Un « Jigsaw-teaching » en classe de TS pour l'étude de la fonction ln

Roselyne Halbert(*) & Marie-Catherine Manens(**)

Nous sommes en janvier en classe de Terminale S. C'est le moment choisi pour aborder le chapitre sur la fonction logarithme népérien. Après une progression couvrant entre autres domaines celui des fonctions dérivables, continues, de la fonction exponentielle, des limites de fonctions, nous avons proposé à nos élèves de mettre en place cette nouvelle notion dans un dispositif d'enseignement de type groupe favorisant l'autonomie, l'expertise et la coopération des élèves : le Jigsaw Teaching ou coopération « Puzzle ». Nous avons découvert ce dispositif par hasard lors de discussions informelles avec un professeur de mathématiques en anglais qui avait testé une organisation de travail en groupe en deux phases pour favoriser l'oral. L'idée a ensuite germé et des recherches nous ont conduit au dispositif Jigsaw Teaching.

L'objectif est d'exploiter ce type de pédagogie dite active, pour amener les élèves au bout d'une séance de deux heures à rédiger un cours sur la fonction ln et à résoudre un exercice.

En quoi consiste ce dispositif ?

Les élèves (35) de chacune de nos classes sont répartis en 7 groupes de 5 élèves (groupe 1, groupe 2, …, groupe 7). Dans chaque groupe, chaque membre est désigné par une lettre : A, B, C, D ou E.
La séance de deux heures est scindée en 3 phases.

Première phase (20 minutes)

Les 7 élèves désignés par la même lettre se regroupent en groupes dits d'experts (un groupe de 3 et un groupe de 4). Ils reçoivent une information spécifique (A ou B ou C ou D ou E) et une consigne de travail à réaliser.
Les documents distribués (A,B,C,D,E) comportent :
une introduction commune (annexe 1):

- le théorème justifiant la définition de la fonction ln (à ce stade de l'année, les élèves exploitent déjà pour $a > 0$, le nombre ln a, solution de l'équation $e^x = 0$),
- les conséquences immédiates de cette définition,

et une partie propre :

- document A (annexe 2) : propriétés algébriques de la fonction ln,
- document B (annexe 3) : la dérivabilité en 1, une conséquence et la dérivée de la fonction ln,

(*) Roselyne.Halbert@ac-rennes.fr
(**) mcmanens@gmail.com

- document C (annexe 4) : variation de la fonction ln et conséquence,
- document D (annexe 5) : la fonction ln u,
- document E (annexe 6) : limites et croissances comparées.

Le travail à réaliser est précisé sur le document : « sans papier crayon, comprendre ce document en échangeant entre vous ; préciser comment on peut contrôler toutes les propriétés de la fonction ln à la calculatrice ».

Les élèves travaillent par groupe d'experts de 3 ou 4 : ils échangent pour confronter leur compréhension du document, ils testent les informations avec la calculatrice et les mémorisent.

Deuxième phase (45 minutes)

Chaque élève rejoint, sans document, son groupe d'origine et transmet aux autres ce qu'il a appris. Le groupe a pour mission de rédiger un cours sur la fonction ln. Les élèves peuvent utiliser leurs notes sur les cours précédents.

Troisième phase (25 minutes)

Nous proposons à chaque groupe un exercice d'application : étude de la fonction $x \mapsto \dfrac{\ln x}{x}$ Les élèves disposent du cours qu'ils viennent de rédiger.

Comment s'inscrit cette séance dans la séquence ?

À la fin de la séance, nous distribuons un cours de deux pages.
Lors des séances suivantes, nous alternons des phases d'exercices et de démonstrations en partant d'énoncés proposés dans les productions des groupes et mis à disposition de tous à l'aide d'un visualiseur.

Pourquoi utiliser ce dispositif ?

Ce chapitre fait appel à plusieurs notions mises en place dans notre progression spiralée. Nous pensons qu'au travers de la tâche qui est demandée, ce dispositif aide les élèves à prendre conscience de leurs acquis et de leurs savoir-faire. Il favorise la réflexion en petits groupes, les échanges et l'entraide. Dans chaque phase, l'élève est acteur.

