Ensembles de points à distances entières sur un cercle

Jean-Pierre Friedelmeyer(*)

I. Présentation

Dans un court article publié en 1945(1) le célèbre mathématicien hongrois Paul Erdös énonçait et démontrait le théorème suivant :

Pour tout n nous pouvons trouver n points non alignés du plan tels que leurs distances soient toutes entières, mais il est impossible de trouver un nombre infini de points (non tous alignés) dont toutes les distances soient entières.

Il est en effet très simple de construire un ensemble de points dont toutes les distances mutuelles soient entières, il suffit de prendre un axe gradué à partir d'une unité et de choisir au hasard le nombre souhaité de points de graduation sur cet axe ; cet ensemble de points peut même être dénombrable. Nous pouvons également construire facilement un ensemble de trois points non alignés dont les distances mutuelles soient trois entiers naturels non nuls, cela s'appelle tout simplement un triangle à côtés entiers. Encore faut-il que chacun de ces trois nombres soit compris entre la somme et la valeur absolue de la différence des deux autres. Mais le problème n'est plus du tout aussi évident avec quatre points, c'est-à-dire un quadrilatère. C'est que, aux quatre côtés du quadrilatère s'ajoutent deux diagonales dont la longueur n'est en général pas un nombre entier et même pas un nombre rationnel, bien qu'on ait choisi pour chacun des côtés une longueur entière.

Le mathématicien indien Bhāscara II (1114 – 1185) a développé la méthode suivante pour construire des quadrilatères à côtés et diagonales entiers. Soient cinq nombres entiers a, b, c, d, e vérifiant $a^2 + b^2 = c^2$ et $c^2 + d^2 = e^2$.

Construisons le quadrilatère ABCD tel que I étant le point d'intersection des diagonales perpendiculaires AC et BD, l'on ait

$$AI = a\,.\,c\ ;$$
$$CI = b\,.\,d\ ;$$
$$BI = a\,.\,d\ ;$$
$$DI = b\,.\,c\ .$$

Alors on a les longueurs

$$AB = a\,.\,e\ ;$$
$$BC = c\,.\,d\ ;$$
$$CD = b\,.\,e\ ;$$
$$AD = c^2,$$

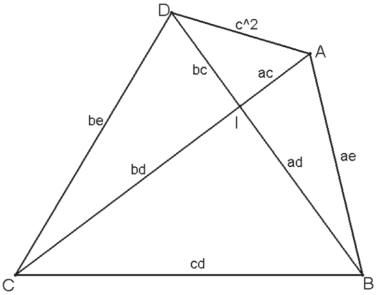


Figure 1

ce qui se vérifie facilement par le théorème de

(*) jpfriede@free.fr

(1) N. Anning et P. Erdös, *Integral distances*, Bull. Amer.Math.Soc. 51, Issue 8, p.598-601 (1945).

Pythagore (voir figure 1, où nous avons pris $a = 3$; $b = 4$; $c = 5$; $d = 12$; $e = 13$). Le lecteur curieux pourra montrer que le quadrilatère est inscriptible[(2)] dans un cercle.

L'énoncé de Paul Erdös contient en fait deux propositions, l'une positive : pour tout entier n, nous pouvons construire un ensemble de n points non alignés du plan, à distances mutuelles entières ; l'autre négative : nous ne pouvons pas construire un tel ensemble lorsque le nombre de points est infini, à moins de les prendre tous alignés[(3)].
On peut par exemple construire un ensemble de points tous alignés sauf un, de la façon suivante[(4)].

Partons d'un triangle PAB à côtés entiers : PA = a, PB = b, AB = p. On peut supposer $a > b$. Alors, par le théorème d'Al Kashi[(5)], $b^2 = a^2 + p^2 - 2ap\cos\widehat{\mathrm{A}}$, de sorte que $\cos\widehat{\mathrm{A}}$ est rationnel : $\cos\widehat{\mathrm{A}} = \dfrac{a^2 + p^2 - b^2}{2ap}$. Construisons maintenant un point C sur la demi-droite [AB) extérieurement au segment [AB] tel que BC = x. Posons PC = c. On aura $c^2 = (p+x)^2 + a^2 - 2a(p+x)\cos\widehat{\mathrm{A}}$. Cette équation en x aura en général deux solutions irrationnelles, sauf si elle est du premier degré, ce qui se produit lorsque l'on impose par exemple pour c la valeur $c = a - x$. Dans ce cas, lorsqu'on aura remplacé $\cos\widehat{\mathrm{A}}$ par l'expression ci-dessus, on aura des valeurs rationnelles pour x et pour c. En prenant par exemple $a = 7$, $b = 5$, $p = 3$, on trouve $x = \dfrac{8}{3}$ et $c = \dfrac{13}{3}$. En multipliant toutes les valeurs par 3, nous obtenons l'ensemble des quatre points de la figure 2, avec les distances mutuelles entières indiquées. Nous pouvons maintenant reprendre la même démarche à partir du triangle PBC pour construire un nouveau point D dont les distances aux autres points soient rationnelles. En multipliant par le dénominateur commun (ici 43), nous obtenons l'ensemble de cinq points à distances mutuelles toutes entières de la figure 3.

