Mathématiques et magie à la Maison des Mathématiques et de l'Informatique de Lyon

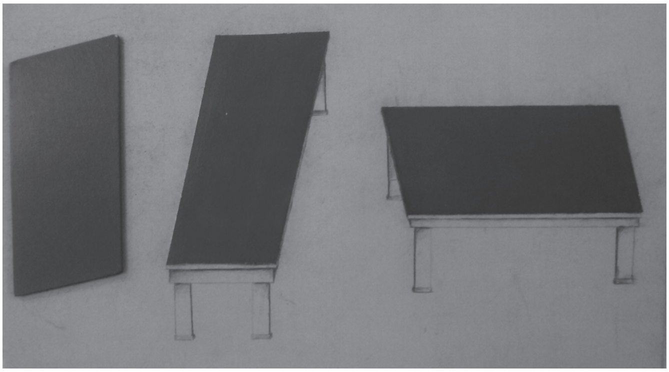
Catherine Combelles(*)

Lors des Journées de Lyon, Jean-Baptiste Aubin, qui enseigne les mathématiques à l'INSA, nous a régalés d'une conférence intitulée « Magimathique », durant laquelle il a présenté puis décrypté plusieurs tours de magie où les mathématiques jouent un rôle essentiel. Elle a été enregistrée dans sa totalité et vous pouvez la visionner à partir de la page Web de ce bulletin. Un vrai bonheur !
Ce sont ses activités au sein de la Maison des Mathématiques et de l'Informatique de Lyon, la MMI, qui ont conduit Jean-Baptiste Aubin à s'intéresser aux tours de magie mathématiques : il est en effet le commissaire et directeur scientifique de l'exposition MAGIMATIQUE, ouverte tout au long de cette année scolaire au grand public les mercredis et samedi, et accompagnée d'un spectacle.

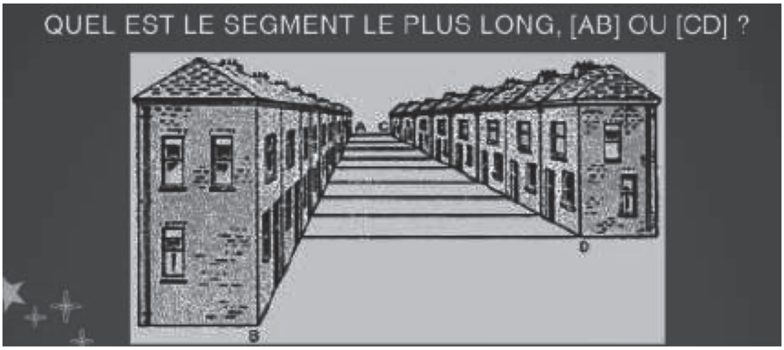
J'ai voulu en savoir un peu plus, et j'ai eu droit à une visite guidée de cette exposition sous la conduite de Gilles Aldon que je remercie. La Maison des Mathématiques et de l'Informatique accueille chaque jour des classes de niveaux variés pour des activités mathématiques ou informatiques, animées par des universitaires et des étudiants : le planning est impressionnant !
Aujourd'hui, 8 décembre, ce sont des classes d'une école primaire qui ont manipulé des robots de type « tortue de Papert » dans la matinée, puis, dans l'après-midi, un groupe d'élèves de seconde d'une option MPS a travaillé sur des algorithmes sans programmation. Pendant que les élèves s'activaient autour de balances Roberval, de tours d'Hanoï, et de plaques à classer, j'ai pu examiner de près les diverses étapes de l'exposition.

