# Histoires sans paroles

## Philippe Langlois

> Nous croyons dans nos raisonnements ne plus faire appel l'intuition ; les philosophes nous diront que c'est là une illusion. La logique toute pure ne nous mènerait qu'à des tautologies.
>
> Henri Poincaré, *La valeur de la science*, 1911, p. 20

## Faut-il vous faire un dessin ?

Cette question, volontiers posée à un interlocuteur qu'on trouve un peu obtus, montre à quel point *voir* et *comprendre* sont inextricablement mêlés. Dans le langage, on emploie souvent le premier pour le second : « je vois ce que vous voulez dire ». Le mot « évident » vient d'ailleurs du latin *videre*, voir.

Quiconque a pesté contre une notice de montage accompagnée d'un croquis trop sommaire sait à quel point parfois la pensée peut être paralysée sans l'image. Et c'est de la nécessité de visualiser en une brève formule ce qui demanderait une longue phrase qu'est née la notation algébrique, rouage essentiel du développement des sciences.

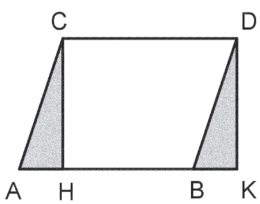
À une époque où les adolescents sont nourris de BD, de mangas et de jeux vidéo, il est paradoxal que les programmes français de mathématiques relèguent de plus en plus à l'arrière-plan tout ce qui fait appel à l'intuition visuelle.

Cet article voudrait montrer que non seulement la géométrie, mais toutes les branches des mathématiques élémentaires peuvent utiliser avec profit figures et schémas, accompagnés ou non d'une brève légende.

