Exercices de ci de la

Frédéric De Ligt*

*Cette rubrique « **Exercices de ci de là** » a pris son envol dans le bulletin n° 451 de mars-avril 2004 sous l'impulsion d'Henri Bareil et de Christiane Zehren.*

En réponse à diverses demandes, la Commission du Bulletin engage, avec l'aval de notre Président, une partition de la rubrique « Problèmes » :

– toujours avec le même intitulé « Problèmes de l'APMEP » et le même responsable, François LO JACOMO, la rubrique traditionnelle se poursuivra, mais selon de nouvelles modalités explicitées en son en tête.

– une rubrique nouvelle voit le jour dès ce numéro.
Intitulée « Exercices de ci, de là » – allusion à son mode de collecte d'énoncés –, elle est confiée à Serge PARPAY et son équipe de Poitevins (ouverte à tout autre collègue !), d'où sa signature : « Le groupe du CLAIN »(*)
Elle devrait comporter des énoncés plus modeste, donc proposables aussi à nos élèves. Réagissez pour nous dire si ce but est suffisamment atteint ! D'avance merci !

Nous remercions chaleureusement François LO JACOMO et Serge PARPAY avec son équipe pour leur amical investissement dans ces deux nouvelles démarches.

Henri BAREIL et Christiane ZEHREN.

Dès le début de cette rubrique, j'ai assuré les liaisons Internet et postale entre ses responsables : Serge Parpay puis Bruno Alaplantive, et les collègues qui proposaient des exercices et des solutions. Qu'ils soient tous ici remerciés d'avoir fait vivre si intensément cette rubrique, ainsi que Frédéric De Ligt qui a assuré cette dernière parution.

Jean Fromentin

(*) Responsable de la Rubricol'age de Corol'aire (journal de la Régionale APMEP de Poitou-Charentes)

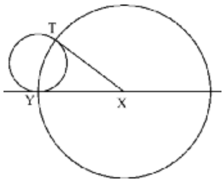
Solutions

Exercice 524–1 Jean Couzineau (Massy Palaiseau)

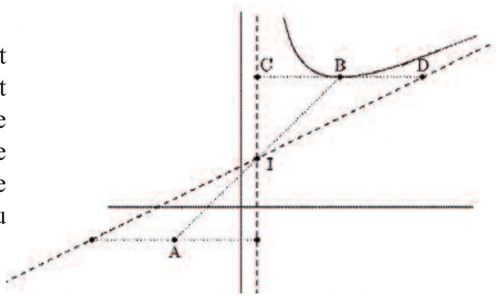
Dans le plan rapporté à un repère orthonormé, on considère les points A(-2 ; -1) et B(3 ; 4).
Quel est l'ensemble des points S du plan tels que S soit le sommet d'une parabole passant par A et B et d'axe parallèle à (Oy) ?

Solutions : André Gramain (Lyon), Alain Bougeard (Les Lilas), Jacques Chayé (Poitiers), Jean Gounon (Chardonnay), Marie-Nicole Gras (Le Bourg d'Oisans), Pierre Renfer (Saint Georges d'Orques), Maurice Bauval (Versailles).

A. Voici la solution d'André Gramain.



Dans un plan euclidien, considérons une droite D, deux points X et Y de cette droite, distincts l'un de l'autre. Soit C un cercle tangent à la droite D au point Y, et soit T le contact de la deuxième tangente issue du point X au cercle C. Le point T est un point du cercle G de centre X passant par le point Y. Lorsqu'on fait varier le cercle C, l'ensemble des points T qu'on obtient est le cercle G (sauf le point diamétralement opposé au point Y).
C'est une vieille méthode de taupins de transformer un problème sur les coniques en problème sur les cercles en envoyant les eux points bien choisis aux points cycliques par une homographie.
Considérons une homographie du plan qui envoie les points A et B aux points cycliques. La droite D est l'image de la droite de l'infini, les points X et Y sont les images des points à l'infini dans les directions O*x* et O*y* respectivement. L'image d'une conique passant par A et B est un cercle. L'image d'une parabole dont l'axe est parallèle à O*y* est un cercle tangent à la droite D au point Y. Le sommet de la parabole est le contact de la tangente parallèle à O*x* . Son image est le contact T de la deuxième tangente issue du point X.
Il reste à transformer le cercle G par l'homographie réciproque. Par cette homographie, l'image d'un cercle est une conique H passant par les points A et B. Le point Y appartient au cercle G ; par suite, la conique H a un point à l'infini dans la direction de Oy, c'est-à-dire une asymptote verticale. Enfin, le point X est le pôle de la droite de l'infini et les contacts des tangentes au cercle G issues du point X sont les points cycliques. Il en résulte que les contacts des tangentes horizontales à la conique H sont les points A et B.



