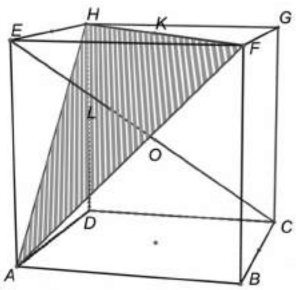
Redécouvrons la géométrie

Mariannick Ruello(*)

À la fin des années soixante-dix, un de nos professeurs à la préparation au CAPES, nous conseilla la lecture du livre « *Redécouvrons la géométrie* » de Coxeter et Greitzer. Nos connaissances en géométrie étaient insuffisantes.
Nous avions étudié la géométrie au collège, mais au lycée, les programmes portaient essentiellement sur la théorie des espaces vectoriels, les transformations vectorielles et affines, les coniques… Cet enseignement était peu visuel, développait davantage les capacités algébriques que géométriques.
À la fin des années 80 et durant les années 90, l'enseignement de la géométrie plane et dans l'espace s'est développé au collège et au lycée.
De nombreux ouvrages très intéressants ont alors été publiés : TP et ouvrages scolaires (éditions Istra) de ***l'Irem de Strasbourg*,** publications du groupe de géométrie de ***l'Irem de Lille*** (début des années 80), de ***l'Irem de Brest***, l'ouvrage de « ***Géométrie dans le plan et l'espace*** » d'Yvonne et Paul Sortais, les ouvrages de la collection Terracher. Cette liste n'est évidemment pas exhaustive.
À cette même époque, ont été développés des logiciels de géométrie dynamique. Dès 1989, le logiciel **CABRI-Géomètre** est disponible sur le marché. Ensuite, dans les années 90, sont diffusés les logiciels **GEOPLAN et GEOSPACE** et **CABRI 3D**. Ce dernier est, encore aujourd'hui, le logiciel 3D le plus performant pour l'enseignement secondaire.
GEOGEBRA n'est apparu qu'au milieu des années 2000, ce n'est qu'une copie de CABRI, mais il est gratuit.
Ces logiciels ont permis de développer une géométrie plus visuelle, plus dynamique et une démarche plus heuristique.
Les raisons justifiant l'enseignement de la géométrie étaient le développement du raisonnement déductif dès le collège. Les exigences en calcul et en algèbre diminuaient, la capacité à mener un raisonnement devait augmenter.
Et aujourd'hui, que reste-t-il ?
Depuis le début des années 2000, de nombreuses notions de géométrie ont été supprimées dans les programmes du collège et du lycée. De plus, au lycée, celle-ci est étudiée essentiellement dans le plan ou l'espace repéré.
Dans la suite de cet article, sont proposés trois problèmes : ils sont résolus volontairement à l'aide de notions élémentaires (Théorème de Thalès, de Pythagore), le repérage est peu utilisé. Ils peuvent, tout ou en partie, être proposés dès la classe de seconde.
Espérons que cet exposé fournira des pistes de réflexion ou d'approfondissement, en particulier aux jeunes professeurs de mathématiques.

(*) Ruello@wanadoo.fr

Premier problème, une configuration très classique

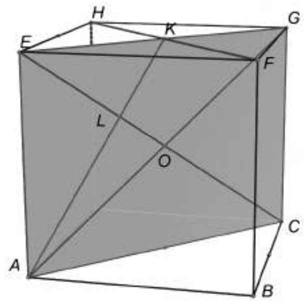


On considère un cube ABCDEFGH, de centre O.
Ce point O est le milieu de [EC].
La diagonale [EC] coupe le plan (HFA) au point L.

Le but du problème est de déterminer dans un premier temps la position du point L sur le plan (HFA) et ensuite de prouver que la diagonale (EC) est perpendiculaire à ce plan.

⇒ Position du point L dans le plan (HFA) et sur la diagonale (EC)

Notons K le milieu de [HF], K est également le milieu de [EG]. Les plans (AHF) et (EGCA) se coupent donc suivant la droite (AK). L, point de (EC) et de (HFA), appartient donc à cette droite (AK).



