotients offrent une illustration remarquable de l'aptitude à utiliser une définition, éventuellement des équivalences, et à conjuguer des hypothèses. Il serait sage de se passer des règles le plus longtemps possible, de laisser l'élève y venir seul, puis de l'habituer à une utilisation intensive, sans vérification de N ou Z.

(Ainsi accepter $\frac{1}{2} + \frac{2}{5} = \frac{2{,}5}{5} + \frac{2}{5}$ ...)

— Le vectoriel sera l'occasion d'une reprise (avec comparaison) des démarches (établissement du problème, exploration des voies possibles, ...) du calcul algébrique.

— L'un des objectifs fondamentaux de la classe de quatrième pourrait être le calcul sous toutes ses formes.

2. *Activités de recherche*

a) *Motivations*

On en trouvera à partir de situations "concrètes". (Ainsi des barres à partager, des aires de carrés, ... conduiront en "géométrie physique" à des équations du type $3x = 1$, $x^2 = ...$).

Si plusieurs langages sont possibles, ce que l'on sait sur l'un n'oblige-t-il pas à induire un fait analogue sur l'autre ? : les élèves savent ajouter des nombres à virgule. Ceci ne les contraint-il pas à rechercher une addition des quotients? (et à en contrôler le résultat ! ...)

L'élève qui connaît une bijection de E vers F et des opérations dans E ne doit-il pas être entraîné à en induire des opérations dans F ? (On en trouvera de nombreux exemples en géométrie ...)

En géométrie de la droite, de support E, dès lors qu'il y a plusieurs bijections de E dans R, le problème du tri des bijections intéressante peut se motiver lorsque apparaîtra l'intérêt de tel invariant ($\overline{AB}$, ou AB, ou $\dfrac{\overline{AB}}{\overline{CD}}$, ...)

Les recherches particulières peuvent découler naturellement d'études plus générales : ainsi l'étude de l'application qui à tout point M du plan affine associe $\Sigma \overrightarrow{MK}$ avec $K \in \{A, B, C\}$ entraîne celle de la relation réciproque et de l'antécédent du vecteur nul ... d'où le centre de gravité ...

b) *Méthodes en jeu*

— *L'observation.* Ainsi, pour la droite, les diverses graduations de compteurs, les "droites" des époques historiques, géologiques, ...

— *L'effort de communication.* Comment exprimer un problème ? Pour soi, pour les autres ... ?

— *La recherche d'informations immédiates.* On peut requérir des situations analogues et en dégager une méthode de raisonnement. Ainsi x ? / $3\vec{x} = \vec{u}$, ou $3\vec{x} + \vec{v} = \vec{u}$, ... nous fait songer à $3x = 1$, ou ..., x étant un réel ... Quelles propriétés sont en jeu ? Quelles analogies ?

— *La conception et l'exécution d'une expérimentation.*

. Graduations diverses d'une droite et comparaisons, tracés pour Thalès, ...

. Recherche de cas particuliers plus faciles : ainsi, pour la somme de deux quotients, cas où ils ont le même dénominateur.

— *L'aptitude à l'auto-questionnement par analogie.*

Exemple : On connaît les "équations de l'addition ou de la multiplication". Par référence, l'élève ne peut-il se questionner pour une "équation du milieu" : A et M connus, existe-t-il B tel que M soit le milieu de (A,B) ? Toute la géométrie de la droite, seule ou plongée, surgit alors, et la symétrie en sortira définie sans effort.

c) *Ecueils*

— Demander des "démonstrations" de choses "évidentes" aux yeux de l'élève ... Ainsi "Toute droite a au moins deux points", ...

— Ou, à l'inverse, proposer des liens "évidents", alors que ce n'est pas vrai. Ainsi déduire des tris de familles de bijections (qui ignorent le caractère "régulier" des graduations) relatives à la droite mathématique à partir de manipulations du double-décimètre.

— Faire "table rase" des connaissances antérieures :
Ainsi pour D lorsqu'on prétend le construire et n'introduire l'écriture à virgule qu'en conclusion.

Et toute la géométrie est ainsi en porte-à-faux eu égard à la géométrie expérimentale connue des élèves ... En quatrième, le compas, connais pas ! .

— Ignorer les niveaux de rigueur, de langage :
Ainsi pour l'emploi du mot "droite", pour la prétention à faire de la géométrie un système déductif complet au lieu de se contenter d'ilôts de déductions ...

3. *Modélisation*

On la trouve en géométrie à propos de la droite et du plan.
Seulement le modèle du plan affine se déduit d'*une* réalité au moyen d'*une* expérimentation. Il faudrait plusieurs réalités. D'autre part le modèle affine manque d'intérêt pour les élèves qui ont l'habitude du métrique.

Alors que les illustrations du modèle sont très variées (par exemple pour la droite mathématique "non plongée" on peut avoir des ensembles-supports à partir de matrices, de figures géométriques variées, ...) les difficultés propres à l'âge des élèves — et les applications pratiques ultérieures — incitent à des diagrammes "techniques" bourrés de conventions supplémentaires, d'ordre métrique notamment. Ainsi ces diagrammes sont-ils trop particuliers. Que ne disait-on pas autrefois à un élève qui faisait ainsi des figures plus particulières que ne les donnaient les énoncés ? Et bien, nous mettons constamment les élèves de quatrième dans ce travers ...