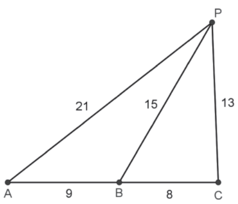


Figure 2

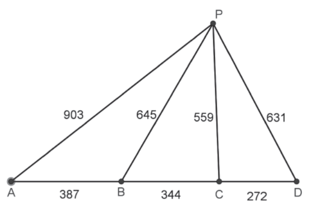


Figure 3

(2) Car IA . IC = IB . ID. Voir une démonstration directe sans le recours habituel à la notion de puissance, en annexe I.
(3) Le lecteur intéressé peut en trouver une démonstration, soit par Erdös lui-même dans l'article cité, soit par MM. Choquet et Kreweras, donnée dans le Que sais-je intitulé *La géométrie contemporaine*, par André Delachet, P. U. F., 1960, p. 50 – 52.
(4) D'après une idée de F. Steiger, *Punkte mit ganzzahligen Abständen*, Elemente der Mathematik, Vol. 18 (1963), p. 137.
(5) Voir un peu plus loin, et une démonstration très simple en annexe II.

Plus généralement, en itérant ce processus de construction, nous obtenons un ensemble de n points (arbitrairement grand) dont les distances mutuelles sont toujours rationnelles. Et par une homothétie convenable, nous pourrons toujours rendre toutes ces distances entières.

La première proposition de l'énoncé d'Erdös ne mentionne aucune condition particulière (autre que celle des distances entières) sur la position relative des points d'un tel ensemble. Elle répondait en fait à de nombreuses investigations de mathématiciens plus ou moins contemporains qui cherchaient à construire des polygones à distances entières. Erdös lui-même renvoyait à l'exemple suivant, proposé par Anning(6), d'un polygone à distances entières de 12 côtés (figure 4).

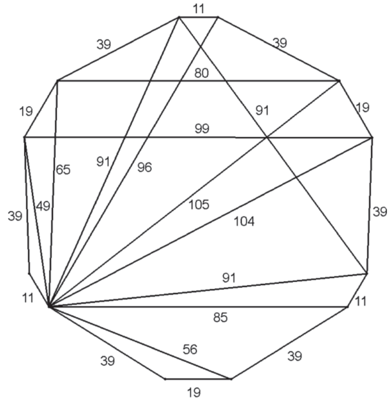


Figure 4

Anning ne donne pas beaucoup d'explications quant à l'origine des nombres mesurant les distances entre les différents sommets du polygone. Il ne dit pas comment les points sont situés (sont-ils sur un même cercle comme il semble ?). Il évoque simplement le théorème de Ptolémée et le fait que les 13 nombres rencontrés expriment les solutions entières de l'équation

$$x^2 \pm xy + y^2 = 7^2.13^2.$$

Les démonstrations d'Erdös ne sont pas non plus très détaillées et ne donnent pas de figures explicites. Or la construction de celles-ci peut être l'occasion d'activités géométriques riches et variées dans nos classes, moyennant quelques rappels ou compléments de géométrie que l'on trouvera en annexe. Nous nous limiterons dans la suite à la construction d'ensembles de points à distances entières tous situés sur un même cercle. Cette contrainte, qui peut paraître draconienne, se révèle en fait intimement mêlée à la résolution du problème et en renforce l'intérêt et la beauté. Nous aborderons les questions en faisant les calculs sur des nombres rationnels, étant entendu que moyennant une homothétie convenable, toutes les distances rationnelles entre points d'une figure peuvent être rendues entières lorsque le nombre de celles-ci est fini. Nous appellerons dans la suite côté entier ou diagonale entière un côté ou une diagonale de longueur un nombre entier relativement à une unité donnée ;

(6) Amer. Math. Monthly, vol. 22 (1915) p. 321.

ensemble de points à distances entières tout ensemble de points pour lesquels la distance mutuelle entre deux points quelconques est un nombre entier. De même nous aurons des ensembles de points à distances rationnelles.