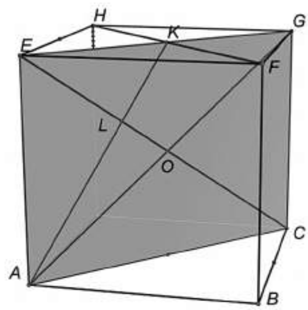
D'après les propriétés du cube, le quadrilatère EGCA est un parallélogramme (un rectangle dans le cas d'un cube).
Considérons le triangle EGA.
L appartient à (AK), médiane de ce triangle issue de A.
L appartient à (EC), mais (EC) coupe (AG) en son milieu O ; donc L appartient à la médiane issue de E.
L est donc le centre de gravité du triangle EGA. On en déduit que $\overrightarrow{AL}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AK}$ et que $\overrightarrow{EL}=\frac{2}{3}\overrightarrow{EO}=\frac{1}{3}\overrightarrow{EC}$.

Remarque : cette démonstration et ce résultat sont valables lorsque ABCDEFGH est un parallélépipède.

À quel moment, la notion de centre de gravité est-elle étudiée ?

⇒ (EC) est perpendiculaire au plan (HFA).
Démontrons que (EC) est orthogonale à deux droites sécantes du plan (HFA).

A) Nous allons démontrer que (EC) est perpendiculaire à (AL) en utilisant tout simplement le théorème de Pythagore.
ABCDEFGH est un cube de côté a.



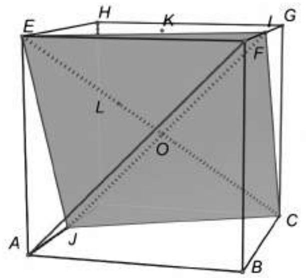
$\mathrm{EA}=a$; $\mathrm{EG}=\sqrt{2}a$; $\mathrm{EC}=\sqrt{3}a$.

$\mathrm{AK}^2=a^2+\frac{1}{2}a^2=\frac{3}{2}a^2$. Donc $\mathrm{AL}^2=\frac{4}{9}\times\frac{3}{2}a^2=\frac{2}{3}a^2$. ,

$\mathrm{LC}^2=\frac{4}{9}\mathrm{EC}^2=\frac{4}{3}a^2$, et $\mathrm{AL}^2+\mathrm{LC}^2=2a^2=\mathrm{AC}^2$.

(AL) = (AK) est perpendiculaire à (EC).

B) Nous allons maintenant démontrer que (EC) est orthogonale à une droite du plan (HFA), par exemple à (AF). Mais (EC) et (AF) ne sont pas coplanaires. Nous allons utiliser une droite parallèle à (AF) et coplanaire à (EC).

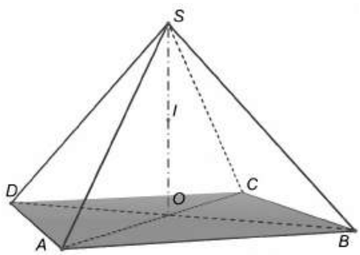


Soient I le milieu de [FG] et J celui de [AD].
(IJ) est parallèle à (AF).
Vu les propriétés du cube, on peut déduire que (EJ) et (IC) sont parallèles. On peut utiliser les vecteurs et prouver que $\overrightarrow{EJ} = \overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AJ} = \overrightarrow{IG} + \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{IC}$.
Les quatre points E, I, C, J sont donc coplanaires.
Les propriétés du cube permettent aussi d'affirmer que EI = IC = CJ = JE (théorème de Pythagore).
Le quadrilatère EICJ est donc un losange et les diagonales (EC) et (IJ) sont donc perpendiculaires ; d'où (EC) est orthogonale à (AF).

De ces deux résultats, on déduit que (EC) est perpendiculaire au plan (HFA).

Deuxième problème

(d'après le sujet du bac S d'Amérique du nord en 2016)



On considère la pyramide de base carrée SABCD. O est le centre du carré ABCD et I est le milieu de [OS].

Le but de cet exercice est de déterminer, dans un premier temps, la section du plan (BCI) avec cette pyramide et ensuite de préciser la position relative des plans (BCI) et (SAD).

La deuxième partie peut être traitée très facilement en dehors d'un repère.

⇒ Considérons tout d'abord cette configuration plane.