Dans la première phase, l'élève doit comprendre et mémoriser un document. Il est responsable de la restitution correcte de sa partie.

Dans la deuxième phase, le dispositif impose l'écoute réciproque, l'entraide, la confrontation et de l'organisation afin de produire un texte écrit en concertation.

Notons que dans ce dispositif, chaque élève est irremplaçable et donc impliqué quel que soit son niveau.
En particulier dans la première phase l'élève en difficulté demande et trouve de l'aide dans son groupe pour parvenir à jouer son rôle d'expert dans la deuxième phase.

Quant à la troisième phase, elle se veut avant tout valorisante. Nous faisons confiance aux élèves pour aboutir sans notre aide à la résolution de l’exercice en utilisant comme nouvel outil la fonction ln et en mobilisant des connaissances et savoir-faire « anciens ». Cette dernière étape donne du sens à l’ensemble de la séance.

Qu’avons-nous observé ?

Dans la première phase, le document distribué est accueilli avec intérêt. Nous notons au début peu d’échanges et une réelle concentration des élèves. Progressivement, ils commencent à se questionner mutuellement. La consigne « sans papier-crayon » favorise ces échanges.

Dans la deuxième phase, très vite nous notons beaucoup d’échanges : chaque élève veut faire part oralement de son expertise.
Chacun cherche à se souvenir de ce qu’il a étudié et à le partager. Certains notent par écrit au brouillon, avant tout échange, ce dont ils se souviennent.
La partie commune suscite beaucoup de discussions.
Au moment de la rédaction collective du cours, les élèves interagissent vraiment entre eux.

→ Ils s’entraident, s’expliquent

À propos de $\exp(a) = b$ et $\ln(b) = a$

L – si on prend comme exemple là tu as 2 et là 7,39 : exp(2) ça fait 7,39 et ln(7,39) ça fait 2.
M – Ah oui ok.
L – et la condition que l’on a est que ce nombre là doit être strictement positif et pas celui-ci

Réciproque

$e^x = a$

$x = \ln(a)$

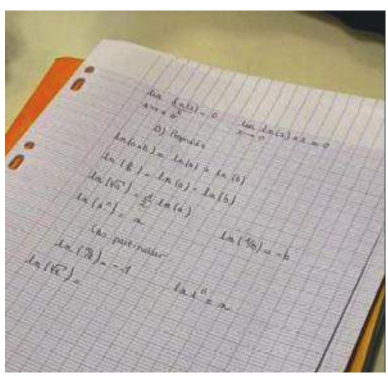
$2 \underset{\ln}{\overset{e}{\rightleftarrows}} 7{,}38 > 0$

$a \underset{\ln}{\overset{e}{\rightleftarrows}} b \qquad b > 0$

→ Ils se concertent, se corrigent, tentent de s’écouter

Dans un groupe une discussion s’engage sur la formule comportant $\ln\left(\dfrac{1}{b}\right)$:

Un élève a écrit dans un premier temps $\ln\left(\dfrac{1}{b}\right) = -b$:



R : Si tu as retenu qu’il y avait quelque chose avec 1 sur quelque chose, c’est que il y en avait peut être une ...
G : il faut la retrouver
A : euh et bien là ça fait ln(b) non ?

R : Parce que là c'est un quotient $\ln\left(\frac{1}{b}\right)$; ln(1) cela fait alors 0 – ln(b)

G : en utilisant cette formule là ?

A : Je dis peut être une « connerie » mais $\ln\left(\frac{1}{b}\right)$ c'est un quotient et tu fais la formule : ln(1) ça fait 0 ; –ln(b) donc ça ça ne fait pas $-b$ mais –ln(b) ; je ne suis pas sûre.

R : non ce ne serait pas $-b$ mais –ln(b).

G : oui c'est cela qu'elle a dit

R : ah pardon j'avais entendu $-b$

G : Si si c'est bon c'est ça

R : ici c'est –ln(b)

→ Ils s'organisent, débattent et construisent

A- Cette définition est bien : on nomme ln x la fonction telle que $\exp(\ln x) = x$ avec x positif.