4. *Activités de traduction*

La géométrie de quatrième apparaît souvent comme une affaire de définitions, de vocabulaire. Mais elle peut apparaître aussi comme une langue vivante à multiples facettes. Un objectif de la classe de quatrième pourrait être de savoir passer d'une expression à une autre (langage affine, vectoriel, $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, ...). Ainsi pour traduire un alignement de points, le fait d'être le milieu, etc ...

De même pour les isomorphismes (de $(\mathbb{Z}, +)$ vers $(a^n, \times)$, de $(\mathcal{T}, \circ)$ vers $(\mathcal{V}, +)$, ...), en montrant comment une opération dans un ensemble induit une opération dans l'autre. (La composition des translations induit l'addition des vecteurs, et celle-ci peut induire une addition de points ...)

5. *Activités de classement et d'organisation*

On les trouve à propos des relations, des valeurs approchées ...

Les bipoints et vecteurs sont l'occasion d'un retour sur les relations d'équivalence et les partitions.

Les études sur la droite conduisent à des relations d'ordre.
Et l'on peut, en quatrième aussi, trouver des exemples d'initiation à la programmation (calculs de sommes, de factorielles, de moyennes, ... résolution de "ax = b", ...) avec "boucles" ou sauts conditionnés.

6. *Activités d'extension*

— Par exemple pour l'extension du sens de a^n (avec le problème de 0^0), avec les diverses extensions de $(a+b)^2$, ...

— La symétrisation de N pour l'addition donnait Z.
A partir de D, on recherche une nouvelle extension. Il est formateur d'insister sur les principes mis en jeu, les problèmes soulevés (compatibilité, avec l'extension, des lois déjà définies, de l'ordre, ...).
Par contre Q, d'ailleurs hors-programme, paraît sans intérêt.
Les calculs sur les "quotients" sont beaucoup plus avantageux que ceux sur les "fractions" ... et les englobent.

7. *Montée dans l'échelle des types*

On retrouve en quatrième des exemples d'obtention d'opérations sur des classes d'équivalence à partir d'opérations sur leurs représentants. (Ainsi pour les "vecteurs géométriques").

Des opérations sur R, on voit comment passer à des opérations sur R × R.

Surtout, ce qui est nouveau, d'opérations sur des nombres on passe à des opérations sur des fonctions.

Enfin, il est inutile ici d'insister sur l'intérêt, perçu par tous, de bien dégager en quatrième la structure de groupe.

8. *Exercices de logique*

Sans qu'il soit indispensable de faire expressément des "leçons" là-dessus, les exercices de logique, de raisonnement logique, sont évidemment présents partout ... Il est du plus haut intérêt de s'attacher aux règles de logique mises en oeuvre plus qu'aux conclusions des études !

9. *Activités de "critique"*

— Contrôle, approximatif, (calcul mental, dessin) d'un résultat.

— Distinction entre le problème de l'existence d'un être mathématique et celui de sa détermination. (Tant que je suis dans D, je n'ai pas de nombre x tel que $3x = 1$. Pourtant, en base trois, je sais déterminer x).

— Distinction entre le problème de la détermination (mathématique) d'un être mathématique et celui de sa représentation.
Ainsi deux points distincts A et B étant donnés, la droite-support (AB) existe et est unique et, pour une bijection sur R, le milieu de (A,B) existe et est unique. Mais sans conventions supplémentaires je ne sais ni tracer la droite-support, ni placer le milieu ...

10. *Conclusions*

Il faudrait essayer de déceler les activités fondamentales de l'esprit et s'attacher d'abord à leur exercice et à leur épanouissement pour TOUS les élèves.

Mais plus les élèves sont faibles, plus les difficultés propres au programme de quatrième apparaissent rédhibitoires ...

Deuxième partie : Questions et discussion

— Avec le nouveau programme de géométrie, on gagnerait en honnêteté intellectuelle s'il pouvait être compris, si sa démarche l'était. Or en général il n'en est rien — ou si peu —.

Il faudrait donc s'attacher à ne pas saturer les élèves, quitte à admettre autant de déductions que nécessaire ?

— La définition de la droite mathématique peut être introduite progressivement : par exemple on peut dire simplement d'abord qu'elle est un ensemble muni d'*une* bijection sur R. (avec une infinité de bijections possibles). Si, ultérieurement, se pose le problème de tel invariant on verra les diverses bijections pouvant remplacer la première ...

— Si l'on veut traiter ce programme de quatrième en préservant l'initiative des élèves et leur contribution, ou même simplement en leur laissant le temps de l'assimilation, il est impossible de le traiter en entier.

— Et cela ne semble pas davantage possible pour les années à venir, en dépit des progrès certains dus au rodage ...

