Dans une classe de troisième en marge du programme

par Magdeleine MOTTE (I.R.E.M. Aix - Marseille)

En 1970, une sous-commission de la Commission Ministérielle de l'enseignement mathématique a étudié ce que pourrait être un programme du cycle d'orientation qui :

a) renoncerait à imposer prématurément aux enfants de treize ans de trop longs développements déductifs — en particulier en géométrie — ;

b) s'attacherait à leur présenter des thèmes d'activité correspondant davantage à leurs intérêts et à leurs possibilités et prolongerait ainsi plus heureusement les programmes du cycle d'observation ;

c) pourrait tendre vers un enseignement moins coupé de la vie, des autres disciplines et de la formation civique.

Une double nécessité est apparue :

1. Ce programme ne devrait pas être un simple répertoire de connaissances, mais fixer les objectifs à atteindre en fin de troisième quant aux savoir-faire et indiquer d'une façon ni impérative ni limitative une liste de notions et thèmes d'activité dont la *fréquentation* au premier cycle préparerait efficacement un deuxième cycle quel qu'il soit (court, long ou vie active) ;
2. L'expérimentation d'un tel programme exigeait qu'un groupe se mette au travail pour rassembler des documents pouvant nourrir un tel enseignement, prendre des contacts avec des utilisateurs des mathématiques et étudier ceux de leurs problèmes qui pourraient suggérer, par un effort de schématisation ou transposition, des problèmes adaptés à l'âge de nos jeunes élèves.

Le travail ébauché par un très petit groupe n'a pu être poursuivi en commun avec le soutien matériel (décharges, possibilités de rencontre) nécessaire.

Il est cependant à l'origine du travail qui va être exposé.

En septembre de la même année, pensant aux élèves de la classe expérimentale que je suivais depuis la sixième et que j'allais accueillir en troisième, je décidais, en dépit de notre retard en géométrie affine par rapport au programme qui allait devenir officiel, et au risque accepté de ne pas achever le programme de géométrie métrique, de consacrer autant de temps que je le pourrais à l'étude de quelques situations hors programme choisies de façon à n'exiger aucune connaissance nouvelle mais à susciter la mise en oeuvre et l'élaboration de savoir-faire divers : *observations, rapprochements, tâtonnements méthodiques, usage de diagrammes, organisation de calculs ... et compréhension de textes lus.*

Après quelques exercices de transition, ces situations, rompant avec les "jeux" proposés en sixième, cinquième et quatrième, seraient aussi proches que possible de problèmes réels.

Voici les textes remis aux élèves :

(1) 26 septembre : A New-York, il y a des rues parallèles coupées perpendiculairement par des avenues. Notre classe est en voyage aux U.S.A. ; nous nous séparons au coin de la première rue et de la première avenue pour une exploration, par petits groupes. Nous nous donnons rendez-vous au coin de la quatrième rue et quatrième avenue. Combien d'itinéraires s'offrent à nous ?

(2) 10 octobre : Une société internationale de forage dispose de 5 machines rotary dispersées dans le monde entre différents dépôts. Ladite société a 5 contrats de forage sur 5 gisements également dispersés dans le monde. Les coûts d'acheminement des rotary vers les gisements sont importants. La société veut donc affecter les machines aux gisements de façon à rendre minimum la dépense totale due au transport. Les coûts d'acheminement des 5 machines a, b, c, d, e vers chacun des cinq gisements sont donnés par le tableau suivant :

	1	2	3	4	5
a	8	2	2	7	2
b	2	2	4	8	3
c	3	3	7	6	9
d	5	7	6	2	7
e	2	4	8	7	5

l'unité étant 1000 dollars. Quel est le programme d'affectation à choisir ? (1)

(1) Ce texte et le suivant sont empruntés à ROSENSTHIEL et MOTHES "Mathématiques de l'action".