II. Trois théorèmes utiles

Les ensembles de points considérés dans la suite devant être situés sur un cercle, nous rappelons quelques propriétés classiques de celui-ci dont certaines démonstrations sont données en annexe.

Théorème (1) dit de l'arc capable : *Tout angle inscrit dans un cercle a pour mesure la moitié de l'arc compris entre ses côtés (ou la moitié de l'angle au centre correspondant)*(7).

Et un **corollaire** : *Dans tout quadrilatère convexe inscrit dans un cercle, les angles opposés sont supplémentaires*.

Théorème (2) dit de Ptolémée(8) : *Dans tout quadrilatère convexe inscrit dans un cercle la somme des produits des côtés opposés est égale au produit des diagonales*.

Ajoutons pour mémoire le **théorème (3) dit d'Al Kashi** :

Dans un triangle ABC *de côtés* a = BC, b = CA, c = AB, on a l'égalité $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\widehat{\mathrm{A}}$ *et les égalités analogues par permutation des côtés*.

Ces égalités nous indiquent immédiatement que dans un triangle à côtés rationnels les cosinus des angles sont aussi rationnels, ce qui est particulièrement utile pour notre sujet d'étude.

III. Ensembles de quatre points à distances rationnelles sur un cercle

Un triangle rationnel quelconque ABC définit immédiatement un ensemble de trois points à distances rationnelles a = BC, b = CA, c = AB sur un cercle, son cercle circonscrit. Dans un premier temps, nous sommes donc devant le problème suivant : construire un quatrième point D sur le cercle circonscrit au triangle rationnel ABC tel que les trois distances DA, DB, DC soient aussi toutes les trois rationnelles. Le triangle ABC sera qualifié de *triangle de base*. Le cercle étant globalement invariant dans toute symétrie par rapport à un quelconque de ses diamètres, le symétrique D de C par rapport au diamètre passant par B (par exemple), présente l'avantage d'être à la fois sur le cercle et à une distance rationnelle de B)(voir figure 5). Démontrons que les distances DA et DC sont également rationnelles. Quitte à permuter le rôle respectif des points A, B, C on peut supposer $a < b < c$ et alors l'angle $\widehat{\mathrm{A}}$ est aigu.

Nous avons $\mathrm{DC} = 2\mathrm{BD}\cos\widehat{\mathrm{D}} = 2a\cos\widehat{\mathrm{A}}$ car $\widehat{\mathrm{D}}$ et $\widehat{\mathrm{A}}$ soutiennent le même arc CB. (théorème (1)).

(7) On en trouve une démonstration « sans paroles » dans le BV n°521, p. 539.
(8) Voir démonstration en annexe III.

De plus, par Al Kashi $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\widehat{A}$, donc $\cos\widehat{A} = \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$.

D'où $DC = \dfrac{a}{bc}\left(b^2 + c^2 - a^2\right)$ qui est rationnel.

Pour DA il suffit alors d'appliquer le théorème de Ptolémée : DA.BC + AC.DB = AB.DC.

Donc DA . a + b . a = DC . c, d'où $DA = \dfrac{c^2 - a^2}{b}$ qui est rationnel.

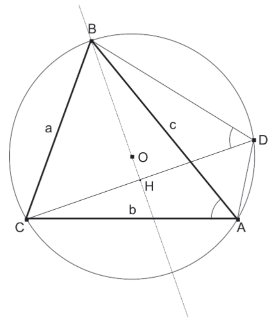


Figure 5

Dans la suite, pour simplifier les relations, nous prendrons comme triangle de base un triangle isocèle en A et ferons les symétries par rapport aux diamètres passant par B ou C, la symétrie par rapport au diamètre (AO) ne donnant pas de point supplémentaire. Dans le cas de la symétrie par rapport à BO, avec $b = c$, (figure 6) les relations ci-dessus se simplifient en

$DB = a$, $DA = \dfrac{b^2 - a^2}{b}$, $DC = \dfrac{a}{b^2}\left(2b^2 - a^2\right)$.

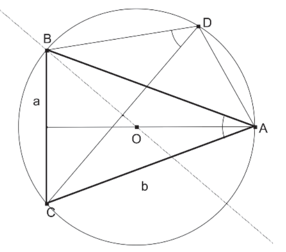


Figure 6

À cause de l'axe de symétrie du triangle isocèle, les résultats seront identiques pour le symétrique de B par rapport à (CO).

Considérons maintenant le symétrique D de A par rapport à (CO) (figure 7).