— Le programme est dur pour les élèves faibles ou simplement moyens ...
Il semble en outre à l'expérience qu'il se prête peu à une bonne initiation au raisonnement déductif (démonstrations non motivées, car résultats évidents, en géométrie par exemple, ou trop difficiles car demandant, par exemple, une connaissance approfondie du calcul algébrique ...).

— Quels sont donc les objectifs d'une éducation mathématique en classe de quatrième ?

— Tout ceci débouche sur des options fondamentales (cf. Charte de Caen et travaux de la Commission A.P.M. 1er cycle ...).

Correspondance mathématique

CASTEBON, Institut coopératif de l'école moderne.
Pédagogie FREINET
Rapporteur : G. MOUY

Pour situer la correspondance et sa place dans le travail de la classe Castetbon précise que la LIBRE RECHERCHE pratiquée par ses élèves motive la correspondance mathématique qu'il pratique actuellement au cycle d'observation. Pendant certaines heures de cours, mais aussi très souvent chez eux, les élèves font des recherches sur un sujet de leur choix. Ces recherches, présentées à la classe ou à un groupe de travail, sont mises au point collectivement avant d'être reportées au propre et envoyées aux correspondants. Ces derniers en discutent, essaient de comprendre, vérifient le travail, et souvent le prolongent. Les réponses et critiques accompagnent un nouvel envoi.

Une interview des élèves de Castetbon — enregistrée par des professeurs stagiaires — et accompagnée de diapositives montrant des enfants travaillant en groupes, communiquant leurs recherches à la classe, permit de mieux comprendre cette forme de travail.

A partir de ce montage s'établit un dialogue particulièrement intéressant et de nombreuses questions furent posées à Castetbon.

Questions relatives aux conditions matérielles :
— Nombre d'élèves ? Milieu social ? Niveau des élèves ?

Questions relatives aux formes de travail :
— Le programme est-il traité ? Place faite à la mémorisation ? aux manuels ?
— Comment s'assurer que les notions sont acquises ? Introduction du vocabulaire mathématique ?

Questions relatives à la correspondance et à la libre recherche.
— Comment vient l'idée de correspondance ? Comment démarrer la libre recherche ?
— Ces techniques sont-elles pratiquées en classe de Quatrième ?

Castetbon précisa que ses élèves — environ une trentaine par classe — étaient dans l'ensemble issus de familles modestes, le milieu où est implanté son établissement étant semi-rural, semi-ouvrier. Comme partout ses élèves sont de niveaux très divers en ce qui concerne les connaissances.

Le programme est traité mais certaines phases de tâtonnement sont très longues. Elles sont fondamentales : ce n'est pas du temps perdu ! Le vocabulaire mathématique est introduit lorsque le besoin s'en fait sentir et au plus tard lors de la formalisation des notions fondamentales qui intervient après la phase de tâtonnement. Ce vocabulaire et ces notions sont alors notés sur le classeur individuel de chaque élève. Les acquisitions se font progressivment par le travail personnel (recherches à partir de situations de la vie courante ; recherches à partir des travaux communiqués à la classe par les autres élèves). On peut arriver à limiter la mémorisation qui se fait surtout par la pratique. Il y a un contrôle permanent des connaissances à partir du travail individuel de chaque élève. Actuellement le contrôle se fait par l'intermédiaire de la correspondance. Chaque élève rédige un "livret auto-correctif" librement, à partir d'un plan établi collectivement, et l'envoie à son correspondant. Ainsi une correspondance individuelle double la correspondance collective entre les classes jumelées. Le passage à l'abstraction en quatrième ne semble pas un obstacle car déjà au cycle d'observation, et plus particulièrement en cinquième, les élèves s'évadent assez vite du concret. Il semble qu'il faudrait continuer au cycle d'orientation à ménager une phase de tâtonnement préalable aussi longue que possible ; mais les actuels programmes particulièrement copieux s'y prêtent moins bien.

Enfin Castetbon présenta et commenta un grand nombre de travaux d'élèves, expliquant leur genèse, leurs prolongements dans la classe, et également dans la classe des correspondants.

En conclusion la correspondance mathématique motive puissamment la libre recherche, permet à chacun de travailler à son rythme, et surtout respecte le tâtonnement de chaque élève, ce tâtonnement expérimental qui selon C. Freinet dans son "Essai de psychologie sensible" est une loi naturelle. La libre recherche et la correspondance mathématique permettent en outre une meilleure connaissance de chaque élève, car si nous essayons de faire découvrir les mathématiques nous sommes aussi et surtout des éducateurs.

A l'occasion du centenaire de la Société Mathématique de France, FRANCE CULTURE diffusera le 28 septembre à 18 h 15 une émission intitulée "100 ans d'activités mathématiques" avec la participation de J. P. KAHANE, P. LELONG et F. LE LIONNAIS.

Utilisation de la notion de relation à la résolution de quelques problèmes pratiques

Animateur : Maurice BOUTEILLE

Bouteille a distribué un polycopié (1) et nous a exposé deux exemples d'utilisation de relation binaire dans un ensemble fini pour la résolution de deux problèmes pratiques.

