Les problèmes de l'APMEP

Solutions des problèmes antérieurs

Problème 510-1 (Michel Bataille, Rouen)

Soit ABC un triangle rectangle en A, non isocèle. Trouver la valeur minimale de PA lorsque P est un point intérieur au triangle tel que

$$\frac{\mathrm{PA}}{\sin\alpha}=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\mathrm{PB}}{\sin\beta}\cdot\frac{\mathrm{PC}}{\sin\gamma}}$$

où

$$\alpha=\widehat{\mathrm{BPC}},\quad \beta=\widehat{\mathrm{CPA}},\quad \gamma=\widehat{\mathrm{APB}}.$$

Solutions de Michel Bataille (Rouen), Richard Beczkowski (Chalon sur Saône), Jean-Claude Carréga (Lyon), Raymond Heitz (Névez), Pierre Renfer (Saint Georges d'Orques)

On commence par chercher le lieu des points P vérifiant la condition

$$\frac{\mathrm{PA}}{\sin\alpha}=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\mathrm{PB}}{\sin\beta}\cdot\frac{\mathrm{PC}}{\sin\gamma}}.$$

En multipliant par $\mathrm{PB}\cdot\mathrm{PC}$, elle s'écrit encore

$$4\mathrm{PA}^2\cdot\mathrm{PB}\cdot\mathrm{PC}\cdot\sin(\beta)\cdot\sin(\gamma)=\mathrm{PB}^2\cdot\mathrm{PC}^2\cdot\sin(\alpha). \tag{1}$$

On introduit les quantités

$$u=\mathrm{PB}\cdot\mathrm{PC}\cdot\sin(\alpha)=2\mathcal{A}(\mathrm{PBC}),$$

où le symbole $\mathcal{A}$ désigne l'aire du triangle considéré,

$$v=\mathrm{PC}\cdot\mathrm{PA}\cdot\sin(\beta)=2\mathcal{A}(\mathrm{PCA}),$$

et

$$w=\mathrm{PA}\cdot\mathrm{PB}\cdot\sin(\gamma)=2\mathcal{A}(\mathrm{PAB}).$$

Le point P a pour coordonnés barycentriques le triplet (u, v, w) dans le repère affine (A, B, C). La condition (1) s'écrit

$$4vw = u^2.$$

C'est l'équation de l'intersection d'une conique Γ et de l'intérieur du triangle ABC. Pour trouver la nature de Γ, on cherche ses points sur la droite à l'infini, d'équation

$$u + v + w = 0:$$

On obtient

$$4vw = (v + w)^2,$$

c'est-à-dire

$$(v - w)^2 = 0.$$

La conique Γ n'a qu'un point à l'infini. Il s'agit donc d'une parabole. La parabole Γ est tangente en B à la droite (AB) et tangente en C à la droite (AC).

On cherche maintenant le minimum souhaité. Le problème revient à trouver le point de Γ le plus proche de A. Soit a, b, c les longueurs des côtés BC, AC et BA. On peut choisir l'unité de longueur telle que

$$bc = 2\mathcal{A}(\mathrm{ABC}) = 1.$$

Les coordonnées barycentriques (u, v, w) de P, définies plus haut, ont alors pour somme 1. Donc

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}} = v\overrightarrow{\mathrm{AB}} + w\overrightarrow{\mathrm{AC}}$$

et

$$\mathrm{AP}^2 = c^2v^2 + b^2w^2.$$

La condition (1) s'écrit

$$(v - w)^2 - 2(v + w) + 1 = 0.$$

On fait le changement de variables

$$\begin{cases} \mathrm{S} = v + w \\ \mathrm{D} = v - w \end{cases}.$$

Donc

$$\begin{cases} 2v = \mathrm{S} + \mathrm{D} \\ 2w = \mathrm{S} - \mathrm{D} \end{cases}.$$

La condition (1) s'écrit

$$2\mathrm{S} = \mathrm{D}^2 + 1:$$

On exprime $16\mathrm{AP}^2$ à l'aide de la seule variable D :

$$16\mathrm{AP}^2 = c^2(2\mathrm{S} + 2\mathrm{D})^2 + b^2(2\mathrm{S} - 2\mathrm{D})^2 = c^2(\mathrm{D} + 1)^4 + b^2(\mathrm{D} - 1)^4 = f(\mathrm{D}).$$