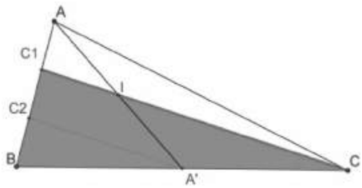


figure 1

Soit ABC un triangle quelconque, A' milieu de [BC], I celui de [AA'].
C_1 est l'intersection des droites (CI) et (AB).
C_2 est l'intersection de la parallèle à (CI) passant par A' et de la droite (AB).
En utilisant le théorème de Thalès, on démontre que :

- C_2 est le milieu de $[BC_1]$ et que $\overrightarrow{A'C_2} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CC_1}$ (fig. 1),

- C_1 est le milieu de $[AC_2]$ et que $\overrightarrow{IC_1} = \frac{1}{2}\overrightarrow{A'C_2}$ (fig. 2).

De tous ces résultats, on déduit que

$\overrightarrow{AC_1} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$ et que $\overrightarrow{IC_1} = \frac{1}{4}\overrightarrow{CC_1}$.

D'où : $\overrightarrow{CC_1} = \frac{4}{3}\overrightarrow{CI}$.

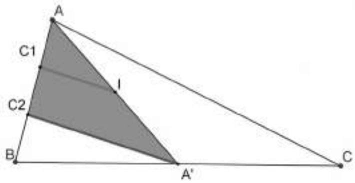
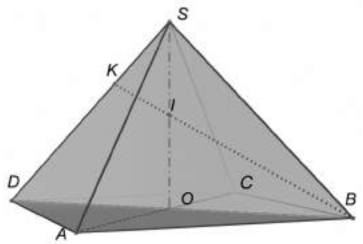


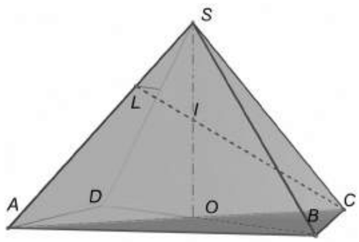
figure 2

⇒ Section du plan (BCI) et de la pyramide.

A) Section du plan (BCI) et de la face (SAD).

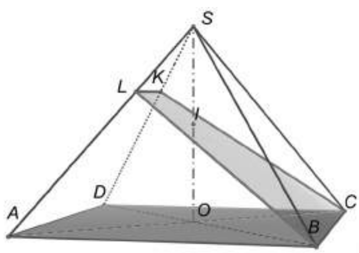


Les droites (BI) et (SD) sont deux droites non parallèles du plan (SDB). Notons K leur point d'intersection.
ABCD est un carré ; donc O est le milieu de [DB] et de [AC] ; de plus I est le milieu de [SO].
Les données de la configuration du 1) sont vérifiées.
Nous pouvons donc en déduire que $\overrightarrow{SK} = \frac{1}{3}\overrightarrow{SD}$.



On raisonne de la même façon pour les droites (CI) et (SA).
Ces deux droites appartiennent au plan (SAC). Notons L leur point d'intersection.
À nouveau, les données de la configuration 1) sont vérifiées, on en déduit que $\overrightarrow{SL} = \frac{1}{3}\overrightarrow{SA}$.

B) Section du plan (BCI) et de pyramide SABCD
L'intersection du plan (BCI) et du plan (SAD) est donc la droite (KL).
De $\overrightarrow{SK} = \frac{1}{3}\overrightarrow{SD}$ et $\overrightarrow{SL} = \frac{1}{3}\overrightarrow{SA}$, on déduit immédiatement que $\overrightarrow{KL} = \frac{1}{3}\overrightarrow{DA} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$.
La section du plan (BCI) et de la pyramide SACD est donc le trapèze BCKL.



Remarque : il suffit que la base de la pyramide soit un parallélogramme pour que les résultats ci-dessus soient vérifiés.

⇒ Position relative du plan (BCI) et du plan (SAD)

Dans cette partie, la pyramide SABCD est régulière de base carrée ABCD dont le centre est le point O, avec OB = 1. Les huit arêtes de cette pyramide mesurent donc $\sqrt{2}$.

La droite (OS) appartient à la fois au plan médiateur de [AD] et à celui de [DC], par conséquent (OS) est perpendiculaire au plan (ABCD).
On en déduit que $OS^2 = SB^2 - OB^2 = 2 - 1 = 1$.

Le repère $\left(O ; \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OS}\right)$ est donc orthonormé.

On note O_1 le milieu du segment [AD] et O_2 celui du segment [BC]. Le plan (SO_1O_2) est le plan médiateur de [AD], donc également de [CB].