. Le premier problème fut de construire toutes les chaînes de montage possibles pour la construction d'un objet technologique nécessitant 10 postes de travail connaissant la relation de nécessaire postériorité dans l'ensemble des opérations technologiques liées à ces postes.

. Le deuxième problème fut de découvrir les 53 possibilités (dans l'exemple donné) que l'on a pour faire passer sept liquides successivement dans une même canalisation sachant qu'à cause de leur nature tous les liquides ne peuvent pas se succéder.

L'exposé a vivement intéressé l'auditoire qui a ensuite été invité à trouver d'autres exemples de l'utilisation de relations dans la résolution de problèmes pratiques ou plus simplement à nous donner des exemples d'analyse mathématique de problèmes technologiques.

Un premier participant nous a posé le problème suivant :

Sur un damier à n lignes, n colonnes, on étudie la marche d'un cavalier qui doit partir de la case p et revenir à la case p, après avoir parcouru les $n^2 - 1$ autres cases sans répétition. (Rappelons que le cavalier se déplace de 2 cases dans une direction et d'une case dans la direction perpendiculaire). Nous n'avons pas de solution pour les damiers 3×3, 4×4, 5×5, mais il y en a une pour les damiers 6×6, 8×8, ...

Un deuxième participant nous a montré comment il posait le problème du mouvement hélicoïdal en décrivant la relation vis-écrou, chacun pouvant être muni d'un mouvement de rotation R ou de translation T.

Nous pouvons dresser le diagramme suivant :

Vis		Ecrou	
R	T	R	T
1	0	0	1
0	1	1	0
0	0	1	1
1	1	0	0

(1) Voir en annexe

Un troisième participant nous a parlé des relations entre roues d'un même modèle qui constituent une boîte de vitesses et dans laquelle on peut définir une relation d'ordre.

Enfin de nombreux exemples ont été donnés en considérant des jeux éducatifs, des exemples électriques comme le va et vient trois postes, ou des exemples mécaniques comme le distributeur de boissons.

. Certains participants utilisent dans leurs classes un système de cartes perforées pour habituer les élèves à transformer des propriétés en langage binaire et à déterminer des intersections, des réunions ou des complémentaires.

. Enfin les participants ont signalé la difficulté qu'il y a de collaborer entre physiciens et mathématiciens qui, bien souvent, ont des processus de pensée bien différents.

. Ils ont aussi signalé l'imprécision du langage. Que signifient exactement : tableau logique, tableau technologique ...?

Annexe

" Les mathématiques modernes ne débouchent sur aucune application pratique ". Voilà une phrase que l'on entend dans n'importe quelle discussion sur ce sujet.

Le matériel mathématique utilisé sera la notion de relation binaire dans un ensemble fini.

Trois types de schémas sont souvent donnés pour une telle relation : le schéma fléché (ou sagittal), le schéma cartésien, le schéma 0–1 (ou matriciel).

Donnons un exemple.

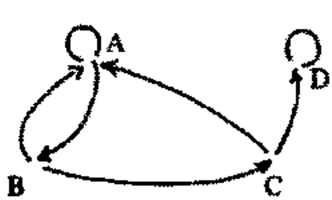
Soit E l'ensemble $\{A, B, C, D\}$

Une relation $\mathfrak{R}$ est définie par son graphe G, partie de $E \times E$.

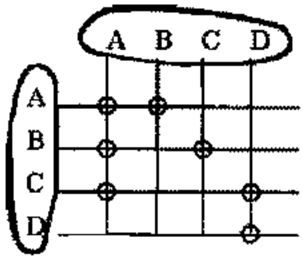
Ici G est $\{(A,A), (A,B), (B,C), (B,A), (C,D), (C,A), (D,D)\}$

Le schéma fléché de $\mathfrak{R}$ est le suivant :

On signale que $(B,C) \in G$, à l'aide d'une flèche allant de B à C.



Le schéma cartésien de $\mathfrak{R}$ est :



but

source

$(B,C) \in G$ est signalé par un rond entourant l'intersection de la ligne B et de la colonne C.

Le schéma 0–1 ou matrice de $\mathfrak{R}$ est :

but

$\mathfrak{R}$	A	B	C	D
A	1	1	0	0
B	1	0	1	0
C	1	0	0	1
D	0	0	0	1

source

Ce schéma ne représente rien d'autre que la fonction caractéristique de G.

1 à l'intersection de la ligne B et de la colonne C signifie que $(B,C) \in G$

0 à l'intersection de la ligne C et de la colonne B signifie que $(C,B) \notin G$.

I *Construction d'une chaîne de montage*

Dans l'industrie, tout objet manufacturé nécessite un certain nombre d'opérations technologiques. Certaines de ces opérations doivent nécessairement être postérieures à d'autres ; et entre certaines opérations un choix peut être réalisé.

Le problème est le suivant : connaissant la relation de nécessaire postériorité dans l'ensemble des opérations technologiques, construire toutes les chaînes de montage possibles.