Le circuit commence par toute une série d'illusions d'optique : certaines sont très classiques : un même disque, s'il est entouré de disques plus gros, paraît minuscule, alors qu'il semble plus imposant lorsqu'il est entouré de tout petits disques ; et la longueur d'un même segment semble varier selon qu'il est terminé par des flèches concaves ou convexes.
Les tours que nous joue notre habitude de la perspective sont très étonnants : un brave parallélogramme tout simple, s'il est présenté comme un plateau de table avec 4 pieds, devient très surprenant : d'abord, il vous semble que ses côtés divergent et que le dessinateur s'est trompé ! Ces côtés ne paraissent vraiment pas parallèles ! Et selon qu'il est disposé en long ou en large, ses dimensions vous semblent nettement différentes. C'est pourtant bien un parallélogramme, et c'est bien deux fois le même : un témoin magnétique permet de l'attester.

(*) combelles.catherine@gmail.com



Le dessin le plus amusant est cette rue dont les deux bords semblent de longueurs très différentes, simplement parce qu'ils figurent des longueurs différentes : en réalité ce sont bien des segments de même longueur. Mais notre interprétation du dessin l'emporte sur la simple observation.



On retrouve cette même explication sur une autre illusion qui concerne les couleurs : des bandes grises et blanches alternées sont en partie très éclairées et en partie à l'ombre. La partie grise éclairée, parce que nous la savons sombre, semble beaucoup plus foncée que la partie blanche à l'ombre…c'est pourtant exactement le même gris, un petit carré gris, là encore, permet d'en témoigner.

Autre surprise colorée : une jolie spirale multicolore présente des plages vertes striées d'orange et d'autres striées de violet : c'est bien le même vert, mais c'est bien difficile à croire : le premier paraît plus jaune, et l'autre plus bleu.

Autres illusions d'optique, mais sous forme d'authentiques œuvres d'art : des sculptures donnent l'illusion d'« objets impossibles ». Illusion parfaite, crée par les ombres : ce qui paraît en relief est en réalité en creux, mais il faut s'approcher et avoir le nez dessus pour s'en apercevoir. L'objet est vraiment magnifique !

Les illusions sonores sont tout aussi étonnantes : un son qui paraît monter (ou qui paraît descendre) sans cesse de façon continue s'obtient en superposant des octaves successives dont on fait varier les intensités[(1)]. Quand on le sait, on parvient à percevoir les « décrochements » de l'octave supérieure avec beaucoup d'attention, mais l'effet est encore plus étonnant lorsque cette montée est discrète et non plus continue. Même en connaissant la méthode utilisée, on est alors totalement trompé !

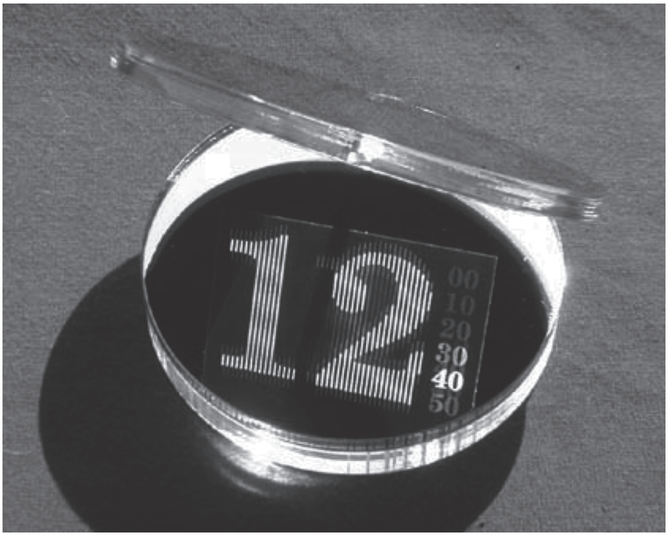
Plus loin, trois entonnoirs identiques de plastique vert sont posés sur une table : Gilles Aldon joue au magicien.
Sur leur face inférieure, cachée, trois portraits de mathématiciens, disons 1,2, 3 pour simplifier : je dois en choisir un sans le révéler, bien sûr. Je suis priée ensuite, toujours à l'insu du magicien, d'inverser la position des deux entonnoirs que je n'ai pas choisis. A sa vue, je peux ensuite déplacer à ma guise les trois entonnoirs.
Gilles en soulève un et en déduit immédiatement le nom du portrait que j'ai choisi !