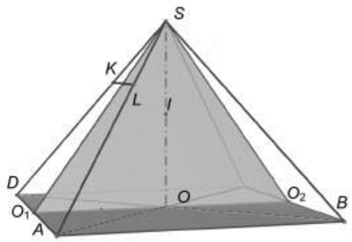
A) Position relative de (SO_1) et (KL)

Le triangle SDA est équilatéral, la droite (SO_1) est donc perpendiculaire à (DA) et aussi à (KL).

B) Position relative de $(S O_1)$ et $(I O_2)$.
On peut utiliser le théorème de Pythagore.
Soit I' le milieu de $[OO_1]$.

$$II' = \frac{1}{2} SO_1 = \frac{\sqrt{6}}{4} \text{ , } I'O_2 = \frac{3}{4} O_1O_2 = \frac{3\sqrt{2}}{4} \text{ ;}$$

$$IO_2^2 = IO^2 + OO_2^2 = \frac{12}{16} .$$



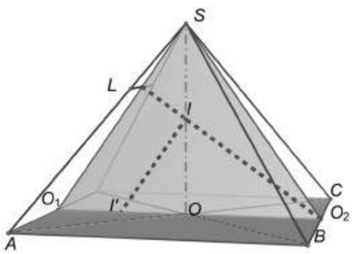
Ainsi, on obtient que $II'^2 + IO_2^2 = I'O_2^2$.

(IO_2) est perpendiculaire à (II') et donc aussi à (SO_1).

***Remarque** : on peut aussi se placer dans le repère $\left(O ; \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OS}\right)$ et calculer le produit scalaire*

$\overrightarrow{IO_2} \cdot \overrightarrow{SO_1}$.

La droite (SO_1) est donc orthogonale à deux droites sécantes du plan (BCI), elle est donc orthogonale à ce plan.



Les plans (BCI) et (SDA) sont donc perpendiculaires.

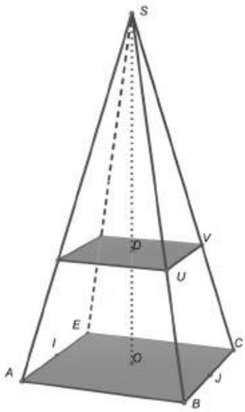
Troisième problème

(d'après le sujet du bac S d'Amérique du nord en 2015)

Dans ce sujet, il est proposé la démonstration de plusieurs résultats admis et une vision plus géométrique. Cette démarche est sans doute plus difficile pour les élèves actuels.

On considère la pyramide de base carrée ABCE de côté $\sqrt{2}$ et dont le centre est O.
La droite (SO) est perpendiculaire à ce plan.
Cette pyramide est symétrique par rapport au plan (SIJ), avec I milieu de [AE] et J celui de [BC]. $\overrightarrow{OS} = 3\,\overrightarrow{OD}$.

Le repère $\left(O\,;\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OD}\right)$ est orthonormé.

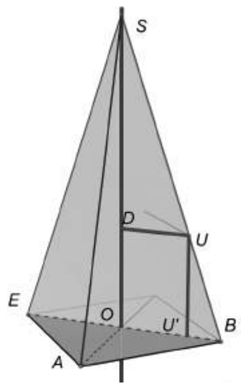


On considère le plan parallèle à la base (ABCE) passant par D. Ce plan coupe (SB) en U et (SC) en V.
On montre aisément que la droite (UV) est parallèle à (BC) et donc à (AE).

De plus, $\overrightarrow{BS} = 3\,\overrightarrow{BU}$ et $\overrightarrow{CS} = 3\,\overrightarrow{CV}$ (propriété de Thalès).
Le but du problème est de déterminer le volume de la pyramide SAUVE dont la base AUVE est un trapèze isocèle.
Dans un premier temps, nous allons déterminer l'aire du trapèze AUVE et ensuite déterminer la hauteur de cette pyramide issue de S.

⇒ Calcul de l'aire du trapèze AUVE.

A) Position ou encore coordonnées du point U dans le repère $\left(O\,;\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OD}\right)$.



Considérons le point U' projeté orthogonal de U sur le plan (ABC). Les points OU'UD sont coplanaires ; ils appartiennent au plan (SOB) = (SEB). Par conséquent U' appartient à la droite (OB).