Dans l'exemple ci-dessous, on aura 10 postes de montage que l'on notera A, B, C, D, E, F, G, H, I, J et on supposera connue la relation de nécessaire postériorité (notée $>$) par les 22 couples de son graphe :

$B > A$; $C > A$; $D > H$; $I > J$; $F > E$; $D > F$; $E > B$; $E > C$; $H > E$; $J > D$; $D > G$; $G > E$; $J > A$; $F > B$; $I > A$; $H > B$; $I > C$; $G > C$; $E > A$; $I > H$; $D > E$; $H > A$.

On construit alors la matrice de la relation >

but

source

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	
A	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
B	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
C	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
D	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	4
E	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	3
F	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	2
G	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0	2
H	1	1	0	0	1	0	0	0	0	0	3
I	1	0	1	0	0	0	0	1	0	1	4
J	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	2
	6	3	3	1	4	1	1	2	0	1	22

Puis, on fait la somme de tous les nombres se trouvant dans chaque ligne.

Quelle doit être la somme des nombres trouvés ?

Le nombre ainsi trouvé représente le nombre d'opérations nécessairement antérieures à l'opération correspondant à la ligne étudiée.
En particulier 0, somme des nombres de la ligne A, signifie que A n'a pas d'image pour la relation > ; c'est donc un point de départ possible pour la chaîne étudiée. Remarquons que dans l'exemple choisi, c'est le seul.

Effectuer la somme des nombres se trouvant dans chaque colonne.

Interpréter le nombre ainsi trouvé, et en particulier 0 , somme des nombres de la colonne I.

I est donc le point final de la chaîne.

Recommencer l'étude précédente sur le sous-ensemble
$\{B, C, D, E, F, G, H, J\}$.

Combien y a-t-il de couples dans le graphe de la nouvelle relation de nécessaire postériorité ?

but

source

	B	C	D	E	F	G	H	J	
B	0	0	0	0	0	0	0	0	0
C	0	0	0	0	0	0	0	0	0
D	0	0	0	1	1	1	1	0	4
E	1	1	0	0	0	0	0	0	2
F	1	0	0	1	0	0	0	0	2
G	0	1	0	1	0	0	0	0	2
H	1	0	0	1	0	0	0	0	2
J	0	0	1	0	0	0	0	0	1
	3	2	1	4	1	1	1	0	13

On conclut que B ou C sont des points de départ possibles de cette chaîne restreinte et J le point final.

On a déjà deux possibilités pour le début des chaînes possibles

$$A \longrightarrow B \longrightarrow C \ldots$$
$$A \longrightarrow C \longrightarrow B \ldots$$

Noter que toute chaîne se termine ainsi

$$\ldots \longrightarrow J \longrightarrow I$$

On pourra résumer ces possibilités par le schéma suivant :

$$\begin{tikzcd}
 & B \arrow[r] & C \ldots & & & \\
A \arrow[ur] \arrow[dr] & & & \ldots \arrow[r] & J \arrow[r] & I \\
 & C \arrow[r] & B \ldots & & &
\end{tikzcd}$$

On continue en s'intéressant aux cinq postes de montage restants :

but

source

	D	E	F	G	H	
D	0	1	1	1	1	4
E	0	0	0	0	0	0
F	0	1	0	0	0	1
G	0	1	0	0	0	1
H	0	1	0	0	0	1
	0	4	1	1	1	7

On peut alors compléter la chaîne de montage

$$\begin{tikzcd}[row sep=small, column sep=small] & B \arrow[dr] & & & & & \\ A \arrow[ur] \arrow[dr] & & E \ldots D \arrow[r] & J \arrow[r] & I \\ & C \arrow[ur] & & & \end{tikzcd}$$

Etudions les trois derniers postes de montage, F, G, H.

	F	G	H	
F	0	0	0	0
G	0	0	0	0
H	0	0	0	0
	0	0	0	0

Conclusion : Il n'y a aucune nécessaire postériorité entre F, G, H.

D'où le schéma final

$$\begin{tikzcd}[row sep=small, column sep=small] & B \arrow[dr] & & F \arrow[dr] & & & \\ A \arrow[ur] \arrow[dr] & & E \arrow[ur] \arrow[r] \arrow[dr] & G \arrow[r] & D \arrow[r] & J \arrow[r] & I \\ & C \arrow[ur] & & H \arrow[ur] & & & \end{tikzcd}$$

Cette étude montre 7 niveaux dans la chaîne de montage.

Le niveau initial ou niveau 1 constitué par A
le niveau 2 constitué par B et C BC ou CB
le niveau 3 constitué par E
le niveau 4 constitué par F, G et H FGH, GHF, HGF...
le niveau 5 constitué par D
le niveau 6 constitué par J
le niveau 7 constitué par I.

A l'aide de ce tableau, on peut construire 12 chaînes de montage.
Décrire ces douze chaînes de montage.

Problèmes annexes

. Donner le nombre minimal de couples éléments du graphe d'une relation permettant de définir une et une seule chaîne de montage convenable.