B- Non d'abord on parle des limites de exp et du coup on parle des solutions de $\exp(x) = a$.

A- ok d'abord on écrit « rappel sur l'exponentielle ».

C - On dit qu'elles sont inverses l'une de l'autre.

B - Non « définition » car après ils vont dire on réfléchit par rapport à la fonction exponentielle.

A - ok, on donne d'abord les propriétés de l'exponentielle pour ensuite dire sur quoi est définie ln avant de dire qu'elles sont inverses.

C - faut mettre un titre et I) logarithme népérien.

B - I) c'est pas logarithme népérien c'est tout le chapitre, c'est « définition ».

A - Après on met qu'elles sont réciproques.

Après quelques minutes, voici le consensus :

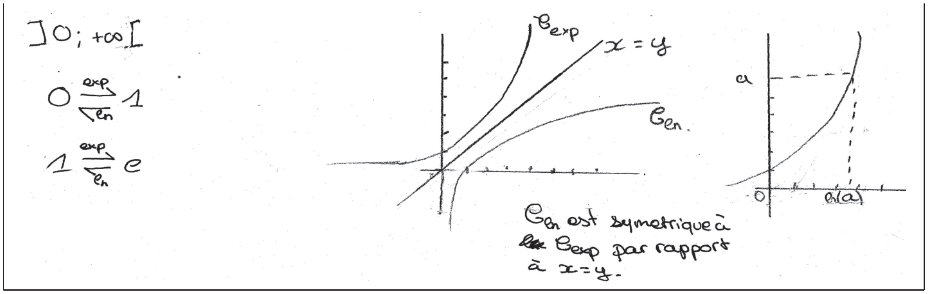
Fonction logarithme neperien.

I. DEFINITION.

soit $x \in \mathbb{R}$.

La fonction logarithme est la réciproque de la fonction exponontiel <u>cad</u> que la solution de l'equation $e^x = a$ est $\ln(a)$. Donc reciproquem e^a est la solution de $\ln(x) = a$.

$\ln(x)$ est le réel tel que $e^{\ln(a)} = a$ or la fonction exponentielle n'est jamais négative ou nulle. Donc il n'existe pas de réel $\ln(a)$ tel que $e^{\ln(x)} \leq 0$ or $e^{\ln(x)} = x$ donc $\ln(x)$ est definie sur

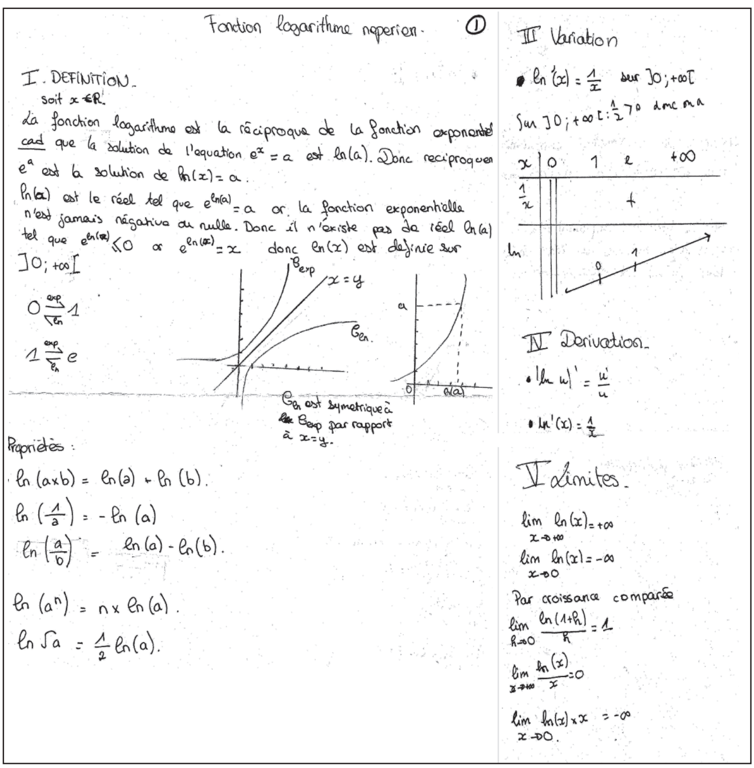


Dans la troisième phase (l'exercice)