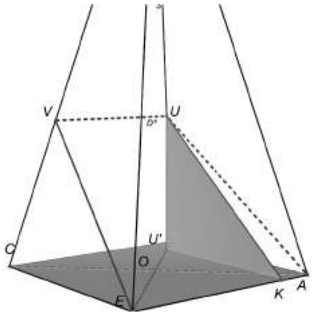
$\overrightarrow{BU} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BS}$ donc $\overrightarrow{BU'} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BO}$ (propriété de Thalès).

d'où $\overrightarrow{OU'} = \frac{2}{3}\overrightarrow{OB}$.

Les coordonnées du point U sont donc $\left(0\,;\frac{2}{3};1\right)$.

Nous allons maintenant considérer le pied de la hauteur du trapèze AUVE issue du point U. Quelle est la position du point K sur [AE] ?

B) Position et coordonnées du point K



La droite (UK) est perpendiculaire à la droite (AE) et (UU') est orthogonale à (AE). Par conséquent, (AE) est perpendiculaire au plan (UU'K).

***K est l'intersection du plan perpendiculaire à (AE) passant par U et de la droite (AE)*.**

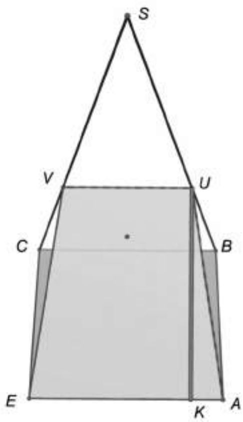
On en déduit que (U'K) est perpendiculaire à la droite (AE).

$\overrightarrow{OU'} = \frac{2}{3}\overrightarrow{OB}$ donc $\overrightarrow{EU'} = \frac{5}{3}\overrightarrow{EO} = \frac{5}{6}\overrightarrow{EB}$.

On en déduit que $\overrightarrow{EK} = \frac{5}{6}\overrightarrow{EA}$ (les triangles EU'K et EBA sont homothétiques, on utilise encore la propriété de Thalès).

Les coordonnées du K sont donc $\left(\frac{5}{6}; -\frac{1}{6}; 0\right)$.

C) Calcul de l'aire du trapèze AUVE



$\overrightarrow{UV} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BC} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AE}$,

$\overrightarrow{UV} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BC} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AE}$,

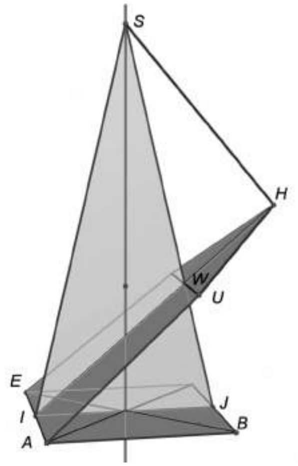
$UK = \frac{\sqrt{86}}{6}$,

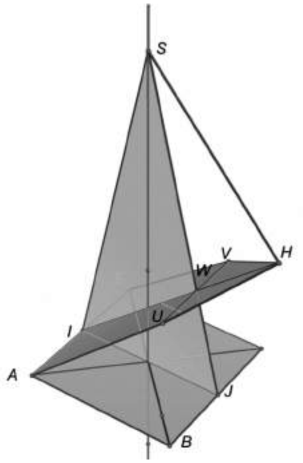
$\frac{1}{2}(UV + AE) \times UK = \frac{5}{18}\sqrt{43}$.

L'aire du trapèze AUVE est donc égale à $\frac{5}{18}\sqrt{43}$**.**

⇒ Calcul de la hauteur issue du point S de la pyramide SAUVE

Soit H le pied de la hauteur issue du point S.





A) Position du point H

On note I, J et W les milieux respectifs des segments [AE], [BC] et [UV].

$HU^2 = SU^2 - SH^2 = SV^2 - SH^2 = HV^2$

Le point H appartient donc au plan médiateur du segment [UV].

Ce plan médiateur est le plan (SIJ), le point W appartient également à ce plan.

L'intersection des plans (SIJ) et (AUVE) est la droite (IW). On en déduit que H appartient à cette droite (IW).

Nous allons préciser la position du point H sur cette droite en utilisant le produit scalaire $\overrightarrow{WI} \bullet \overrightarrow{WS}$.