. Donner le nombre minimal de couples éléments du graphe d'une relation permettant de définir toutes les chaînes de montage convenables.

On peut alors compléter cet exercice par un calcul numérique qui consiste à rechercher la chaîne la plus "économique".

Si A est rapporté à la valeur 100,
alors si B précède C, B a la valeur 89 et C la valeur 97
et si C précède B, C a la valeur 88 et B la valeur 94
E a la valeur 62.

Si H est avant G, H a la valeur 78 et G la valeur 80
G est avant H, H a la valeur 73 et G la valeur 83
F est avant G, F a la valeur 75 et G la valeur 81
G est avant F, F a la valeur 78 et G la valeur 83
F est avant H, H a la valeur 75 et F la valeur 77
H est avant F, H a la valeur 74 et F la valeur 79 .

Remarque : Le problème est très simplifié; dans la pratique la place de F dans la chaîne totale joue un rôle.

D a la valeur 48, J la valeur 81 et I la valeur 18 .

Il suffit de trouver à chaque niveau la combinaison des postes de montage la plus "économique".

Au niveau 2, 2 chaînes possibles

B suivi de C d'un coût de 186
C suivi de B d'un coût de 182 .

Au niveau 4, 6 chaînes possibles

H suivi de G suivi de F d'un coût de 78 + 83 + 79 = 240 .

En effet H est avant G et avant F, pour que ces deux conditions soient réalisées simultanément, le coût de H est le plus grand des 2 coûts possibles (78 et 74).

De même G est avant F, mais après H ; d'où son coût est le plus grand des nombres 83 et 80.

Et pour F, on effectue le même raisonnement.

On étudie de même les chaînes

H suivi de F suivi de G d'un coût de 238
F suivi de H suivi de G d'un coût de 234
F suivi de G suivi de H d'un coût de 231
G suivi de F suivi de H d'un coût de 235
G suivi de H suivi de F d'un coût de 236 .

La chaîne la plus économique est : A C B E F G H D J I

2ème exemple

Soient 7 liquides L_1, L_2, ..., L_7 qui doivent passer dans une canalisation les uns après les autres ; mais, à cause de la nature de ces liquides, certains de ces produits ne peuvent se succéder dans la canalisation.

On définit ainsi une relation dans l'ensemble E des liquides

" $L_i \mathcal{R} L_j$ " signifie que " L_i ne doit pas précéder L_j " .

Le problème qu'on résoud dans les pages suivantes est de construire toutes les suites de liquides satisfaisant aux relations suivantes :

$L_1 \mathfrak{R} L_2$, $L_1 \mathfrak{R} L_4$, $L_1 \mathfrak{R} L_6$, $L_2 \mathfrak{R} L_1$, $L_2 \mathfrak{R} L_3$, $L_2 \mathfrak{R} L_7$, $L_2 \mathfrak{R} L_4$, $L_3 \mathfrak{R} L_1$, $L_3 \mathfrak{R} L_4$, $L_3 \mathfrak{R} L_7$, $L_3 \mathfrak{R} L_5$, $L_4 \mathfrak{R} L_1$, $L_4 \mathfrak{R} L_2$, $L_4 \mathfrak{R} L_5$, $L_5 \mathfrak{R} L_2$, $L_5 \mathfrak{R} L_6$, $L_5 \mathfrak{R} L_7$, $L_6 \mathfrak{R} L_1$, $L_6 \mathfrak{R} L_3$, $L_6 \mathfrak{R} L_5$, $L_7 \mathfrak{R} L_2$, $L_7 \mathfrak{R} L_4$, $L_7 \mathfrak{R} L_5$, $L_7 \mathfrak{R} L_6$.

On étudie d'abord le schéma cartésien de cette relation.

but

source

	L_1	L_2	L_3	L_4	L_5	L_6	L_7
L_1		X		X		X	
L_2	X		X	X			X
L_3	X			X	X		X
L_4	X	X			X		
L_5		X				X	X
L_6	X		X		X		
L_7		X		X	X	X	

Soit G le graphe de cette relation.

Soit $\overline{G}$ le complémentaire de G dans E × E privé des couples de la forme (L_1,L_1) , (L_2,L_2) , ... (L_7,L_7) .

Dressons le schéma cartésien de la relation $\mathfrak{R}'$ dans E de graphe $\overline{G}$.

but

source

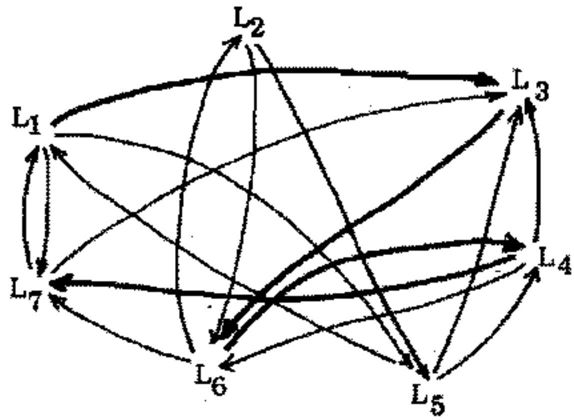
$\mathfrak{R}'$	L_1	L_2	L_3	L_4	L_5	L_6	L_7
L_1			X		X		X
L_2					X	X	
L_3		X				X	
L_4			X			X	X
L_5	X		X	X			
L_6		X		X			X
L_7	X		X				