(3) 17 octobre :

1 — Une enquête d'opinion sur un programme de télévision a donné les résultats suivants :

Degré de satisfaction / Age et Sexe	Enthousiastes	Satisfaits	Déçus	Hostiles
Femmes	16	5	2	2
Hommes	2	9	12	2
Jeunes filles	18	5	1	1
Jeunes garçons	2	3	15	5

Déduire de cette statistique S_1 à 16 classes, les statistiques :

- S_2 des degrés de satisfaction sans distinction d'âge ni de sexe;
- S_3 des degrés de satisfaction sans distinction d'âge;
- S_4 des degrés de satisfaction sans distinction de sexe;
- S_5 du niveau de réaction (le niveau moyen correspondant à "satisfait ou déçu" ; le niveau extrême à "enthousiaste ou hostile") avec distinction d'âge mais pas de sexe.

Comparer les partitions $\mathcal{T}_1$, $\mathcal{T}_2$, $\mathcal{T}_3$, $\mathcal{T}_4$, $\mathcal{T}_5$ correspondant aux statistiques S_1, S_2, S_3, S_4, S_5.

2 — Pour une enquête internationale sur l'âge des jeunes époux dans différents pays on a recours, pour ce qui est de la France, à deux études publiées :

— la première est une statistique sur 10 000 mariages à Paris de 1950 à 1960 classés de 16 à 70 ans par classes de 3 ans en 3 ans ;

— la seconde est une statistique sur 8 000 mariages dans le sud-ouest de 1952 à 1961 classés de 2 ans en 2 ans.

Pour avoir une seule statistique caractéristique du mariage en France, comment réunir les résultats de ces deux études ?

(4) 14 novembre : (les élèves ont reçu en septembre le document "DISTANCES" déjà reproduit dans "Mathématiques en quatrième" du Courrier de la recherche pédagogique auquel le lecteur est prié de se reporter. L'étude de l'application δ ayant fait l'objet de deux devoirs à la maison en octobre, la suite du document est étudiée en classe dans le cadre des activités exposées ici).

(5) 8 janvier :

Un problème : l'organisation d'une réunion nationale par un organisme professionnel.

Exemple : les stages trimestriels des professeurs de mathématique des classes expérimentales.

Données fixes : L'organisme organisateur et payeur est l'Institut Pédagogique National.

Le stage doit avoir lieu dans une ville universitaire possédant un Centre Régional de Documentation Pédagogique.

Le C.R.D.P. doit pouvoir offrir des salles de travail et des moyens modernes (audio-visuels, imprimerie).

Le stage dure trois jours ; quatre jours pour quelques professeurs (animateurs).

Donnée variables.

. Nombre des professeurs et animateurs ; en 70-71 : 61
. Répartition de cet effectif par résidence :

PARIS et banlieue : 17	POITIERS : 5	MARSEILLE : 3
LYON et banlieue : 27	BORDEAUX : 7	TOULON : 2

But : Minimiser le coût du stage par le choix du lieu. Ce coût comprend :

— le remboursement à chaque professeur de son trajet en chemin de fer ;
— le paiement à chaque professeur des indemnités de séjour.

(6) 13 janvier : *La croissance du développement économique*

Dans "Arcadie, essais sur le mieux vivre" Bertrand de Jouvenel écrit :

"En France de 1949 à 1959 le produit par habitant a progressé, en comptant au plus juste, de 3,5% l'an".

— Que signifie cette phrase ?

— En désignant par a le produit par habitant en 1949, quel est ce produit en 1950 ? en 1951 ? en 1952 ? en 1959 ?

— En admettant que le taux d'accroissement reste constant, que serait le produit en 1970 ?

Dans "Arcadie" on lit aussi :

"Ce chiffre — 3,5% l'an — ne fait pas une grande impression : mais si ce rythme était soutenu pendant un siècle, la richesse par habitant se trouverait multipliée trente et une fois.

Les rythmes constatés aujourd'hui sont une grande nouveauté. Les Etats-Unis ont étonné le monde par leur niveau de vie ; or, selon un statisticien éminent, le produit par habitant a septuplé au cours des cent-vingt ans 1839 - 1959, croissant au rythme moyen annuel de 1,64 % dont aucun pays moderne ne voudrait aujourd'hui se contenter ! "

En note : "L'accroissement annuel du produit a été beaucoup plus fort : 3,66% ; mais aussi l'accroissement de la population a été de 1,97% ; c'est par tête que le produit a crû de 1,64% : mais c'est l'accroissement par tête qui mesure le niveau de vie."