On aura DC = b, DA = a, $DB = \dfrac{b^2 - a^2}{b}$.

Comme DA = CB = a, le quadrilatère ABCD est un trapèze isocèle.
Par exemple pour a = 8 et b = 16, nous aurons
DA = 8, DC = 16, DB = 12.

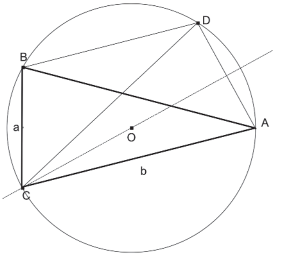


Figure 7

IV. Ensembles de *n* points à distances entières sur un cercle

1. Repérage des points sur un cercle

Pour continuer, nous aurons besoin de repérer les différents points d'un cercle par rapport à un point origine. Soit un cercle donné de centre O et de rayon r orienté dans le sens anti-horaire et I un point du cercle choisi comme origine. Un point U du cercle sera alors parfaitement repéré par la valeur modulo 2π de l'angle $\left(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OU}\right)$ que nous appellerons argument de U. Au point U on associera la symétrie orthogonale d'axe (OU) notée S_U. L'image d'un point A d'argument α par la symétrie S_U sera alors le point A′ d'argument $\alpha' = 2u - \alpha$ si U a pour argument u (propriété (4)).

En effet $\left(\overrightarrow{UA},\overrightarrow{UA'}\right)=\alpha$ donc $\alpha-u=u-\alpha'$ ou encore $\alpha'=2u-\alpha(\text{modulo } 2\pi)$. (voir figure 8).

Remarquons que puisque $\left(\overrightarrow{UA},\overrightarrow{UA'}\right)=\alpha$ alors

$$\left(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OA'}\right)=2\alpha(\text{modulo } 2\pi),$$

d'après le théorème (1)

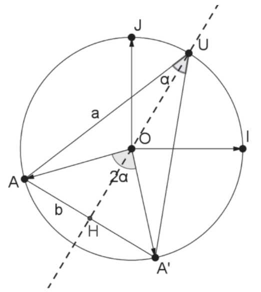


Figure 8

2. Construction de 6 points à distances entières sur un cercle

Reprenons maintenant la figure 7 en plaçant le sommet A à l'origine et soit $\alpha=\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)$.

Alors B a pour argument π − α et C a pour argument π + α. Comme $S_A(C)$ = D, l'argument de D est d'après (4) $2(\pi+\alpha)-0=2\alpha(\text{modulo } 2\pi)$.

Si maintenant nous construisons E = $S_D(C)$, E aura pour argument $2(2\alpha)-(\pi+\alpha)=3\alpha-\pi$.

Puis nous faisons F = $S_E(D)$qui aura pour argument $2(3\alpha-\pi)-2\alpha=4\alpha(\text{modulo } 2\pi)$. Nous avons ainsi construit un ensemble de six points sur un cercle dont toutes les distances sont rationnelles, au nombre de $C_6^2=15$:

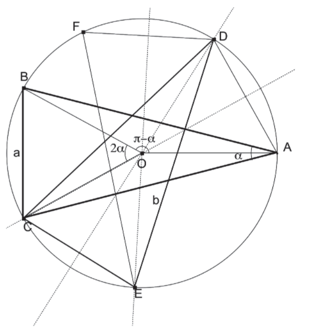


Figure 7

– BC = a ; AB = AC = b ;
– DC = b ; DA = a ; DB = $\dfrac{b^2-a^2}{b}$;
– ED = b ; EC = a ; EA = $\dfrac{b^2-a^2}{b}$;
– FE = b ; FD = a ; FC = $\dfrac{b^2-a^2}{b}$.

Il reste trois distances à calculer : EB, FA, FB pour lesquels nous pouvons appliquer le théorème de Ptolémée aux quadrilatères EABC, FDAE, FBCD respectivement. Par exemple pour EB :

EB.AC = BC.AE + EC.AB, ou EB. b = $a\dfrac{b^2-a^2}{b}+ab$ donc EB = $\dfrac{a\left(2b^2-a^2\right)}{b^2}$. Nous comprenons l'utilité du théorème de Ptolémée : si dans un quadrilatère inscrit dans un cercle nous connaissons cinq des six distances entre les sommets, la sixième se calcule au moyen d'une équation du premier degré et est donc également rationnelle si les cinq connues sont rationnelles. On trouve ainsi FA = $\dfrac{a\left(2b^2-a^2\right)}{b^2}$ et FB = $\dfrac{b^4-3a^2b^2+a^4}{b^3}$.