$\overrightarrow{WI} \bullet \overrightarrow{WS} = \frac{1}{2}\left[WI^2 + WS^2 - IS^2\right]$, $WI^2 = UK^2 = \frac{43}{18}$

car AUVE est isocèle. $SI^2 = SO^2 + OI^2 = \frac{19}{2} = \frac{171}{18}$,

$\overrightarrow{SW'} = \frac{2}{3}\overrightarrow{SJ}$ donc $SW = \frac{2}{3}SJ = \frac{2}{3}SI$ et $SW^2 = \frac{76}{18}$.

On en déduit que $\overrightarrow{WI} \bullet \overrightarrow{WS} = -\frac{13}{9}$.

Mais $\overrightarrow{WI} \bullet \overrightarrow{WS} = \overrightarrow{WI} \bullet \overrightarrow{WH}$. Ce produit scalaire est négatif, de plus les vecteurs $\overrightarrow{WI}$ et $\overrightarrow{WH}$ sont colinéaires, ces deux vecteurs sont donc de sens contraire.

Le point W appartient donc au segment [IH].

B) Calcul de la longueur SH

$\overrightarrow{WI} \bullet \overrightarrow{WS} = \overrightarrow{WI} \bullet \overrightarrow{WH} = -WI \times WH$. On en déduit que $WH = \frac{13}{9 \times WI} = \frac{13}{3} \times \sqrt{\frac{2}{43}}$.

Le triangle SHW est rectangle en H.

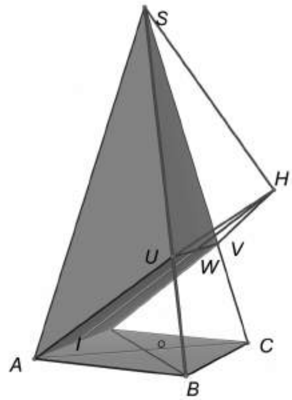
Donc $SH^2 = SW^2 - WH^2 = \frac{144}{43}$, d'où $SH = \frac{12}{\sqrt{43}}$.

Volume de la pyramide SAUVE : $\frac{1}{3} \times \frac{5}{18}\sqrt{43} \times \frac{12}{\sqrt{43}} = \frac{10}{9}$.

Cette pyramide ne partage donc pas la pyramide SABCE en deux solides de même volume.

Prolongement

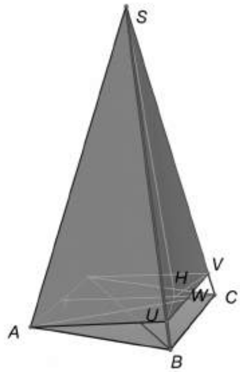
Les points U et V sont respectivement les intersections des arêtes (SB) et (SC) avec le plan parallèle à la base ABCE passant par le point D'(0, 0, k) où k est un réel compris entre 0 et 3.



Existe-t-il une pyramide SAUVE qui partage la pyramide SABCE en deux solides de même volume ?

Le volume de SAUVE décroît de façon « continue » de 2 à 0. On peut donc conjecturer qu'une telle valeur k existe (théorème des valeurs intermédiaires).
En adoptant la même démarche que dans l'étude précédente, on obtient les résultats suivants.

Les coordonnées du point U sont $\left(0\,;\frac{1}{3}(3\text{ - k})\,;\text{k}\right)$.



Les coordonnées de K sont $\left(\frac{1}{6}(6\text{ - k})\ ;\text{-}\frac{\text{k}}{6};0\right)$.

Donc $\text{UK}^2=\frac{1}{18}\left[18\text{k}^2+(6\text{ - k})^2\right]$.

L'aire du trapèze AUVE est $\frac{1}{18}(6-k)\sqrt{18k^2+(6-k)^2}$.

$\overrightarrow{\text{WI}}\bullet\overrightarrow{\text{WS}}=\overrightarrow{\text{WI}}\bullet\overrightarrow{\text{WH}}=\frac{1}{18}(k-3)(19k-6)$.

Remarques
Si 6/19 < k < 3 , W appartient au segment [IH].
Si 0 < k < 6/19, H appartient au segment [IW].
Pour k = 6/19, H = W.

Le volume de la pyramide SAUVE est égale à $\text{V}=\frac{1}{9}(3-k)(6\text{ - }k)$,

et V = 1 pour $k=\frac{3}{2}\left(3-\sqrt{5}\right)\approx 1.146$.