La conique H est une hyperbole dont le centre est le milieu I du segment AB. L'asymptote verticale passe par le point Iet coupe au point C la tangente au point B. La deuxième asymptote passe par le point D symétrique du point C par rapport au point B.

B. Voici la solution de Maurice Bauval (Versailles).

Si les coordonnées de S sont (a ; b), les paraboles cherchées ont pour équation : $y - b = m(x - a)^2$.

On écrit qu'elles passent par A et B et on élimine m entre les deux relations :

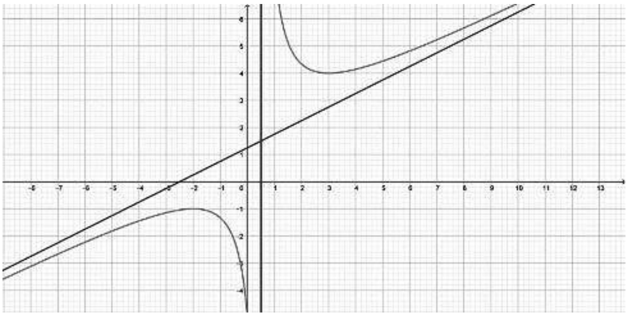
$$-1-b=m(-2-a)^2 \quad \text{et} \quad 4-b=m(3-a)^2$$

$$(3-a)^2(-1-b)=(2+a)^2(4-b)\text{ ; d'où } b=\frac{(a^2+2a+5)}{(2a-1)}$$

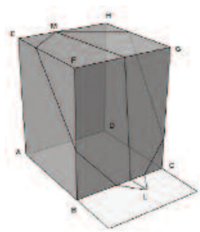
L'ensemble des points S est l'hyperbole d'équation

$$y=\frac{(x^2+2x+5)}{(2x-1)}=\frac{x}{2}+\frac{5}{4}+\frac{25}{4(2x-1)}$$

$x=\frac{1}{2}$ et $y=\frac{x}{2}+\frac{5}{4}$ sont les équations des asymptotes.



Ex 524–2 Robert March (Paris)



Un lézard L a aperçu un moucheron M posé sur l'arête d'un parallélépipède rectangle de base carrée ABCD avec AB = 20 et de hauteur AE = 25.

Le moucheron est posé sur l'arête [EH] avec EM = 8. Le lézard est au sol devant la face BCGF (cf. figure) dans une position non précisée.

Il veut attraper le moucheron en empruntant le plus court chemin. Il s'avère qu'il a trois parcours possibles de même longueur l.

Que vaut l ?

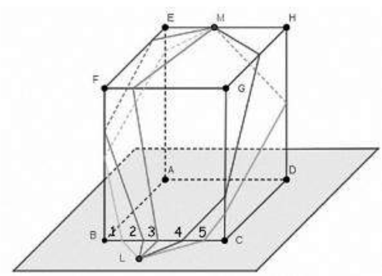
Solutions : Pierre Renfer (Saint Georges d'Orques), Michel Lafond (Dijon), Fabrice Laurent (Lunéville), Alain Bougeard (Les Lilas).

Voici la solution d'Alain Bougeard.

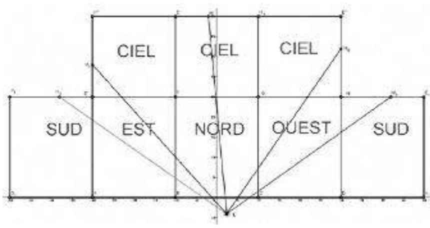
La figure bizarre accompagnant l'énoncé n'apportant pas grand renseignement (*en effet, une erreur d'importation a pris un dessin de l'exercice suivant !*), seule la lecture attentive de l'énoncé permet de reconstituer le parallélépipède rectangle accompagné du lézard L et du moucheron M comme dans la figure de la page suivante.

Comme le savent tous ceux qui ont circulé sur un cube, les chemins de longueur minimale s'obtiennent en utilisant les bons développements du cube sur lesquels le plus court chemin est… la ligne droite.
Le lézard ne peut à priori qu'attaquer le cube par la face nord (BCGF) et là 5 possibilités s'offrent à lui, à partir de L, de gauche à droite :

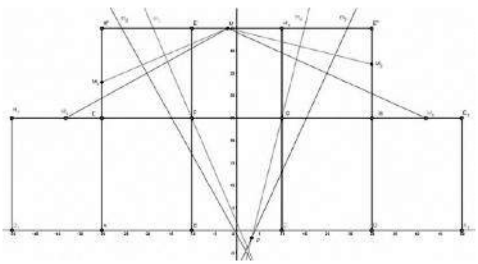
- le trajet 1 : face nord puis ouest puis sud (AEHD)
- le trajet 2 : face nord puis face ouest (FEAB) puis le ciel
- le trajet 3 : face nord puis le ciel (FGHE) jusqu'à M.
- le trajet 4 : face nord puis est (CDHG) puis le ciel
- le trajet 5 ; face nord puis est puis sud.