Si a = 8 et b = 16, nous avons l'ensemble des six points ABCDEF de la figure 8. Elle fait apparaître différents trapèzes dont les trois isométriques ADBC, DFCE et ADCE.

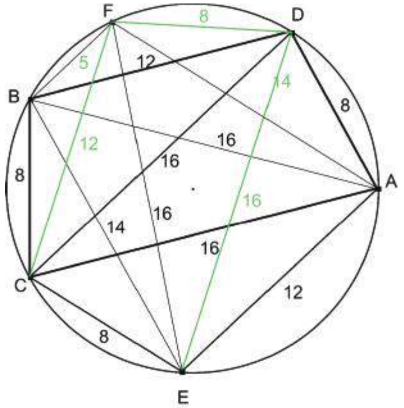


Figure 8

3. Généralisation à un nombre quelconque de points

En itérant cette démarche (n – 2) fois, on aboutit à un ensemble de n points d'un cercle dont nous allons montrer que quelque soit l'entier n toutes les distances mutuelles sont rationnelles si les côtés du triangle de base le sont.

Prenons un triangle de base $P_0P_1P_2$ isocèle avec $P_0P_1 = b$, $P_0P_2 = a$ (figure 9).

Les points P_n sont construits de proche en proche en partant du triangle de base $P_0P_1P_2$ de la façon suivante :

$\left(S_{P_2}\right)$ envoie P_1 sur P_3, $\left(S_{P_3}\right)$ envoie P_2 sur P_4. De façon générale, pour $n \geq 2$, $\left(S_{P_n}\right)$ envoie P_{n-1} sur P_{n+1}. Soit x_n l'argument de P_n, en prenant pour origine sur le cercle le point P_1 d'argument $x_1 = 0$. L'argument x_n de P_n est $(n-1)(\pi+\alpha)(\text{modulo } 2\pi)$, pour tout n, puisqu'on passe de P_k à P_{k+2} par une rotation d'angle 2α et que $x_0 = \pi - \alpha$ et $x_1 = 0$. Donc

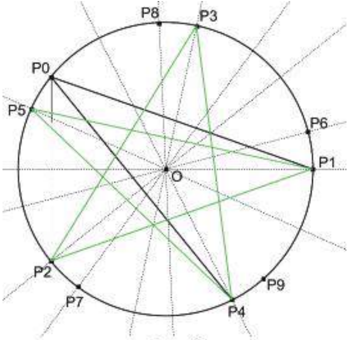


Figure 9

$$x_{2p} = x_0 + 2p\alpha = \pi - \alpha + 2p\alpha = (2p-1)(\pi+\alpha)(\text{modulo } 2\pi)$$

$$x_{2p+1} = x_1 + 2p\alpha = 2p\alpha(\text{modulo } 2\pi)$$

En regroupant les deux résultats, on peut dire que l'on passe de P_k à P_{k+1} par une rotation de centre O et d'angle $\pi + \alpha$.

Démontrons qu'un ensemble de n points du cercle ainsi construit est tel que la distance entre deux points quelconques est toujours rationnelle(9). Nous allons procéder par récurrence sur n.

1) Par donnée et construction (voir figure 7) la proposition est vraie pour les quatre points P_0, P_1, P_2, P_3.

2) Soit $P_0, P_1, P_2, \ldots, P_{n-1}, P_n$ un ensemble de $(n + 1)$ points d'un cercle, construit comme ci-dessus, tels que toutes les distances entre deux points quelconques soient rationnelles. Soit P_{n+1} un point supplémentaire construit de la même façon, c'est-à-dire que $\left(S_{P_n}\right)$ envoie P_{n-1} sur P_{n+1}. Démontrons que toutes les nouvelles distances $P_{n+1}P_k$ pour $0 \leq k \leq n$ sont encore rationnelles.

Soulignons d'abord que l'ensemble de points $P_1, P_2, \ldots, P_{n-1}, P_n, P_{n+1}$ est isométrique de l'ensemble de points $P_0, P_1, P_2, \ldots, P_{n-1}, P_n$ puisqu'on passe pour tout k de l'argument x_k à x_{k+1} par une même rotation d'angle $\pi + \alpha$. Comme les distances P_iP_k pour $0 \leq i \leq n - 1$ et $1 \leq k \leq n$ sont toutes rationnelles, il en est de même pour toutes les distances $P_{i+1}P_{k+1}$. Il ne reste plus qu'à montrer que P_0P_{n+1} est rationnel. Pour cela il suffit d'appliquer le théorème de Ptolémée au quadrilatère $P_0P_{n+1}P_1P_2$, par exemple, soit $P_0P_{n+1}.P_1P_2 + P_2P_{n+1}.P_0P_1 = P_0P_2.P_1P_{n+1}$. Dans cette égalité, toutes les distances sauf la première sont connues comme rationnelles, il en est donc de même de la première.