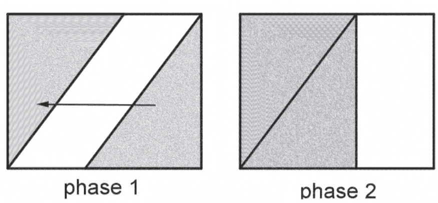
## Géométrie

### *Quelques grands classiques*

#### Aire du parallélogramme

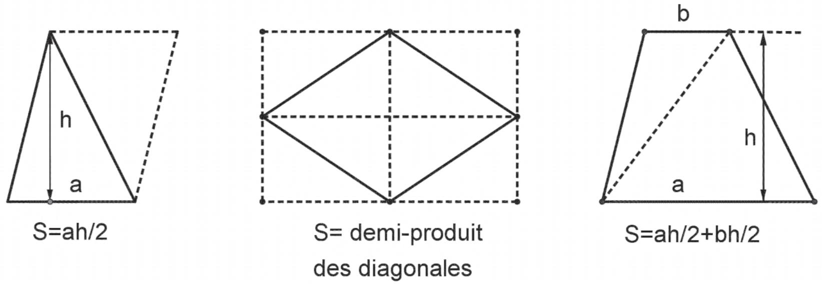



*classique, mais en défaut si H n'est pas entre A et B*

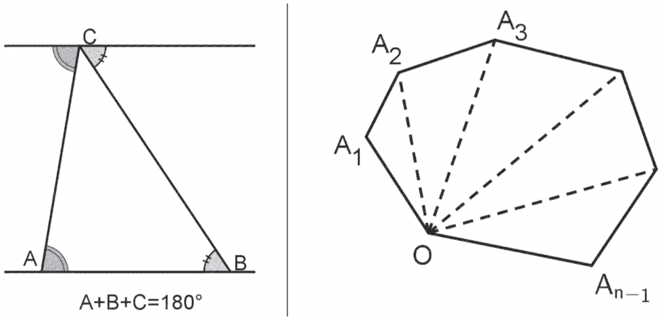



*moins classique, mais valable dans tous les cas*

**Aire du triangle, du losange, du trapèze**

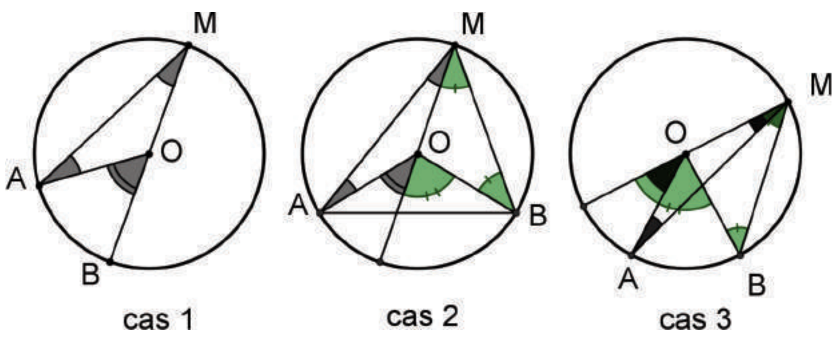



**Somme des angles d'un triangle ou d'un polygone**




La somme des angles du $n$ –gone[1] est celle des $n-2$ triangles, soit : $(n-2)\times 180°$

**L'angle inscrit est la moitié de l'angle au centre :**



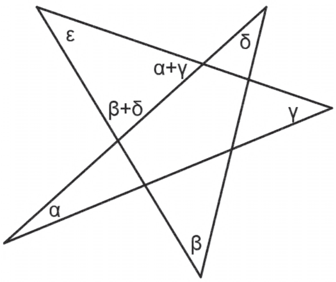
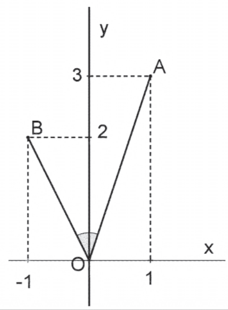
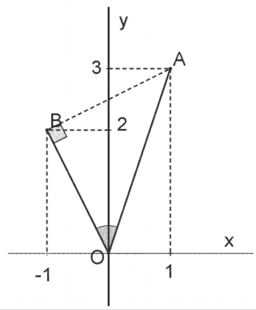

**Remarque**

À ces exemples bien connus il faut adjoindre nombre de démonstrations du théorème de Pythagore dans lesquelles la figure a le rôle essentiel (Voir B.V. n° 515 p 391-392, démonstration de Clairaut et B.V. n° 517 p. 126, démonstration de Garfield).

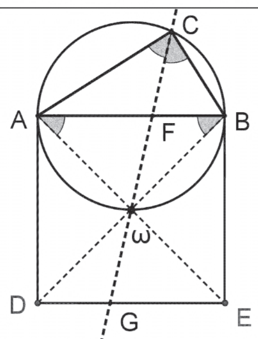
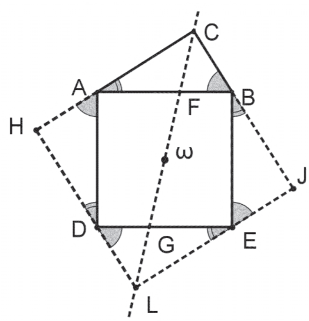
[1] Cette démonstration est en défaut pour un polygone non convexe : la décomposition en $(n-2)$ triangles peut être beaucoup moins évidente. Mais le résultat tient toujours. Voir B.V. n° 516, p. 603.

### *Quelques exercices*

### Calculs d'angles

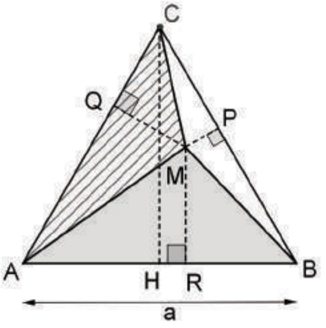
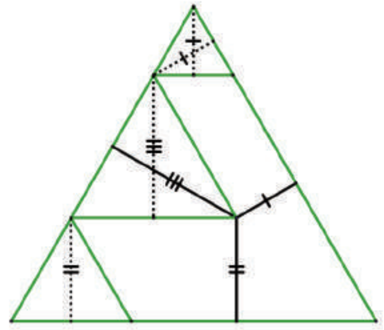
| | | |
|---|---|---|
| *La somme des angles des cinq pointes d'un pentagone étoilé est égale à 180°.* | **Enoncé :** *Calculer* $\widehat{AOB}$ | **Solution :** $AOB$ est rectangle isocèle |
| | *Formulation snob :* Arctan(1/2)+ Arctan(1/3)=π/4 | |
|   |   |   |