(1) On trouvera un fichier son de cette illusion appelée gamme de Shepard par exemple à l'adresse : https://www.youtube.com/watch?v=6m6_56IM1U8

Explication : il s’agit de retrouver l’entonnoir qui n’a pas été déplacé. Gilles n’a pas quitté des yeux celui qui était au milieu pendant que je « mélangeais » les entonnoirs ; c’est facile : je ne suis pas un magicien professionnel ! Et c’est celui-là qu’il retourne et examine : si c’est 2, c’est qu’il n’a pas été inversé et c’est donc celui que j’ai choisi. Si c’est 1, alors 1 et 2 ont été inversés et la bonne réponse est 3, et si c’est 3, la bonne réponse est 1, pour la même raison. Elémentaire, mais très efficace !

Un autre tour beaucoup plus complexe et qui ne réussit pas à coup sûr : on dispose des 24 cartes de 1 à 6 d’un jeu de 52 cartes ; on mélange le jeu et on place toutes les cartes en rond, face visible, pour former une sorte de circuit circulaire où les cases sont les cartes du jeu. On place un point de départ, et à partir d’une des 6 premières cartes, choisie au hasard, on avance d’un nombre de cases égal au nombre marqué sur cette carte. On poursuit de même en sautant de carte en carte, en respectant toujours le nombre de cases indiqué sur la carte où l’on a atterri : ceci jusqu’à repasser sur la case de départ : on ne s’arrête bien sûr pas exactement sur cette case ! Mais où atterrit-on ? Avec une probabilité supérieure à 0,93, m’annonce Gilles, on aboutit toujours sur la même case pour un circuit donné, quelle que soit la carte de départ ! Le « magicien » n’a qu’à faire le calcul de tête en début de séance tout en plaçant les cartes en rond, et il connaît d’avance la réponse.
La démonstration ? Elle n’a pas été faite, et si vous la trouvez, nous sommes preneurs ! Cette probabilité est basée sur une statistique, m’explique Gilles. A vous de vérifier ses dires, mais il a bien deviné la case d’arrivée.

Très subtil aussi : un cadran solaire numérique ! Etienne Ghys a consacré un article à cet objet sur le site « Image des Mathématiques » en juillet 2016. Il écrit : «Supposons qu’on observe un objet X dans l’espace en en faisant le tour et en prenant par exemple des photographies dans toutes les directions.(…) Réciproquement, supposons maintenant qu’on dispose d’une infinité de photos, une pour chaque direction. Existe-il un objet X dans l’espace dont les photos sont celles dont on dispose ? ». Le mathématicien écossais Kenneth Falconer a démontré en 1986 que oui, un tel objet existe. Et Falconer avait songé à cette application inattendue puisqu’il écrivit dans son article, nous apprend Etienne Ghys : « Il est possible, au moins en théorie, de construire un ensemble dans l’espace dont l’ombre à presque tout moment de la journée donne l’heure écrite en chiffres »
Cet objet a depuis été fabriqué, il est en vente sur internet !
Selon la direction des rayons du soleil, c’est telle ou telle heure qui apparaît sur son cadran, de façon purement géométrique et sans la moindre pile ! Magique !



http://www.digitalsundial.com/images/sd4.jpg

Un peu plus loin tout au fond de la salle, un portrait un peu flou de Marilyn Monroe. Je m'approche : le joli minois de l'actrice s'est transformé en un portrait d'Einstein ! Il s'agit d'une image hybride fabriquée par la superposition de deux images : Einstein, finement dessiné apparaît nettement de près et disparaît de loin pour laisser place au visage de Marilyn. Cette technique a été développée par deux chercheurs anglais et américains en 1994, et cette image est la plus célèbre de ce type.