Dans chaque groupe, ils effectuent l'étude individuellement mais confrontent régulièrement leurs résultats. Ou bien ils ont déjà mémorisé certaines propriétés ou bien ils font appel au cours qu'ils ont rédigé. Ils mettent en œuvre le calcul de la dérivée d'un quotient ou d'un produit de fonctions, l'étude du signe de cette dérivée en résolvant équation et inéquation qui constituent de nouveaux acquis, ils complètent le tableau de variation par des calculs d'image ou de limites, ils utilisent leurs calculatrices pour contrôler.

Que retirons-nous des productions écrites ?

Un exemple de rédaction de cours


Fonction logarithme neperien. ①

I. DEFINITION.
soit $x \in \mathbb{R}$.
La fonction logarithme est la réciproque de la fonction exponentielle cad que la solution de l'equation $e^x = a$ est $\ln(a)$. Donc reciproquement e^a est la solution de $\ln(x) = a$.
$\ln(a)$ est le réel tel que $e^{\ln(a)} = a$ or la fonction exponentielle n'est jamais négative ou nulle. Donc il n'existe pas de réel $\ln(a)$ tel que $e^{\ln(a)} \leq 0$ or $e^{\ln(x)} = x$ donc $\ln(x)$ est définie sur]0 ; +∞[

$0 \underset{\ln}{\overset{\exp}{\rightleftarrows}} 1$

$1 \underset{\ln}{\overset{\exp}{\rightleftarrows}} e$

$\mathcal{C}_{exp}$ $x = y$ $\mathcal{C}_{ln}$. a 0 ln(a)

$\mathcal{C}_{ln}$ est symetrique à $\mathcal{C}_{exp}$ par rapport à $x = y$.

Propriétés :
$\ln(a \times b) = \ln(a) + \ln(b)$.
$\ln\left(\frac{1}{a}\right) = -\ln(a)$
$\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)$.
$\ln(a^n) = n \times \ln(a)$.
$\ln\sqrt{a} = \frac{1}{2}\ln(a)$.

III Variation
• $\ln'(x) = \frac{1}{x}$ sur]0 ; +∞[
Sur]0 ; +∞[: $\frac{1}{x} > 0$ donc ma

x	0	1	e	+∞
$\frac{1}{x}$	‖		+	
ln	‖	0	1	↗

IV Derivation.
• $(\ln u)' = \frac{u'}{u}$
• $\ln'(x) = \frac{1}{x}$

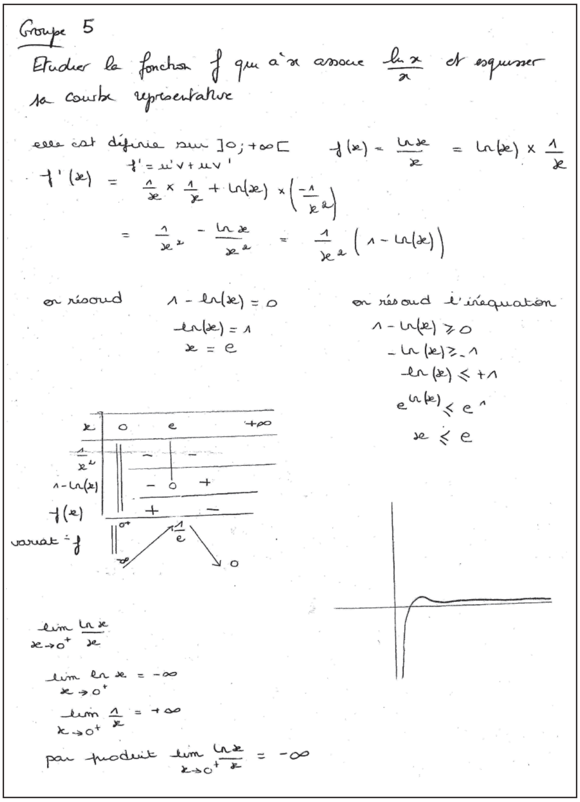
V limites.
$\lim_{x \to +\infty} \ln(x) = +\infty$
$\lim_{x \to 0} \ln(x) = -\infty$
Par croissance comparée
$\lim_{h \to 0} \frac{\ln(1+h)}{h} = 1$
$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$
$\lim_{x \to 0} \ln(x) \times x = -0$