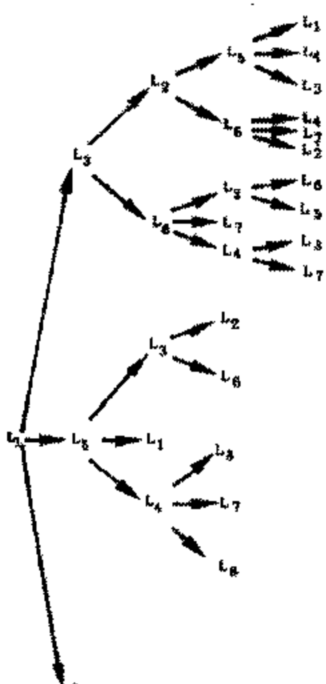
Etudions la signification de " $L_i \ \mathcal{R}' \ L_j$ ".

On prend la négation de "$L_i \ \mathcal{R} \ L_j$" c'est-à-dire la négation de "L_i ne doit pas précéder L_j" c'est-à-dire "L_i peut précéder L_j".

Introduisons une nouvelle notion, celle de chemin dans un graphe. On remarque que (L_1,L_3), (L_3,L_6), (L_6,L_4), (L_4,L_7) sont des couples éléments de $\overline{\overline{G}}$.

Sur le schéma fléché de $\overline{\overline{G}}$, ce fait se traduit par un chemin fléché d'origine L_1, d'extrémité L_7 et passant successivement par les points L_3, L_6, L_4.





Existe-t-il d'autres chemins fléchés allant de L_1 à L_7 sans passer deux fois par le même point ? L'arbre qui est cherché ci-dessous fournira la réponse.

Il y a quinze chemins allant de L_1 à L_7.

On appelle longueur d'un chemin le nombre de couples constituant ce chemin.

Exemple : Le chemin $(L_1,L_3),(L_3,L_6),(L_6,L_4),(L_4,L_7)$ a pour longueur 4.

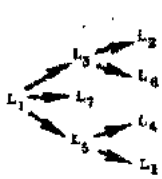
Un problème intéressant est de trouver un chemin de longueur minimale allant d'un point à un autre point.

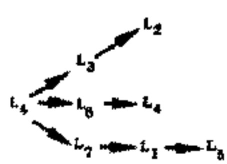
Exemple : Le chemin de longueur minimale allant de L_1 à L_7 est le chemin (L_1,L_7) de longueur un.

A l'aide de tableaux analogues aux tableaux ci-dessous, on pourra compléter la table suivante :

	L_1	L_2	L_3	L_4	L_5	L_6	L_7
L_1	2	2	1	2	1	2	1
L_2							
L_3							
L_4	2	2	1	2	3	1	1
L_5							
L_6							
L_7							

Longueur du chemin de longueur minimale d'origine L_1 d'extrémité L_2.



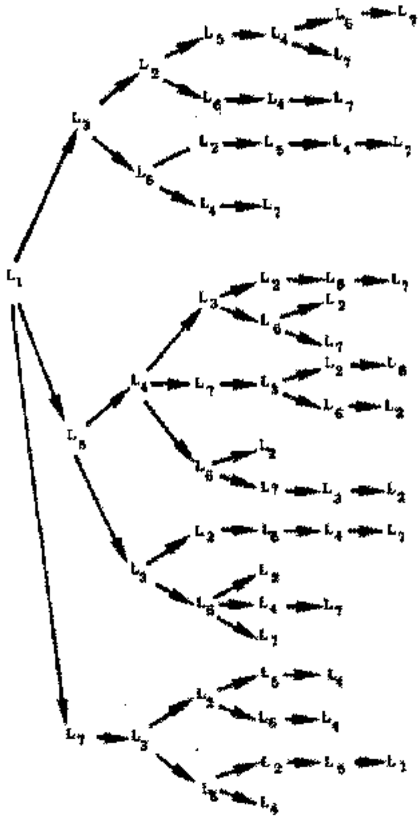


On appelle chemin élémentaire de $\overline{G}$ tout chemin passant une fois et une seule par chaque point de l'ensemble E.

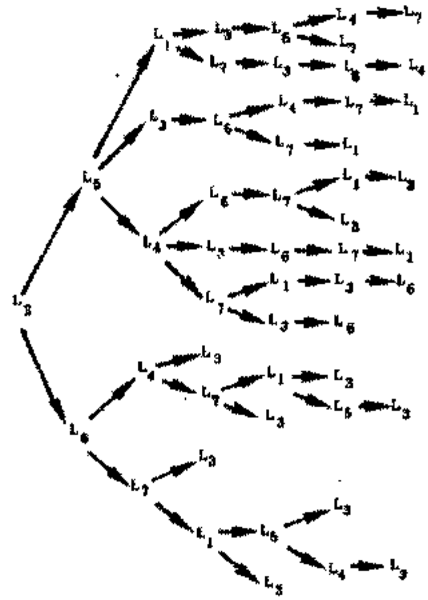
Exemple : $(L_1, L_5, L_3, L_2, L_6, L_4, L_7)$ est un chemin élémentaire.