Espérons que ces quelques exemples très modestes montrent que, dans le cadre des programmes actuels, on peut résoudre des problèmes géométriques avec des outils simples. Mais cette approche nécessite une éducation au regard géométrique, donc un minimum de pratique et de connaissances.
Or, on peut être inquiet du devenir de l'enseignement de la géométrie. En effet de nouveaux programmes vont être élaborés pour le lycée. Voici un extrait de l'éditorial de Bernard Egger dans le BGV n°189.

Les contenus enseignés en mathématiques ont beaucoup évolué ces dernières années. Probabilités et algorithmique prennent une place de plus en plus importante. La grande perdante de cette restructuration est la géométrie, cette « pauvre géométrie » dont la place s'étiole tout au long du cursus d'enseignement : encore bien présente au collège, elle s'algébrise fortement au lycée pour quasiment disparaître dans l'enseignement supérieur, remplacée par l'algèbre linéaire. Difficile dans ces conditions de trouver une légitimité !
Ces modifications importantes nous interrogent sur la cohérence actuelle de nos programmes. Il existe des mathématiques sans doute plus adaptées à l'algorithmique (et d'une certaine façon également aux probabilités) que celles que nous enseignons. Doit-on franchir le pas et introduire dans nos programmes d'autres objets d'étude, avec le risque évident d'en écarter certains qui sont actuellement enseignés ? Enfin, on ne peut pas mettre de côté la question du nombre d'heures qui doivent être consacrées aux mathématiques dans les emplois du temps des diverses classes.

D'éminents mathématiciens ont défendu la réintroduction de l'enseignement de la géométrie, en particulier la géométrie dans l'espace, dans les années 80. Leurs arguments sont toujours d'actualité.
Cet enseignement permet la manipulation, la mémoire manuelle par l'utilisation de la règle, du compas, par la fabrication de pliages, de patrons (voir « *Pliages et Mathématiques* » Boursin, Larose aux éditions du Kangourou).
Les liens entre cet enseignement et d'autres disciplines (par exemple la physique) sont très forts.
Voici l'extrait d'un interview de Karim Zayana et de Robert Cabane dans *Tangente éducation n° 36 juin 2016*.

La géométrie dans l'espace fournit aussi un argument pour prendre conscience des limites des seuls outils numériques, l'usage de l'ordinateur a tendance à ajouter une deuxième couche d'abstraction, qui peut être un moyen d'aller plus loin, mais représente aussi pour certains un obstacle infranchissable. Ainsi, la compréhension d'une animation géométrique en 3D nécessite l'utilisation de codes visuels et culturels. Si on ne les possède pas, l'ordinateur ne sera d'aucune utilité.

L'algèbre linéaire, enseignée dans l'enseignement supérieur, est éclairée par des références géométriques. Par exemple, on peut faire le lien entre la résolution des systèmes d'équations à trois inconnues et l'intersection de plans dans l'espace.

Dans « *Faire des mathématiques : le plaisir du sens* » de R. Bkouche, B. Charlot, N. Rouche, on peut lire une réflexion approfondie sur les programmes de mathématiques.
Effectivement, on ne peut pas ignorer la numérisation de la société dans laquelle nous vivons ; mais adapter l'enseignement des mathématiques à l'algorithmique est tellement réducteur ! Les programmes actuels offrent déjà des champs de problèmes dans lesquels l'algorithmique s'intègre parfaitement (suites, fonctions, calculs d'aire, simulation, etc.).
Connaissez-vous « Le mouvement du FAIRE SOI-MÊME » ? (bricoler, coudre, etc.) Les cours de couture connaissent un véritable engouement. Dans ces cours, on rencontre de jeunes ingénieures, enseignantes. Des connaissances en géométrie permettent d'être plus performants (lire un patron, imaginer ce que devient un morceau de tissu en 3D). Ces jeunes ingénieures éprouvent le besoin de travailler autrement que sur un clavier d'ordinateur !
Certes, il ne s'agit que d'une anecdote, certes la société se numérise mais elle a aussi besoin d'autre chose.
Espérons que les futurs concepteurs de programme sauront entendre ces quelques arguments.
L'enseignement de la géométrie demande un minimum de pratique, sans cela, il deviendra impossible de l'enseigner.