"Quoi qu'il en soit, les faits, avant une époque toute récente, n'avaient jamais été si frappants qu'ils puissent accréditer l'opinion, aujourd'hui consacrée, que l'enrichissement peut être obtenu pour tous et pour chacun, continuellement et à un rythme rapide ... Pour nous en tenir aux résultats d'un même rythme supposé soutenu (3,5% l'an), on peut aisément se représenter le niveau de vie doublé en vingt ans ; sa multiplication par trente et un en un siècle dépasse l'imagination et sa multiplication par neuf cent-soixante et un en deux siècles ne présente plus rien à l'esprit ... Mais pour le moment un souci plus simple nous sollicite. S'il est vrai que nous nous enrichissons à un tel rythme, assurément nous devons mettre au premier rang de nos préoccupations le problème de l'emploi de la richesse. L'art d'employer le travail humain et les forces naturelles de façon à causer un flux de richesse rapidement croissant a été grandement développé : il appelle un autre art : celui d'employer lesdites richesses.

(7) 13 février :

TABLE

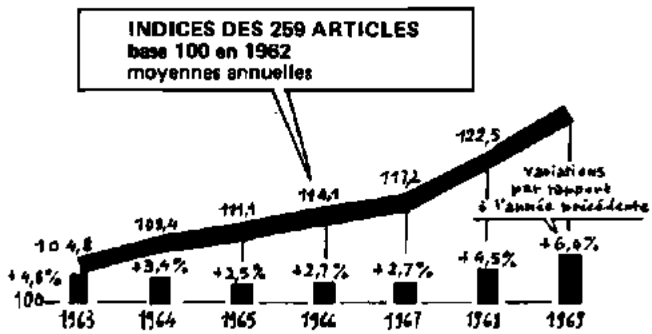
donnant, à la fin d'un nombre d'années *n*, la valeur de 1 franc placé à intérêt composé ... $(1 + r)^n$

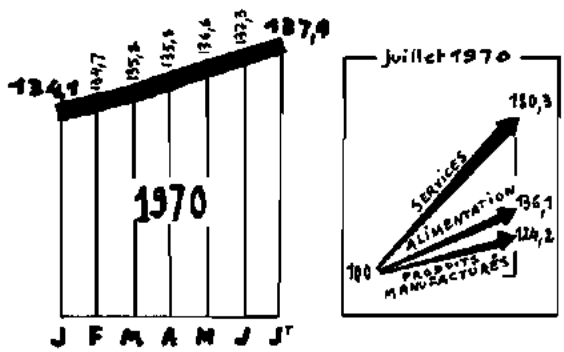
n	1 1/2%	2%	2 1/2%	3%	3 1/2%
1	1,015 000	1,020 000	1,025 000	1,030 000	1,035 000
2	1,030 225	1,040 400	1,050 625	1,060 900	1,071 225
3	1,045 678	1,061 208	1,076 891	1,092 727	1,108 718
4	1,061 363	1,082 432	1,103 813	1,125 509	1,147 523
5	1,077 284	1,104 081	1,131 408	1,159 274	1,187 686
6	1,093 443	1,126 162	1,159 693	1,194 052	1,229 255
7	1,103 845	1,148 686	1,188 686	1,229 874	1,272 279
8	1,126 492	1,171 659	1,218 403	1,266 770	1,316 809
9	1,143 390	1,195 093	1,248 863	1,304 773	1,362 897
10	1,161 541	1,218 994	1,280 083	1,343 916	1,410 599