### Une propriété du triangle rectangle

| *Énoncé* | *Démonstration 1* | *Démonstration 2* |
|---|---|---|
| *On construit un carré sur l'hypoténuse d'un triangle rectangle, vers l'extérieur du triangle. Établir que la bissectrice de l'angle droit du triangle passe par le centre du carré.* |   |   |

### Théorème de Viviani

*Pour tout point intérieur à un triangle équilatéral, la somme de ses distances aux trois côtés du triangle est égale à la hauteur du triangle.*

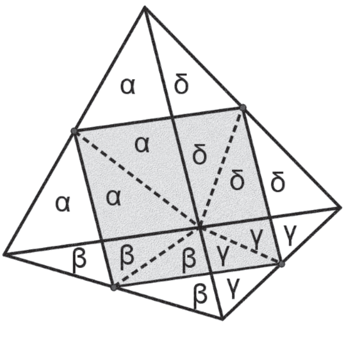
| *Démonstration 1* | *Démonstration 2* |
|---|---|
|  |  |
| Sommation des aires de MAB, MBC et MCA : | |

### Une propriété des quadrilatères convexes

Il est bien connu que les milieux des côtés d'un quadrilatère forment un parallélogramme (théorème de Varignon, conséquence immédiate du « théorème de la droite des milieux »).

En outre, *si le quadrilatère est convexe, l'aire du parallélogramme est la moitié de celle du quadrilatère*.

On utilise de façon répétée le fait qu'une médiane d'un triangle le partage en deux triangles de même aire.

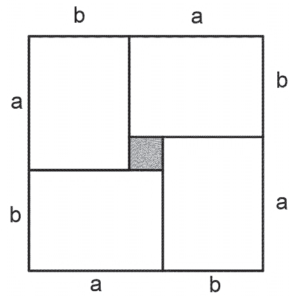



## Calculs algébriques

### *Quelques identités classiques*

Des formules comme $(a + b)(c + d) = ac + ad + bc + bd$ peuvent être aisément justifiées, à la manière du livre II d'Euclide, par la considération d'aires de rectangles. On pourra pour plus de précisions se reporter à la page 139 du B.V. n° 518.

Donnons un exemple : on lit sur la figure ci-contre que si $a \geq b \geq 0$, alors : $(a+b)^2 = 4ab + (a-b)^2$.



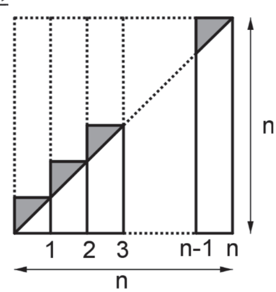

**Remarque 1 :** On en tire $(a+b)^2 \geq 4ab$ soit encore $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$ : la moyenne arithmétique de deux nombres positifs est supérieure à leur moyenne géométrique, l'égalité n'ayant lieu que si les nombres sont égaux.

**Remarque 2 :** On objectera que ces preuves graphiques à la manière des Anciens ne valent que si les lettres $a, b, c, \ldots$ utilisées représentent des nombres positifs. Mais le *principe de prolongement des identités algébriques*[2] justifie l'extension des résultats au cas où ces lettres représentent des réels quelconques.