À chacun de ces trajets correspond un développement particulier qu'il va falloir regrouper dans un même plan pour pouvoir faire des constructions puis des calculs.



Sur la figure ci-contre, où l'on suppose le point L connu, sont représentés par des segments les 5 trajets les plus courts définis ci-dessus.
Mais il faut de plus avoir l'égalité de 3 trajets. Or pour avoir l'égalité de 2 trajets il faut que le point L appartienne à la médiatrice des 2 points M_i extrémités.
Nous allons donc explorer, grâce à GeoGebra, les intersections utiles des médiatrices (utile signifie que nous n'oublierons pas que dans un triangle les 3 médiatrices sont concourantes…)



Il suffira de regarder les intersections de 4 médiatrices m_i (quand nous avons l'intersection de la médiatrice de $[MM_2]$ avec la médiatrice de $[MM_4]$ nous avons aussi le point d'intersection avec la médiatrice de $[M_2M_4]$).
Nous voyons clairement que parmi les 6 points candidats le vainqueur est le point P (intersection de m_2 et de m_4) qui minimise les distances au point M.
Et si GeoGebra n'existait pas ? Eh bien il suffirait de faire six fois le calcul que nous allons faire maintenant pour obtenir le même résultat.

Calcul des coordonnées du point P

Avec le repère choisi nous avons $M(-2{,}45), M_2(30{,}37)$ et $P(x,y)$.

L'équation de la médiatrice m_4 sera : $PM^2 - PM_2^2 = 0$

donc $(x+2)^2 + (y-45)^2 - (x-30)^2 - (y-37)^2 = 16(4x - y - 15) = 0$ (1).

De la même façon on trouve l’équation de la médiatrice m_2 : $11x-5y-45=0$ (2).

En résolvant le système formé par (1) et (2) on trouve les coordonnées du point $P=\left(\frac{10}{3},\frac{-5}{3}\right)$ ce qui permet de calculer la longueur l.

$$l=\sqrt{\left(\frac{10}{3}+2\right)^2+\left(\frac{-5}{3}-45\right)^2}=\frac{1}{3}\sqrt{19856}\approx 46{,}970$$

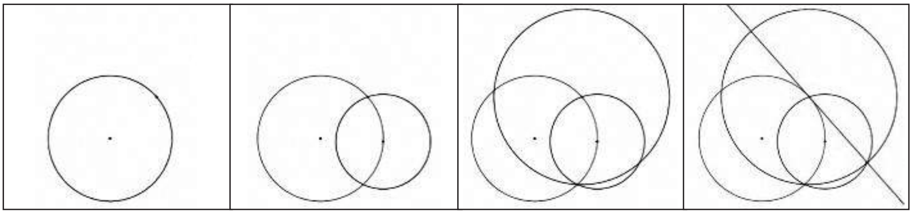
Exercice 524-3 *Pour nos élèves* : Euclidea[1]

Dans ce jeu on dispose de deux types élémentaires (E) de constructions :

- La droite qui passe par deux points donnés.

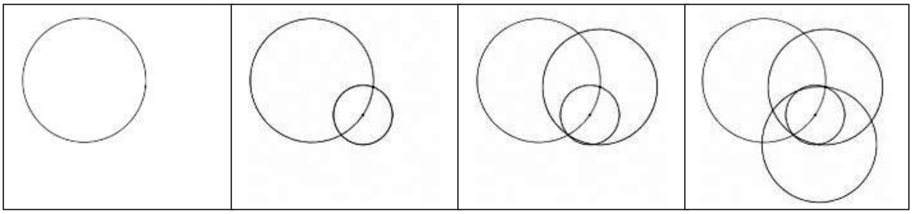
- Le cercle de centre donné passant par un point donné.

Justifier les constructions suivantes :

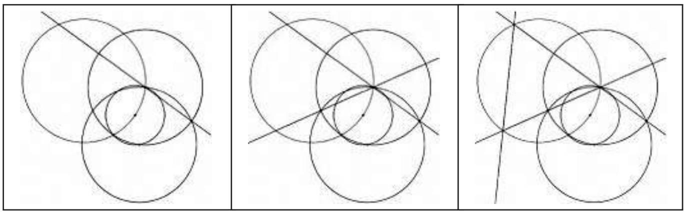


0 1 2 3

A. Construire la tangente à un cercle de centre donné qui passe par un point donné (3E).



0 1 2 3



4 5 6

B. Inscrire un triangle équilatéral dans un cercle de centre donné (6E).

Solutions : Marie-Nicole Gras (Le Bourg d’Oisans), Pierre Renfer (Saint Georges d’Orques).

[1] https://www.euclidea.xyz/

Voici la solution de Pierre Renfer.