Remarque 1 On peut imaginer qu'il puisse arriver qu'un point P_n se confonde avec un point pour P_k pour $k < n$. Ceci est exclu : comme $\tan \alpha$ est rationnel, on sait depuis Lambert (1728 – 1777)(10) que alors α ne peut être commensurable à π.

Remarque 2 : si le triangle de base $P_0P_1P_2$ est équilatéral, la construction précédente ne conduit à aucun point supplémentaire. Peut-on néanmoins construire un ensemble de n points à distance s entières sur le cercle circonscrit à ce triangle ?

V. Retour sur la construction du polygone à 12 côtés de Anning

1. D'autres hexagones à distances entières

Considérons donc un triangle équilatéral ABC de côté rationnel, inscrit dans un cercle de centre O et orienté dans le sens anti-horaire. Soit M un point quelconque de l'arc AB ne contenant pas le point C. On a alors $\left(\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MA}\right) = \frac{2\pi}{3}$ (figure 10). Posons MA = a et MB = b, nous avons par Al Kashi : $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\widehat{M} = a^2 + b^2 + ab$.

(9) Sur une idée de A. Müller, *Auf einem Kreis liegende Punktmengen ganzzahliger Entfernung*, Elemente der Mathematik, Vol. 8 (1953), p 37 – 38.
(10) Voir brochure APMEP n° 86 (1992), Michel Serfati, *Quadrature du cercle, fractions continues et autres contes*, p. 72.

Si a et b sont rationnels, il faut donc que $c=\sqrt{a^2+b^2+ab}$ le soit également.

Déterminons les solutions rationnelles (a, b, c) de l'équation : $c^2 = a^2 + b^2 + ab$.

Posons $\frac{a}{c}=\alpha$; $\frac{b}{c}=\beta$;nous sommes alors amenés à chercher les solutions rationnelles de l'équation (e) : $\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2=1$.

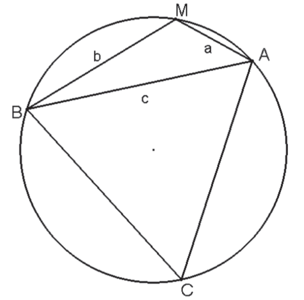


Figure 10

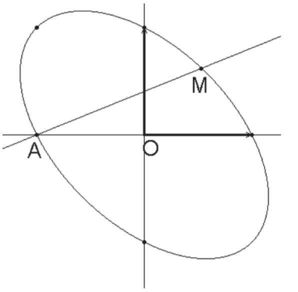


Figure 11

Dans un repère orthonormé (O, α, β), (e) est l'équation d'une ellipse dont on connaît entre autres le point A(−1,0) (figure 11). Une droite de pente t passant par A recoupe cette ellipse en un point M de coordonnées rationnelles (α, β) si et seulement si t est rationnel. Nous trouvons :

$$\alpha=\frac{1-t^2}{t^2+t+1} \;;\; \beta=\frac{t^2+2t}{t^2+t+1}.$$

Et en posant $t=\frac{u}{v}$; $(u,v)\in\mathbb{Z}^2, v\neq 0, u\wedge v=1$.

$$\alpha=\frac{v^2-u^2}{u^2+uv+v^2} \;;\; \beta=\frac{u^2+2uv}{u^2+uv+v^2}.$$

Les solutions de (e) peuvent donc s'écrire :

$$c=k\left(u^2+uv+v^2\right), a=k\left(v^2-u^2\right), \mathrm{b}=k\left(u^2+2uv\right), \text{avec } (k,u,v)\in\mathbb{Z}^3.$$

Par exemple pour u = 1, v = 2, k = 1, on a a = 3, b = 5, c = 7.

Revenons à la figure 10. Nous lui ajoutons les images de M par les rotations d'angle $\frac{2\pi}{3}$ et $\frac{4\pi}{3}$ autour du centre du cercle. Nous obtenons (figure 12) un ensemble de six points à distances rationnelles, avec les 15 distances marquées. Douze d'entre elles sont données par a, b, c. Les trois dernières sont données par a + b, qu'on obtient par le théorème de Ptolémée. Ce résultat remarquable est aussi l'illustration d'une propriété classique des points de l'arc AB du cercle circonscrit au triangle équilatéral ABC : pour tout point M de cet arc on a MA + MB = MC. On peut aussi considérer ici que l'on a une démonstration de cette propriété, par emploi du théorème de Ptolémée.