Quel que soit le groupe, nous notons l'effort de mémorisation effectué, l'envie de rédiger un cours structuré bien présenté. A chaque fois, nous retrouvons le besoin de produire la figure clé : les courbes des deux fonctions symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$.

Même s'il manque les quantificateurs et les ensembles de nombres sur lesquels les égalités sont valides, nous jugeons que pratiquement la totalité des propriétés est énoncée ce qui sous-tend que chaque expert a apporté sa contribution.

La plus grande difficulté a été le passage de la notation ln a introduite à la fin du chapitre de la fonction exponentielle, comme on peut le faire au collège pour la notation $\sqrt{a}$, à la définition de la fonction ln qui demande de mobiliser et d'organiser plusieurs connaissances des chapitres précédents.

Un exemple de rédaction de l'exercice :



Groupe 5

Etudier la fonction f qui à x associe $\frac{\ln x}{x}$ et esquisser sa courbe representative

elle est définie sur $]0;+\infty[$ $\quad f(x) = \frac{\ln x}{x} = \ln(x) \times \frac{1}{x}$

$f' = u'v + uv'$

$f'(x) = \frac{1}{x} \times \frac{1}{x} + \ln(x) \times \left(\frac{-1}{x^2}\right)$

$= \frac{1}{x^2} - \frac{\ln x}{x^2} = \frac{1}{x^2}\left(1 - \ln(x)\right)$

on résoud $\quad 1 - \ln(x) = 0$

$-\ln(x) = 1$

$x = e$

on résoud l'inéquation

$1 - \ln(x) \geqslant 0$

$-\ln(x) \geqslant -1$

$\ln(x) \leqslant +1$

$e^{\ln(x)} \leqslant e^1$

$x \leqslant e$

x	0		e		$+\infty$
$\frac{1}{x^2}$	‖	$-$		$-$	
$1-\ln(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	‖	$+$		$-$	
variat° f	‖ 0^+ $-\infty$	↗	$\frac{1}{e}$	↘	0

$\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{x}$

$\lim\limits_{x\to 0^+} \ln x = -\infty$

$\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$

par produit $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{x} = -\infty$

Au moment de la résolution de cet exercice, chaque élève doit mobiliser l'ensemble du travail effectué et donc pas seulement les propriétés pour lesquelles il jouait le rôle d'expert.

Un exemple de dialogue :

- on va faire la dérivée $\dfrac{\ln x}{x}$,
- dans notre cours, on a directement la dérivée de $\dfrac{\ln x}{x}$?
- non, c'est la limite que l'on a
- c'est $\dfrac{u}{v}$
- il va falloir mettre que f est dérivable sur $]0;+\infty[$
- 0 non compris
- oui bien sûr
- $\dfrac{u'v-v'u}{v^2}$.
- La dérivée de ln x c'est bien $\dfrac{1}{\ln x}$?
- non $\dfrac{1}{x}$, on peut prend notre feuille de cours si on a un doute.
- On trouve $\dfrac{1-\ln x}{x^2}$?
- il faut $x \neq 0$.
- c'est ln e qui est égal à 1 donc il faut placer « e » dans le tableau
- vous trouvez quoi comme tableau de variations ?
- on tombe bien sur $x = \mathrm{e}$ avec $1 - \ln x = 0$
- et $1 - \ln x > 0$.
- Après il faut marquer que $x^2 > 0$,
- on commence le tableau à $-\infty$
- non 0
- et la limite en 0 ?
- on voit d'après le graphe
- avec le tableau de valeurs pour $x = 228$, c'est encore proche de 0
- quand x tend vers $+\infty$, c'est égal à 0 d'après ce qu'on a vu.
- ...0

Nous constatons que les élèves se sont bien engagés dans la résolution de cet exercice après seulement un travail collaboratif d'une heure sur la fonction ln. Tout en manipulant cette nouvelle fonction, ils font valoir leurs compétences dans plusieurs autres domaines.