Construction A

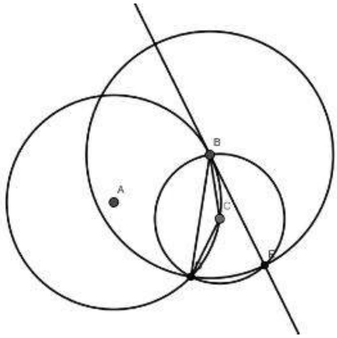
Au cercle, de centre A, passant par B, on veut construire sa tangente en B.

On choisit un point C sur le cercle et on trace le cercle, de centre C, passant par B.

Soit D le point d'intersection des deux cercles autre que B.

On trace ensuite le cercle de centre B, passant par D, qui rencontre le cercle, de centre C, en un second point E.

Alors la droite (BE) est la tangente cherchée.



Démonstration :

La figure formée des cercles de centres B et C admet la ligne des centres (BC) comme axe de symétrie.

On en déduit l'égalité angulaire : $\left(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BE}\right)=-\left(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BD}\right)$.

Dans le triangle isocèle BCD, on trouve l'égalité angulaire : $\left(\overrightarrow{DC},\overrightarrow{DB}\right)=-\left(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BD}\right)$

Des deux égalités on déduit : $\left(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BE}\right)=-\left(\overrightarrow{DC},\overrightarrow{DB}\right)$.

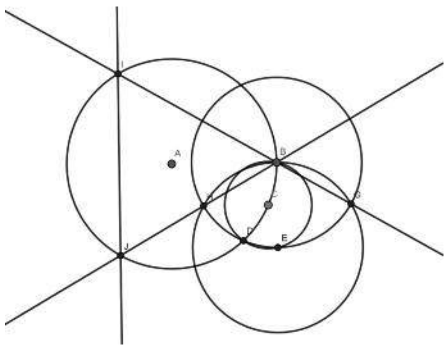
Le « théorème de l'arc capable », appliqué à l'arc (CB) sur le cercle, de centre A, permet conclure la droite (BE) est bien la tangente cherchée.

Construction B

On veut inscrire un triangle équilatéral dans un cercle de centre A tel que B soit l'un des sommets.

On choisit un point C sur le cercle et on commence à tracer les cercles de centres C et B, comme dans l'exercice précédent A.

On trace ensuite le quatrième cercle, de centre E, passant par B, qui coupe le cercle, de centre B, en H et G.



Démonstration :

La figure formée des cercles de centres B et E est classique : Le centre de chacun des deux cercles appartient à l'autre cercle.

On sait qu'alors les angles HBE et GBE sont de 60°, ce qui assure un angle de 60° en B pour le triangle inscrit.

D'autre part, l'exercice A précédent a montré que la droite (BE) est tangente en B au cercle de centre A.

Le rayon (AB) est donc un axe de symétrie du triangle inscrit.

Ce triangle est donc bien équilatéral.

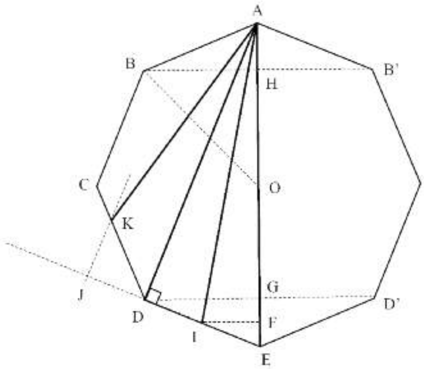
Exercice 524- 4 Marie-Nicole Gras (Le Bourg d'Oisans)

On considère un octogone régulier. Construire 7 demi-droites qui partent d'un même sommet et partagent l'octogone en 8 parties d'aires égales.

Solutions : Alain Bougeard (Les lilas), Pierre Renfer (Saint Georges d'Orques), Maurice Bauval (Versailles), Jean Couzineau (Massy Palaiseau), Michel Lafond (Dijon).

Voici la solution de Michel Lafond.

On suppose l'octogone de centre O et d'aire 8.
Il faut le partager en 8 parties d'aires 1 par des segments issus de A.
Puisque AE partage l'octogone en deux, il suffit de s'occuper de la moitié gauche.
Soit I le milieu de ED. On prolonge ED d'une longueur DJ = ID.
De J on mène la parallèle à DA qui coupe DC en K.



Les segments AE, AI, AD et AK répondent à la question.

En effet l'aire de OAB est égale à 1. Or AE = 2 AO et $IF = \frac{1}{2} DG = \frac{1}{2} BH$.

Donc aire (AEI) = aire (AOB) = 1.
Aire (ADI) = aire (AIE) = 1 (mêmes bases DI = IE et même hauteur AD).
Aire (AKD) = aire (AJD) = aire (ADI) = 1.
Il reste aire (ABCK) = 4 – 3 = 1.