La dérivée de f est donnée par

$$f'(\mathrm{D}) = 4c^2(\mathrm{D} + 1)^3 + 4b^2(\mathrm{D} - 1)^3.$$

Cette dérivée est nulle si

$$c^{2/3}(\mathrm{D} + 1) = b^{2/3}(1 - \mathrm{D}).$$

autrement dit

$$\mathrm{D} = \frac{b^{2/3} - c^{2/3}}{b^{2/3} + c^{2/3}}.$$

On a alors

$$\begin{cases} 1+\mathrm{D} = \dfrac{2b^{2/3}}{b^{2/3}+c^{2/3}} \\ 1-\mathrm{D} = \dfrac{2c^{2/3}}{b^{2/3}+c^{2/3}} \end{cases}.$$

et, sachant que $bc = 1$, on trouve

$$\mathrm{AP}^2 = \frac{b^{2/3}+c^{2/3}}{\left(b^{3/2}+c^{3/2}\right)^4} = \frac{1}{\left(b^{2/3}+c^{2/3}\right)^3}.$$

La valeur minimale cherchée est donc

$$\mathrm{AP} = \frac{1}{\left(b^{2/3}+c^{2/3}\right)^{3/2}}.$$

Problème 510-3 (Michel Lafond, Dijon)

Un couple d’entiers (p, q) avec $2 \le p \le$ q est dit générateur si tout entier naturel peut s’écrire sous la forme $\lfloor a\sqrt{p} \rfloor + \lfloor b\sqrt{q} \rfloor$ avec a, $b \in \mathbb{N}$ et où $\lfloor\ \rfloor$ désigne la partie entière.
Démontrer que les couples (2, 9) et (3, 3) sont générateurs puis trouver tous les couples générateurs.

Solution de Michel Lafond (Dijon) et Raymond Heitz (Névez).

Il y a treize couples générateurs :

$$(2, q) \text{ avec } 2 \le q \le 11 \text{ et } (3, q) \text{ avec } 3 \le q \le 5.$$

• Il est clair que les couples (p, q) avec $p > 3$ ne sont pas générateurs. En effet, pour $q \ge p \ge 4$, aucune des suites $\left(\lfloor n\sqrt{p} \rfloor\right)_{n\in\mathbb{N}}$ et $\left(\lfloor n\sqrt{q} \rfloor\right)_{n\in\mathbb{N}}$ ne prend la valeur 1. On restreint donc l’étude aux couples $(2, q)$ avec $q \ge 2$ et $(3, q)$ avec $q \ge 3$.

• Démontrons que les couples $(2, q)$ avec $q \ge 13$ ne sont pas générateurs. Les premiers termes de la suite $\left(\lfloor n\sqrt{2} \rfloor\right)_{n\in\mathbb{N}}$ sont

$$0, 1, 2, 4, 5, 7, 8, 9, 11,$$

Les entiers 3 et 6 sont absents. Si $q \ge 13$, on a alors $\lfloor \sqrt{q} \rfloor \ge 3$ et $\lfloor \sqrt{2q} \rfloor \ge 7$. L’un des deux nombres 3 ou 6 sera toujours absent.

• Démontrons que les couples $(3, q)$ avec $q \ge 7$ ne sont pas générateurs. Les premiers termes de la suite $\left(\lfloor n\sqrt{3} \rfloor\right)_{n\in\mathbb{N}}$ sont

$$0, 1, 3, 5, 6, 8, 10, 12,$$

Les entiers 2 et 4 sont absents. Si $q \geq 7$, on a alors $\left\lfloor \sqrt{q} \right\rfloor \geq 2$ et $\left\lfloor \sqrt{2q} \right\rfloor \geq 5$. L'un des deux nombres 2 ou 4 sera toujours absent.