Et pour conclure

Nous avons mis en œuvre ce dispositif chaque année depuis trois ans sur ce chapitre et nous l'avons expérimenté pour d'autres situations, comme par exemple les fonctions du second degré en classe de seconde. Au sein de ce type d'organisation de

travail en groupe, nous avons constaté que chaque élève était acteur de son propre apprentissage et de celui des autres et que tous les élèves collaboraient dans un but commun. À la fois, il ont pleinement adhéré au challenge et sont parvenus à réaliser la tâche demandée.
Lors de la séance, nous ne sommes pas intervenus, laissant les élèves exprimer en petits groupes leurs interrogations, leurs aides mutuelles avec leurs mots. Durant les séances suivantes, nous avons bien sûr exploité ce que nous avons entendu et observé et fait des mises au point sur certains écrits tout en constatant le grand pas en avant effectué dans ce chapitre.
Nous sommes convaincues que l'activité « bâtir un cours » avec exploitation de documents préparés par l'enseignant et au sein d'un travail collaboratif est à la fois motivante et formatrice.
Enseigner avec le dispositif « Jigsaw Teaching » à des moments choisis de l'année nous parait efficace d'une part du point de vue de l'implication de l'élève et de sa formation et d'autre part du point de vue de la gestion de la progression.
Depuis plusieurs expérimentations d'enseignement avec ce dispositif ont été menées au sein d'un groupe de recherche et feront l'objet de futures publications.

Annexe 1 : partie commune à chaque fiche

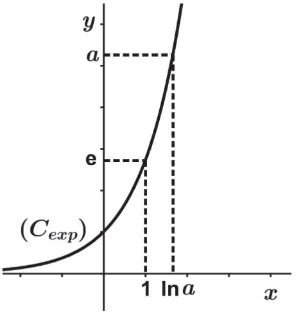
LA FONCTION LOGARITHME NEPERIEN

Définition et courbe de la fonction ln

a) Propriété et définition

Soit *a* un réel strictement positif.
La fonction exponentielle est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$. De plus $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$.

Pour tout a de l'intervalle $\left]\lim\limits_{x\to-\infty} e^x ; \lim\limits_{x\to+\infty} e^x\right[$ c'est-à-dire pour tout $a \in]0;+\infty[$, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $e^x = a$ admet une unique solution sur $\mathbb{R}$ notée $\ln(a)$.



La fonction définie sur $]0;+\infty[$ qui à tout réel $x > 0$ associe $\ln(x)$ est appelée **fonction logarithme népérien** et notée ln.

b) Propriétés immédiates

$1 \underset{\text{exp}}{\overset{\ln}{\rightleftarrows}} 0$; $\ln(1)=0$.

$e \underset{\text{exp}}{\overset{\ln}{\rightleftarrows}} 1$; $\ln(e)=1$.

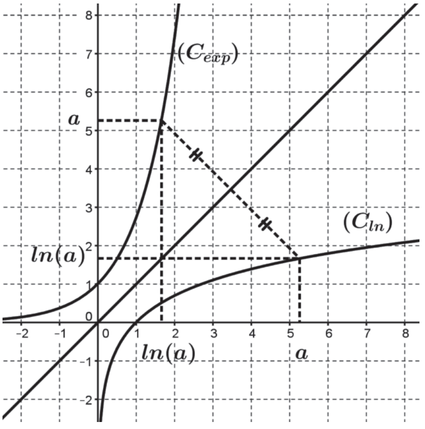
$a > 0$, $a \underset{\exp}{\overset{\ln}{\rightleftarrows}} b$; pour tout réel $a > 0$ et tout réel b, $e^b = a \Leftrightarrow b = \ln(a)$.