(8) Mars : *Graphique paru dans "La vie française", numéro du 4 septembre 1970*

GRAPHIQUES COMMENTES

LE COUT DE LA VIE EN FRANCE A AUGMENTE DE 30% EN 7 ANS





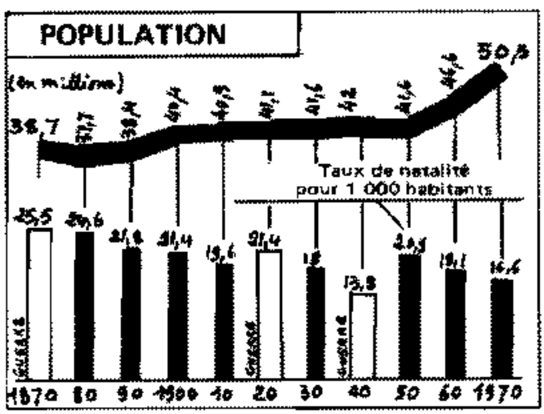
Depuis 1963, l'indice des prix dans l'agglomération parisienne porte sur 259 articles. Les produits alimentaires entrent dans le calcul pour 45%, les services pour 10,9%, les loyers et charges pour 3,3% seulement. En 7 ans, le coût de la vie a augmenté globalement de 30%. C'est en 1965, 1966 et 1967 que la progression a été la plus faible. Mais depuis 1968, la courbe des prix s'est fortement relevée (+ 4,5% en 1968, + 6,4% en 1969). En dépit des efforts annoncés par les pouvoirs publics, la pente de progression annuelle reste de 9,5% par mois depuis le début de l'année. Toutefois les prix n'ont pas tous augmenté au même rythme.

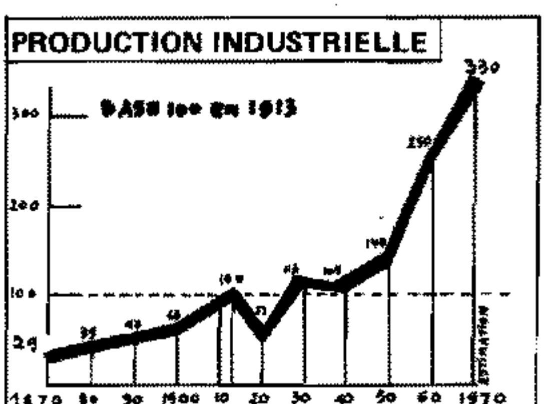
La courbe de l'alimentation est légèrement supérieure à la moyenne (36,1%), alors que celle des services accuse une progression considérable (80,3%). Seuls les produits manufacturés ont connu une hausse modérée (24,2%). Il faut souligner cependant que ces marchandises ont un rôle déterminant dans la compétition internationale.

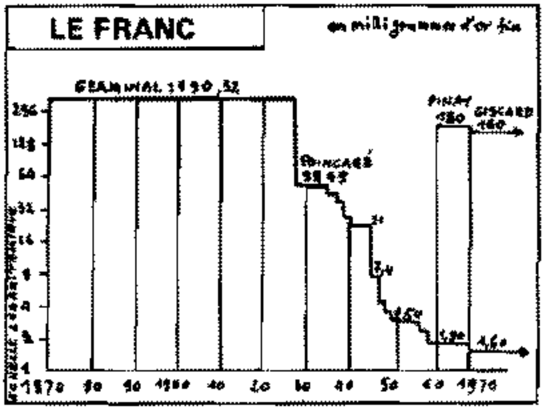
Etudie ce document.

Une étude sérieuse doit te permettre de retrouver le nombre (indice en 1969) que j'ai caché. Auparavant, tu pourras essayer de déduire l'indice pour 1964 de l'indice pour 1963 et du taux de croissance de 1963 à 1964.

(9) Mars : "*Cent ans de Républiques*"

1. 

2. 



3.

Tel était le titre de l'article paru dans "La vie française" du 4 septembre 1970 dont sont extraits ces trois documents.

En supposant un taux d'accroissement par décennie *constant* :

Avec (1) calcule le *taux* moyen d'accroissement de la population française *par décennie* dans la période 1870 - 1970.

Avec (2) calcule le *taux* moyen *annuel* de la croissance de la production industrielle pendant la décennie 1950 - 1960.

Sur (3) observe les graduations "verticales".

Commentaires

• Classe de 22 élèves ; travail par équipes de deux ou trois élèves, librement formées.

• (1) Immédiatement, on me fait préciser qu'il s'agit des plus courts chemins. A la fin de la première séance la synthèse ne donne rien ! Les élèves sont tellement convaincues "qu'il faut trouver une méthode" et non faire une recherche empirique qu'elles ferment les yeux sur les résultats faciles à obtenir.