Remarquons l'intérêt d'un chemin élémentaire dans $\overline{G}$; tout chemin élémentaire donne une solution du problème posé page 782.

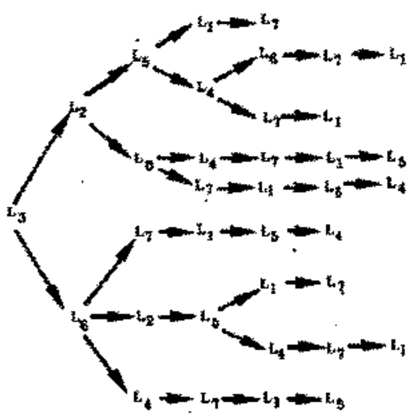
Recherche systématique de tous les chemins élémentaires de $\overline{G}$.



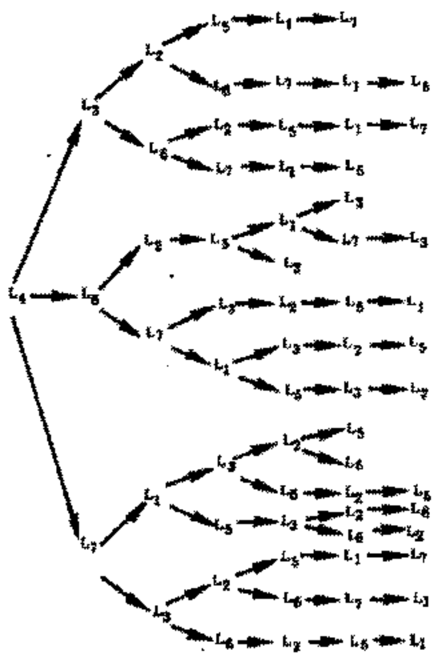
9 chemins



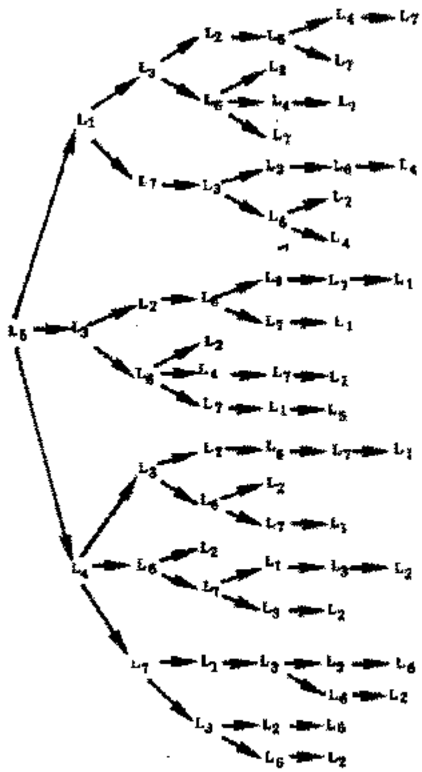
8 chemins



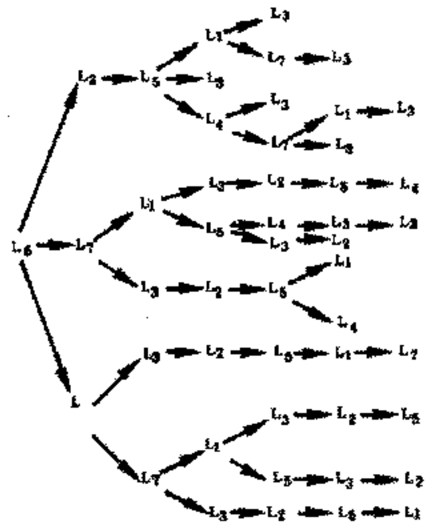
4 chemins



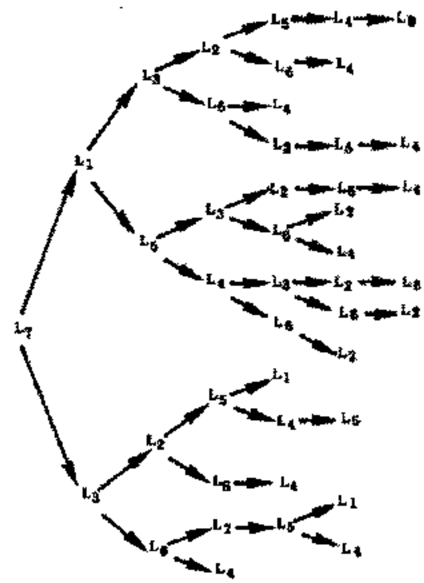
12 chemins



7 chemins



7 chemins



5 chemins

Conclusion : Le problème posé admet 53 solutions.