Pour tout réel $x > 0$, $e^{\ln(x)} = x$.

Pour tout réel x, $\ln\left(e^x\right) = x$.

Dans un repère orthonormal, les courbes représentatives (C_{exp}) et (C_{ln}) sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$.

Remarque : on dit que les deux fonctions, exp et ln, sont des fonctions réciproques l'une de l'autre.



Annexe 2 : Fiche A

Propriétés algébriques de la fonction ln

P1 : Soient a et b deux réels strictement positifs. On a :

$$\ln(a \times b) = \ln(a) + \ln(b.)$$

P2 : Soient a et b deux réels strictement positifs et n un entier relatif. On a :

$$\ln\left(\frac{1}{b}\right) = -\ln(b)\,;\, \ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)\,;\ln\left(\sqrt{a}\right) = \frac{1}{2}\ln(a)\,;\, \ln\left(a^n\right) = n\ln(a).$$

Cas particuliers :

$$\lim_{h \to 0} \frac{\ln(1+h)}{h} = 1.$$

Consigne : sans papier crayon, comprendre ce document en échangeant entre vous ; préciser comment on peut contrôler toutes les propriétés de la fonction ln à la calculatrice.

Annexe 3 : Fiche B

Propriétés fonctionnelles de la fonction ln

a) La fonction ln est dérivable en 1 et $\ln'(1)=1$

b) $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\ln(1+h)}{h} = 1.$

c) La fonction ln est dérivable sur $]0;+\infty[$ et pour tout $x > 0$. $\ln'(x) = \dfrac{1}{x}$.

Consigne : sans papier crayon, comprendre ce document en échangeant entre vous ; préciser comment on peut contrôler toutes les propriétés de la fonction ln à la calculatrice.

Annexe 4 : Fiche C

Propriétés fonctionnelles de la fonction ln

a) La fonction ln est dérivable sur $]0;+\infty[$ et pour tout $x > 0$. $\ln'(x) = \frac{1}{x}$.

b) La fonction ln est strictement croissante sur $]0;+\infty[$.

c) Tableau de variation de la fonction ln

x	0	1	e	$+\infty$
$\ln'(x) = \frac{1}{x}$	$\Vert$		$+$	
$\ln$	$\Vert$	0	1	$\nearrow$

Propriétés : Pour tout $a > 0$ et $b > 0$

$$a < b \Leftrightarrow \ln(a) < \ln(b)\,;\, a = b \Leftrightarrow \ln(a) = \ln(b).$$

Consigne : sans papier crayon, comprendre ce document en échangeant entre vous ; préciser comment on peut contrôler toutes les propriétés de la fonction ln à la calculatrice.

Annexe 5 : Fiche D

La fonction composée ln o u

$$\begin{tikzcd} x \arrow[r, mapsto, "u"] \arrow[rr, mapsto, bend right, "\ln \circ u"'] & u(x) \arrow[r, mapsto, "\ln"] & \ln(u(x)) \end{tikzcd}$$

La fonction ln o u (notée aussi ln u) est définie pour tout x tel que $u(x) > 0$

Propriété admise

Soit u une fonction strictement positive et dérivable sur un intervalle I.

La fonction ln o u est dérivable sur I et $(\ln u)' = \frac{u'}{u}$.

Consigne : sans papier crayon, comprendre ce document en échangeant entre vous ; préciser comment on peut contrôler toutes les propriétés de la fonction ln à la calculatrice.

Annexe 6 : Fiche E

Fonction ln et limites

Propriétés

P1 : $\lim_{x \to +\infty} \ln(x) = +\infty$; $\lim_{x \to 0} \ln(x) = -\infty$.

P2 : Croissance comparée

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0 \quad ; \quad \lim_{x \to 0} x \ln(x) = 0.$$

Consigne : sans papier crayon, comprendre ce document en échangeant entre vous ; préciser comment on peut contrôler toutes les propriétés de la fonction ln à la calculatrice.