Au début de la séance suivante (3 octobre) j'attire leur attention sur cette attitude : la "méthode" ne peut être obtenue sans une observation patiente de la situation ! Cette fois, avant que nous nous séparions, presque toutes les équipes trouvent, en même temps que le nombre cherché, la récurrence.

• (2) Au bout d'une vingtaine de minutes environ, par un tâtonnement intelligent, sept équipes ont trouvé un programme de valeur 12 et une seule a trouvé 13. Je propose alors de chercher s'il est possible de prouver qu'on ne peut pas faire mieux que 12. Les élèves comprennent l'objectif mais sont désemparées. Elles pensent à l'arbre, le caractérisent, mais ne s'intéressent plus à le tracer. Cependant dans une équipe une élève s'est mise à travailler seule et lorsque je m'approche me dit à peu près "j'ai fait ça, mais je ne sais plus continuer". Sur sa feuille :

1.	b e	c	d	a	
2.	a b	c	e	d	
3.	a	b	d	c	e
4.	d	c	e a	b	
5.	a	b	e	d	c

Elle explique : "sur la 1ère ligne b et e sont avant c parce que leur affectation à 1 est plus avantageuse que celle de c".

Je suis très intéressée et lui suggère de compléter le tableau en ajoutant "2" entre (1) et (be) puis les accroissements de coûts entre (be) et (c), (c) et (d), etc ...

Je la laisse à son travail et cherche le parti qu'elle peut en tirer. Si une bijection de la 1ère colonne — {1,2,3,4,5} — sur l'ensemble des lettres de la 2e est possible alors 10 est le coût minimum ; sinon cherchons à faire dans la 3e colonne l'incursion la moins désavantageuse ... ; la solution est à la portée de sa main. Il faut se séparer : peut-être Joëlle la trouvera-t-elle chez elle ? Non, il a fallu l'aider encore. Mais je puis assurer à la classe que c'est Joëlle Q. qui a trouvé le dispositif, donc la solution.

Je me garde bien de donner les solutions en ma connaissance.

● (3) Le premier exercice, plutôt du niveau de la classe de cinquième, contrôlait la compréhension d'un texte. Le deuxième également : je n'ai pas eu à intervenir. J'ai retenu ces exercices ... faute de mieux et pour ne pas présenter la situation (5) après (2).

● (4) "Du côté des botanistes ..." J'ai expliqué "fréquence", "échelle à 5 degrés", et invité à ébaucher un tableau. Des élèves ont introduit des lettres et les valeurs absolues. C'est lors de la synthèse qu'on a établi que cette "distance" vérifiait la troisième propriété, comme application de

$$|a - a''| \leqslant |a - a'| + |a' - a''|$$

$$\text{et} \quad [\; Ai < Bi \Rightarrow \Sigma Ai \leqslant \Sigma Bi \;]$$

● (5) Les élèves avaient à leur disposition un tableau triangulaire, établi par l'une d'elles, des distances en chemin de fer d'une ville académique à une autre.

Deux équipes commencent en confondant la minimisation du coût total avec celle des coûts partiels.

Le travail est ensuite bien mené par toutes les équipes (élimination sans calcul des villes qui ne peuvent visiblement pas se mettre sur les rangs ; calculs pour Paris, Dijon, Lyon, Clermont pour vérifier la conclusion obtenue le plus souvent sans calculs : "c'est Lyon").

Le travail a pris une séance et dix minutes de synthèse quelques jours plus tard. On me dit "c'est Lyon, si elle remplit les autres conditions ? " "Non" "Alors,c'est Dijon ! ".

● (6) J'ai dirigé l'étude de ce document auquel nous avons consacré cinq séances du 13 janvier au 13 février.

13 janvier : (30 minutes). Lecture individuelle des quatre premières lignes. Je réponds aux questions. Hélène explique "de 3,5 % l'an" par "au bout d'un an c'est a + 3,5 % de a". Il faut maintenant traduire "3,5 % de ". En passant par a = 100, a = 10, a = 1 on arrive à "a + 0,035 a" puis a(1 + 0,035) = 1,035 a.