• Il reste 13 couples possibles :

$$(2, q) \text{ avec } 2 \leq q \leq 12 \text{ et } (3, q) \text{ avec } 3 \leq q \leq 6:$$

Le tableau ci-dessous montre que 23 n'est pas engendré par le couple (2, 12) :

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
$\left\lfloor n\sqrt{2} \right\rfloor$	0	1	2	4	5	7	8	11	12	14	15	16	18	19	21	22	24	
$\left\lfloor n\sqrt{3} \right\rfloor$	0	3	6	13	17	20	24	27	31									

Et 11 n'est pas engendré par (3, 6) :

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$\left\lfloor n\sqrt{2} \right\rfloor$	0	1	3	5	6	8	10	12	13	15	17	19	20
$\left\lfloor n\sqrt{3} \right\rfloor$	0	2	4	7	19	12	14	17	19	22	24	26	29

• Démontrons que les couples(2, q) avec $2 \leq q \leq 8$ sont générateurs. Pour $n \in \mathbb{N}$, posons

$$u_n = \left\lfloor n\sqrt{q} \right\rfloor.$$

Alors

$$0 < u_{n+1} - u_n < (n+1)\sqrt{q} - \left(n\sqrt{q} - 1\right) \leq \sqrt{q} + 1 \leq \sqrt{8} + 1 < 4.$$

Ainsi, $u_{n+1} - u_n$ peut valoir 1, 2 ou 3. Considérons un entier $n \in \mathbb{N}^*$. Si N est dans la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, il est engendré par (2, q). Sinon, il existe un entier $n \in \mathbb{N}$ tel que

$$u_n < \mathrm{N} < u_{n+1}.$$

Donc

$$1 \leq \mathrm{N} - u_n < 3.$$

Il y a donc deux cas :

$$\mathrm{N} = u_n + 1 = \left\lfloor n\sqrt{q} \right\rfloor + \left\lfloor 1\sqrt{2} \right\rfloor,$$

ou bien

$$\mathrm{N} = u_n + 2 = \left\lfloor n\sqrt{q} \right\rfloor + \left\lfloor 2\sqrt{2} \right\rfloor.$$

Dans tous les cas, N est engendré par (2, q).

• Il est clair que le couple (2, 9) est générateur, puisque tout entier peut s'écrire d'une des facons suivantes :

$$3n = \lfloor 0\sqrt{2} \rfloor + \lfloor \sqrt{9}n \rfloor,$$

$$3n+1 = \lfloor 1\sqrt{2} \rfloor + \lfloor \sqrt{9}n \rfloor,$$

ou

$$3n+2 = \lfloor 2\sqrt{2} \rfloor + \lfloor \sqrt{9}n \rfloor.$$

• Montrons que le couple (2, 10) est générateur. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Posons

$$A = \left\lfloor \frac{N}{\sqrt{10}} \right\rfloor$$

si bien que

$$A\sqrt{10} < N < (A+1)\sqrt{10}, \tag{2}$$

les inégalités étant larges puisque $\sqrt{10}$ est irrationnel. Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ tel que $4n \leq A$, posons

$$f(n) = \lfloor (A-4n)\sqrt{10} \rfloor + \lfloor 9n\sqrt{2} \rfloor.$$

D'après (2),

$$f(0) = \lfloor A\sqrt{10} \rfloor < N. \tag{3}$$

Lorsque l'on passe de n à $n + 1$, la quantité $(A-4n)\sqrt{10}$ diminue de

$$4\sqrt{10} \approx 12{,}6\cdots$$

tandis que $9n\sqrt{2}$ augmente de

$$9\sqrt{2} \approx 12{,}7\cdots$$

donc $\lfloor (A-4n)\sqrt{10} \rfloor$ diminue de 12 ou 13 et $\lfloor 9n\sqrt{2} \rfloor$ augmente de 12 ou 13. Ainsi,

$$f(n+1) - f(n) \text{ varie d'au plus } 1. \tag{4}$$

Par ailleurs,

$$f(44) = \lfloor (A-176)\sqrt{10} - 176\sqrt{10} \rfloor + \lfloor 396\sqrt{2} \rfloor > A\sqrt{10} + 560 - 176\sqrt{10}.$$

D'après (2), $A\sqrt{10} \geq N - \sqrt{10}$ donc

$$f(44) > N + 560 - 177\sqrt{10} > N.$$

Ainsi,

$$f(44) > N. \tag{5}$$

Les résultats (3), (4) et (5) montrent qu'il existe un entier n entre 0 et 44 tel que $f(n) = N$. On a donc trouvé $a = A - 4n$ et $b = 9n$ tels que

$$N = \lfloor a\sqrt{10} \rfloor + \lfloor b\sqrt{2} \rfloor,$$

ce qui permet de conclure si l'on a $n \geq \dfrac{A}{4}$, condition garantissant que a est un entier naturel.
Pour $N \geq 560$, on a, d'après (2),

$$A > \frac{N}{\sqrt{10}} - 1 \geq \frac{560}{\sqrt{10}} - 1 > 176 = 4 \times 44 \geq 4n,$$

ce qu'il fallait.
Pour les entiers $N < 560$, Michel Lafond vérifie par un petit programme informatique que cela reste vrai. Il suffit de faire deux boucles for pour tester tous les entiers.