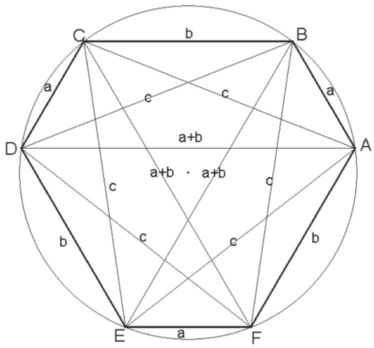


Figure 12

2. Le dodécagone

À partir des solutions de (e) $u = 2$, $v = 3$, nous obtenons $a_1 = 5$, $b_1 = 16$, $c_1 = 19$. En combinant les deux hexagones qui en résultent, et se ramenant à une valeur commune de $c = 133$, multiple commun de 7 et 19 nous obtenons un ensemble de neuf points AMNCRSBPQ sur le cercle circonscrit au triangle équilatéral ABC de côté 133 avec les $C_9^2 = 36$ distances entières

	A	M	N	C	R	S	B	P	Q
A		35	57	133	147	152	133	112	95
M	35		23	112	133	143	147	133	120
N	57	23		95	120	133	152	143	133
C	133	112	95		35	57	133	147	152
R	147	133	120	35		23	112	133	143
S	152	143	133	57	23		95	120	133
B	133	147	152	133	112	95		35	57
P	112	133	143	147	133	120	35		28
Q	95	120	133	152	143	133	23	23	

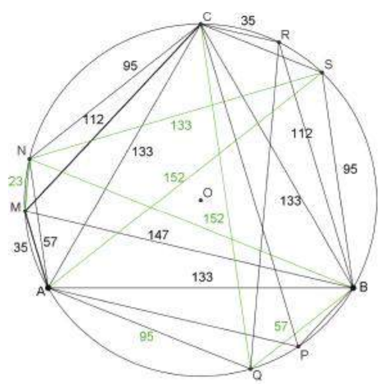


Figure 13

Nous comprenons maintenant mieux l'exemple donné par Anning avec la figure 4. Elle correspond à la superposition de trois hexagones, construits à partir du triangle équilatéral AEI de la figure 14 avec comme côté 91, plus petit commun multiple de 7 et 13 ;
– d'une part l'hexagone ABEFIJA, de côtés successivement 39, 65, 39, 65, 39, 65 (multiples de 13 sur la base 3, 5, 7) ; d'autre part l'hexagone ACEGIKA (en vert), de côtés successivement 56, 49, 56, 49, 56, 49 (multiples de 7 sur la base 7, 8, 13), le tout complété par l'hexagone ALIHEDA de côtés 11, 85, 11, 85, 11, 85.

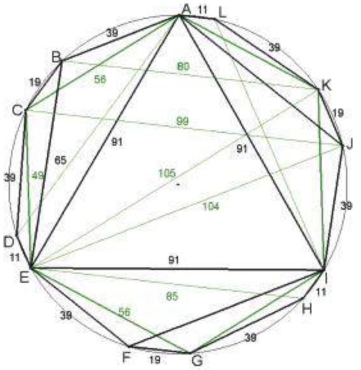
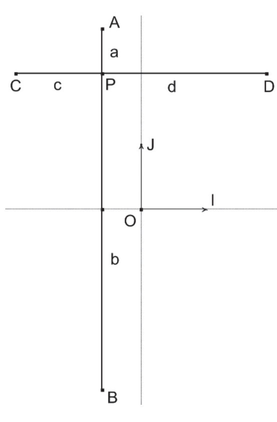


Figure 14

Nous voyons pourquoi intervient l'équation $x^2 + xy + y^2 = 7^2.13^2$ dont le second membre correspond au carré du côté du triangle équilatéral de base. L'équation de Anning peut aussi s'écrire $(2x \pm y)^2 + 3y^2 = 4.7^2.13^2 = 182^2$ et sa résolution se ramène à un problème de théorie des nombres : résoudre l'équation dans $\mathbb{Z}$, $X^2 + 3Y^2 = N$, pour N entier naturel donné, problème dont l'étude sort des limites théoriques voulues pour cet article. Donnons en simplement l'ensemble des couples solutions : (11, 85), (19, 80), (39, 65), (49, 56), (85, 96), (49, 105), (65, 104), (99, 80), (0, 91) et leur symétriques.