On prépare alors le tableau du P.N.B. par habitant :

1949	1950	1951	1952		
a	a (1 + 0,035)				
	1,035 a				

16 janvier : (1 heure). Aucune équipe ne fait d'erreur pour compléter le tableau. Elles attaquent la question du calcul pratique et je n'interviens pas.

30 janvier : (3/4 heure). Collecte des résultats : une équipe a voulu garder tous les chiffres, une autre a arrondi au centième les résultats successifs mais conservé 1,035 comme multiplicateur : on constate qu'elle a des résultats valables. Mais ... on découvre des erreurs et finalement trois équipes seulement ont des résultats jusqu'à $(1{,}035)^5$.

On croit remarquer une augmentation du coefficient de 0,04 ; mais on a des doutes.

J'interviens pour signaler l'analogie du problème avec celui du calcul des intérêts composés et l'existence de tables donnant $(1 + t)^n$ pour diverses valeurs de t et n. Je demande à M. Claire si son père, travaillant dans une banque, pourrait nous en fournir une pour t = 3,5%.

Mais se pose le problème de l'établissement de la table.

Le rapprochement avec le triangle de Pascal est vu par Joëlle B.

On regarde comment vont se présenter les calculs en écrivant les développements de $(1 + t)^n$ de $(1 + t)$ à $(1 + t)^5$; on voit qu'il ne serait pas suffisant de calculer t^i à 10^{-2} près.

6 février : On établit un plan de calcul et on distribue les tâches au fur et à mesure : deux élèves pour t^2 qui commencent ; deux élèves pour t^3 et deux pour t^4 qui commencent dès que les premières ont achevé ... etc ...

Pendant que les calculatrices travaillent les autres préparent un tableau destiné à collecter les monômes du développement de $(1 + t)^n$, $n \leqslant 6$, dont le calcul est confié à une même équipe pour un degré donné :

$(1 + t)^n$	t^0	t^1	t^2		t^6
	1	0,035			
$n = 2$	**1**	**2**	**1**		
$n = 3$	**1**	**3**	**3**		

En rouge — ici en caractères épais — les coefficients du binôme. Pour faciliter l'addition finale, on fait subir une symétrie au tableau. La séance s'achève sur la collecte de tous les résultats : il ne reste à faire que les additions.

13 février : Les additions ont été faites à la maison et M. Claire nous a apporté des photocopies d'une table donnant $(1 + t)^n$ pour $n \leqslant 50$ et $t \in \{1,5\% ; 2\% ; 2,5\% ; 3\% ; 3,5\%\}$. Nous pouvons contrôler nos calculs puis y lire qu'au taux de 0,035 le P.N.B. double pratiquement en 20 ans.

C'est le moment de se poser des questions et d'étudier la suite du document. En fait, les élèves l'ont lu et nous allons répondre à leurs questions, leur professeur d'histoire et moi, dans la mesure de nos possibilités. La séance est vivante, les idées abordées intéressent beaucoup les élèves qui y reviendront d'ailleurs au cours d'instruction civique. Toutefois, la conclusion de B. de Jouvenel aurait appelé la participation du professeur de lettres par un choix de textes permettant de prolonger et approfondir la réflexion.

Dès le mois d'août, dans une lettre à l'équipe des professeurs qui devaient prendre cette classe, j'avais suggéré d'essayer de donner à notre travail une certaine unité à partir de quelques-unes des idées contenues dans "Arcadie" et accessibles aux élèves : par exemple, l'opposition entre les vertus traditionnelles de stabilité et la disponibilité demandée au citoyen d'un état moderne aurait pu être présentée par un choix de textes latins et français ; l'horreur des débuts de l'ère industrielle (participation du professeur d'anglais) pouvait être équilibrée par la perception du lien entre développement économique et développement de l'hygiène (participation du professeur de sciences), etc ...

Mais ma proposition n'a pas eu d'écho.