Une série de panneaux complète l'exposition : Aimé Lachal et Pierre Schott, de l'INSA, analysent les coupes et mélanges de cartes qui créent un désordre très organisé permettant au magicien de maîtriser l'ordre des cartes qu'il manipule. C'est le cas du mélange Faro, qui consiste à couper un jeu de 2n cartes en deux jeux de n cartes et à les assembler en alternant rigoureusement dans l'ordre une carte de chaque jeu. Il y faut bien sûr une grande dextérité, et n'est pas magicien qui veut ; mais les mathématiques ne sont pas loin : un théorème affirme que pour un jeu de 2^p cartes une succession de p mélanges Faro permet de revenir à l'ordre initial. Ainsi, pour un jeu de 32 cartes, 5 mélanges successifs ramènent le jeu à son état initial. Ici encore, le précieux site Image des Mathématiques permet d'approfondir la question, avec l'article « Mélanges de cartes et mathématiques », de Bruno Belhoste.

Beaucoup plus simple : un joli tour qui utilise la preuve par neuf ! Sur un tableau carré 3 x 3 où sont rangés dans l'ordre les chiffres de 1 à 9, le magicien demande à un spectateur de choisir une ligne et une colonne et de former deux nombres de 3 chiffres à partir des chiffres de chacune, dans l'ordre qu'il voudra. Il doit ensuite effectuer leur multiplication et indiquer au magicien les chiffres autres que zéro du produit obtenu : tous sauf un…que le magicien va déterminer. C'est facile, car chacun de ces nombres est forcément multiple de 3, et leur produit est donc un multiple de 9. La somme de ses chiffres doit donc être congrue à zéro modulo 9, ce qui permet de déterminer à coup sûr le chiffre manquant : à coup sûr, car on a écarté zéro, égal à 9 modulo 9 !

Le dernier tour dévoilé est la multiplication de 142 857 par un nombre N de taille donnée, taille qui dépendra de la dextérité du calculateur. C'est un des tours que Jean-Baptiste Aubin a expliqué dans sa conférence, et je le résume ici. Pourquoi ce nombre ? Parce que c'est la période du développement décimal de 1/7 !

$$\frac{1}{7} = 0{,}14285171428517\cdots$$

Et donc :

$$142\,857 \times 7 = 999\,999 = 1\,000\,000 - 1.$$

Multiplier par $7q$ le nombre 142 857 n'est donc pas bien difficile, cela donne :

$$q \times 10^6 - q$$

Pour multiplier N par 142857, on va donc commencer par diviser N par 7, ce qui se fait facilement de tête par exemple pour les nombres de 2 chiffres.
À partir de $N = 7q + r$, il vient : $142\,857 \times N = q \times 10^6 - q + 142\,857 \times r$.

Et la multiplication par r est très simple, car 142 857 a une autre propriété magique : c'est un nombre cyclique, au sens où ses multiples successifs, de 1 à 6 s'écrivent par une simple permutation circulaire de ses chiffres. Il suffit de connaître le premier chiffre, et comme ces 6 multiples sont en ordre croissant, le premier chiffre de $n \times 142\,857$ est son n-ième chiffre en ordre croissant :

$$1 \times 142\,857 = 142\,857$$
$$2 \times 142\,857 = 285\,714$$
$$3 \times 142\,857 = 428\,571$$
$$4 \times 142\,857 = 571\,428$$
$$5 \times 142\,857 = 714\,285$$
$$6 \times 142\,857 = 857\,142$$

Multiplions par exemple 142 857 par 23.

$$23 = 3 \times 7 + 2.$$

Le résultat est donc : 3 000 000 – 3 + 285 714 = 3 285 711.
Il faut certes un peu d'agilité calculatoire, mais nul besoin d'être un calculateur prodige !

Je me suis bien amusée et les élèves lyonnais ont là une belle occasion d'alimenter leur curiosité et leur plaisir de jouer. On ne peut qu'applaudir les organisateurs de cette exposition et plus généralement tous ceux qui déploient des trésors d'intelligence et de généreuse inventivité pour animer cette belle structure qu'est la Maison des Mathématiques et de l'Informatique de Lyon.