Annexe I

Soient deux segments perpendiculaires [AB] et [CD] sécants en un point P. Alors les points A, B, C, D sont cocycliques (c'est-à-dire qu'il existe un cercle passant par ces quatre points) si et seulement si PA.PB = PC.PD.



Posons PA = a, PB = b, PC = c, PD = d et soit O l'intersection des médiatrices de [AB] et [CD] et plaçons le repère $\left(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ}\right)$ orthonormé. Soient (u, v) les coordonnées de P dans ce repère. Alors les coordonnées des autres points sont
A $(u, v + a)$; B $(u, v - b)$; C $(u - c, v)$; D $(u + d, v)$;

$O\left(u+\frac{d-c}{2}, v+\frac{a-b}{2}\right)$.

Puisque OA = OB et OC = OD les points A, B, C, D sont sur un même cercle si et seulement si OA = OC.

Or $OA^2 = \left(\frac{c-d}{2}\right)^2 + \left(\frac{a+b}{2}\right)^2$ et $OC^2 = \left(\frac{c+d}{2}\right)^2 + \left(\frac{a-b}{2}\right)^2$.

Donc OA = OC. si et seulement si $ab = cd$.

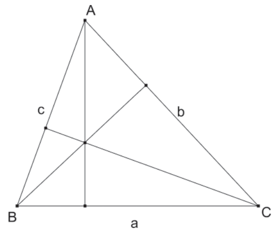
Conclusion : les quatre points A, B, C, D sont sur un même cercle si et seulement si PA. PB = PC. PD.

Remarque. Dans ce cas, comme on a $ab = cd$, on a aussi $4OA^2 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$. Autrement dit : Si deux cordes d'un cercle se coupent à angle droit, la somme des carrés des quatre segments déterminés par ces deux cordes est égale au carré du diamètre du cercle. C'est un théorème très récent, énoncé par R. B. Nelsen en 2004 qui en donne une jolie démonstration « sans paroles »(11).

Annexe II : Théorème d'Al Kashi

Soit un triangle quelconque ABC. Alors

$$a = b\cos\widehat{C} + c\cos\widehat{B},$$
$$b = a\cos\widehat{C} + c\cos\widehat{A},$$
$$c = a\cos\widehat{B} + b\cos\widehat{A}.$$



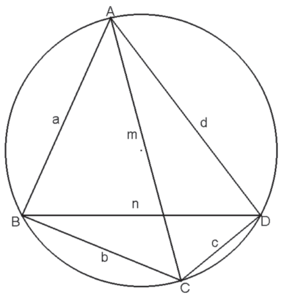
Donc

$$\begin{aligned} c^2 &= ac\cos\widehat{B} + bc\cos\widehat{A} \\ &= a\left(a - b\cos\widehat{C}\right) + b\left(b - a\cos\widehat{C}\right) \\ &= a^2 + b^2 - 2ab\cos\widehat{C}. \end{aligned}$$

NB. Sur la figure à droite, les angles sont tous aigus et donc leurs cosinus sont positifs. La démonstration s'adapte totalement lorsque l'un des angles est obtus(12).

Annexe III : Théorème de Ptolémée

Soit ABCD un quadrilatère convexe quelconque, inscrit dans un cercle, de côtés et diagonales AB = a, BC = b, CD = c, DA = d, AC = m, BD = n.



Dans les triangles ABC et ACD nous avons d'après le corollaire (1) et le théorème (3) :

$$m^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\widehat{B},$$
$$m^2 = c^2 + d^2 + 2cd\cos\widehat{B}.$$

(11) Roger B. Nelsen, Proof without Words : Four Squares with Constant Areas, *Mathematics Magazine*, Vol. 77, n° 2 Permutations (Apr. 2004), p. 135.
(12) D'après *The American mathematical Monthly*, octobre 2014, p. 122.

En éliminant $\cos\widehat{\mathrm{B}}$ par combinaison linéaire :

$$m^2(cd+ab)=(a^2+b^2)cd+(c^2+d^2)ab$$
$$=(ad+bc)(ac+bd).$$

De même avec les triangles ABD et BCD nous trouvons

$$n^2(bc+ad)=(ab+dc)(ac+bd).$$

D'où :

$$m^2n^2=\frac{(ad+bc)(ac+bd)}{(cd+ab)}.\frac{(ab+dc)(ac+bd)}{(bc+ad)}.$$

qui se simplifie en $m^2n^2=(ac+bd)^2$.

ou encore $mn = ac + bd$.

Théorème : *dans un quadrilatère convexe inscriptible dans un cercle le produit des diagonales est égal à la somme des produits des côtés opposés.*