• (8) Ce document a fait l'objet d'un travail ultérieur. La comparaison avec nos calculs a montré qu'il donne soit la valeur approchée par défaut, soit la valeur par excès, à 10^{-6} près. Nous l'utilisons pour donner divers encadrements, pour rechercher sans calcul, avec l'aide de la table des carrés, une valeur approchée à une unité près de $(1{,}035)^{100}$ puis une valeur approchée de $(1{,}035)^{200}$ et vérifier ainsi sans peine qu'une petite erreur s'est glissée dans le texte de B. de Jouvenel à la 8e ligne (de bas en haut).

Je crois pouvoir arrêter ici ces commentaires.

Que conclure ? L'intérêt de ce travail dans l'immédiat (soutien de l'intérêt des élèves malgré les déboires rencontrés par beaucoup en géométrie, poursuite de travaux faisant une bonne part à leur initiative) me paraît dépassé, malgré sa gaucherie (j'ai imposé les sujets ; mon choix a été limité par mes connaissances, le temps dont j'ai disposé pour mes recherches, l'horaire ...), par les perspectives qu'il ouvre.

Je tiens à insister sur le fait que tous ces travaux étaient bien à la portée de ces élèves travaillant en équipes ; qu'il n'y avait pas d'élève à l'écart du travail ; que mes interventions ont été limitées à celles que j'ai signalées ; que plusieurs des situations pourraient être présentées plus tôt : (1) en cinquième (expérience de Roumanet) ; (2) en quatrième, voire en cinquième ; (3) en cinquième.

On entrevoit alors un enseignement de la sixième à la troisième où alterneraient et se mêleraient :

— l'étude de situations (a) dont la mathématisation conduirait à la conquête de notions et connaissances [(1) peut conduire au triangle de Pascal et pose une pierre pour la notion de récurrence ; (2) introduit la notion de bijection et l'arbre factoriel des bijections de A dans B ; (3) peut conduire à la notion de partition, justifier l'introduction de la relation d'inclusion]

— celle de situations (b) où ces connaissances seraient utilisées,

— et quelques morceaux de déduction (groupes, corps finis, Z, calcul dans un espace vectoriel).

L'expérience décrite montre qu'une situation ne peut pas être classée à priori en (a) ou (b) ; c'est l'instant de son introduction qui en décide.

L'A.P.M.E.P. ne pourrait-elle prendre l'initiative de la formation d'un ou plusieurs groupes de travail qui établiraient des documents utilisables de la sixième à la troisième et — pourquoi pas ? — au-delà ? Certains collègues pourraient se charger du dépouillement systématique des revues anglo-saxonnes. C'est aussi, évidemment, un travail possible au sein d'un I.R.E.M. ou plusieurs I.R.E.M.

Voici un début de bibliographie pour ce travail :

1. — ROSENSTHIEL et MOTHES, Mathématiques de l'action (Dunod)
2. — STEINHAUS, Mathématiques en instantanées
3. — CULLMANN et KAUFMANN, Initiation à la recherche opérationnelle (Dunod - poche)
4. — P. GORDON et E. VENTURA, La drogue - miracle du professeur KASHINAWA, la recherche opérationnelle en 10 sketches (Clefs de l'économie)
5. — H. WEYL, La symétrie.
6. — RAPOPORT, Jeux de stratégie.
7. — GALION (2e séminaire), La concrétisation en mathématique.

et quelques sujets de travail :

- Un document sur les systèmes électoraux (rassembler des données éparses dans les livres d'instruction civique, de droit, d'histoire : recensement des systèmes électoraux en usage ici et ailleurs ; leurs origines ; comparaison des méthodes de répartition des restes ; informations pour le professeur et élaboration de textes (problèmes) pour élèves du premier cycle ; voir aussi (2) ci-dessus).

- Un document sur les mécanismes de croissance : végétaux ; cristaux ; populations de cellules in vitro ; d'insectes ... ?

- Un document sur les problèmes démographiques.

- Pour une étude diffuse et progressive de la statistique descriptive au long du premier cycle, un document suggérant des enquêtes et comptages effectués par les élèves, fournissant des données de comparaison ...

On voit bien où est le travail : rechercher l'aide d'un bon spécialiste apportant une aide pour le choix de l'information du professeur, la bibliographie à donner en complément, les suggestions de simplifications valables et des dangers à éviter dans la mise au point de questions pour les élèves.