• Montrons que le couple (2, 11) est générateur. Soit $N \in \mathbb{N}^*$ et $A = \left\lfloor \dfrac{N}{\sqrt{2}} \right\rfloor$.

On a donc

$$A\sqrt{2} < N < A\sqrt{2} + \sqrt{2}. \qquad (6)$$

On introduit, pour tout entier naturel $n \leq \dfrac{A}{7}$,

$$f(n) = \lfloor (A - 7n)\sqrt{2} \rfloor + \lfloor 3n\sqrt{11} \rfloor.$$

On montre qu'en passant de n à n + 1, $\lfloor (A - 7\sqrt{n}) \rfloor$ diminue de 9 ou 10 tandis que $\lfloor 3n\sqrt{11} \rfloor$ augmente de 9 ou 10. De nouveau, $f(n)$ varie d'au plus 1. Un calcul montre que

$$f(0) < N$$

tandis que

$$f(34) \geq N.$$

Il existe donc un entier n entre 0 et 34 tel que $f(n) = N$, ce qui permet de conclure pour le cas où $A \geq 4n$, ce qui est garanti pour $N \geq 338$ puisqu'alors

$$A > \frac{N}{\sqrt{2}} - 1 \geq \frac{388}{\sqrt{2}} - 1 > 238 = 34 \times 7.$$

Un petit script informatique permet de conclure pour les cas où $N < 238$.

• L'étude du couple (3, 3) est rapide. En posant $u_n = \lfloor n\sqrt{3} \rfloor$, on a

$$0 < u_{n+1} - u_n < 3.$$

Pour un entier $N \in \mathbb{N}^*$, on choisit un entier n tel que

$$u_n \leq N < u_{n+1}.$$

On a donc deux cas possibles :

$$\mathrm{N} = u_n = \lfloor n\sqrt{3} \rfloor + \lfloor 0\sqrt{3} \rfloor,$$

ou bien

$$\mathrm{N} = u_n + 1 = \lfloor n\sqrt{3} \rfloor + \lfloor 1\sqrt{3} \rfloor.$$

• Le cas du couple (3, 4) est encore plus facile puisque

$$2n = \lfloor 0\sqrt{3} \rfloor + \lfloor n\sqrt{4} \rfloor,$$

et

$$2n + 1 = \lfloor 1\sqrt{3} \rfloor + \lfloor n\sqrt{4} \rfloor.$$

• Enfin, montrons que le couple (3, 5) est générateur. Soit $\mathrm{N} \in \mathbb{N}^*$, $\mathrm{A} = \left\lfloor \dfrac{\mathrm{N}}{\sqrt{5}} \right\rfloor$, si bien que

$$\mathrm{A}\sqrt{5} < \mathrm{N} < (\mathrm{A}+1)\sqrt{5}.$$

On pose alors pour $0 \leq n \leq \dfrac{\mathrm{A}}{3}$

$$f(n) = \lfloor (\mathrm{A} - 3n)\sqrt{5} \rfloor + \lfloor 4n\sqrt{5} \rfloor.$$

On a alors

$$f(0) = \lfloor \mathrm{A}\sqrt{5} \rfloor \leq \mathrm{A}\sqrt{5} \leq \mathrm{N},$$

tandis que

$$f(12) \geq \mathrm{N}.$$

et $f(n)$ qui varie d'au plus 1 quand n augmente de 1. Ainsi, il existe un entier n compris entre 0 et 12 tel que $f(n) = \mathrm{N}$, ce qui conclut lorsque $n \leq \dfrac{\mathrm{A}}{3}$. Ceci est vérifié pour $\mathrm{N} \geq 83$, puisqu'alors

$$\mathrm{A} > \frac{\mathrm{N}}{\sqrt{5}} - 1 > 36 - 3 \times 12.$$

De nouveau, on confie les cas restants à un ordinateur.