### *Quelques sommes d'entiers*

**Deux démonstrations de $\mathbf{1+2+3+\cdots+n = \frac{n(n+1)}{2}}$**

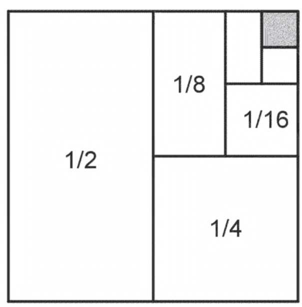
| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | .......... | $n$-1 | $n$ |
| $n$ | $n$-1 | ............ | 2 | 1 |
| $n$+1 | $n$+1 | ............ | $n$+1 | $n$+1 |




**Sommation d'une série géométrique**

$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{2^n} = 1 - \frac{1}{2^n}$, d'où :

$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{2^n} + \cdots = 1$



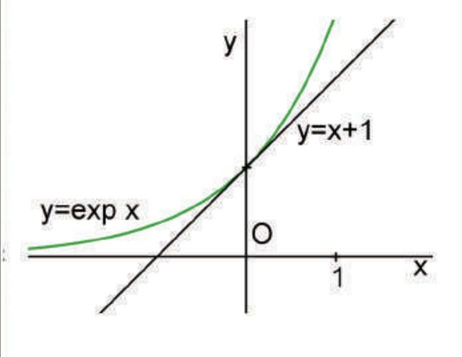

## *Obtention d'inégalités en analyse*

*La recherche d'inégalités dans le domaine réel est un des secteurs où le recours à l'intuition géométrique donne les résultats les plus spectaculaires.*

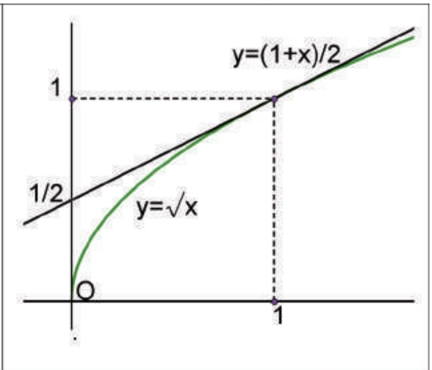
[2] Un cas particulier simple de ce principe est le théorème suivant : *Si un polynôme réel de $n$ indéterminées s'annule dans un ouvert non vide de $\mathbb{R}^n$, alors ce polynôme est formellement nul.*

*Inégalités de convexité*

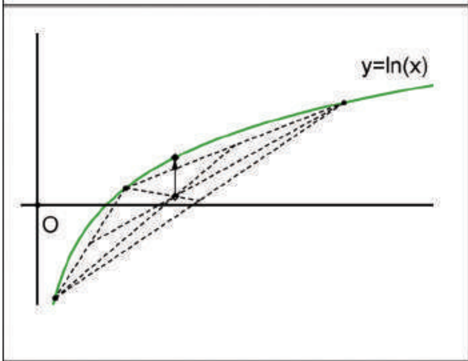
On s'appuie ici sur les résultats suivants :
▪ Si une fonction est convexe (*resp* : concave), sa courbe représentative est au-dessus (*resp* : au-dessous) de ses tangentes.
▪ Si une fonction est convexe (*resp* : concave), l'isobarycentre de points de la courbe est au-dessus d'elle (*resp* : au-dessous).



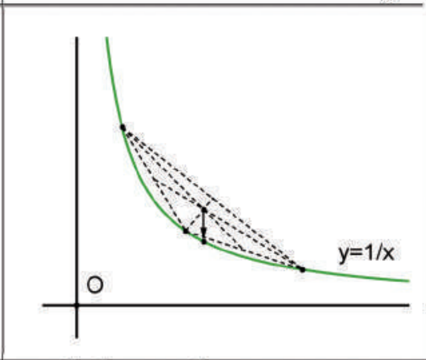

$\forall x, e^x \geq x+1$
ou encore $\forall t > 0, \ln(t) \leq t-1$




$\forall x > 0, \quad \sqrt{x} \leq \frac{x+1}{2}$
ou encore $\quad \forall t \geq -1, \sqrt{1+t} \leq 1+\frac{t}{2}$




$\frac{1}{n}(\ln(x_1)+\cdots+\ln(x_n)) \leq \ln\frac{x_1+\cdots+x_n}{n}$
d'où : $\quad \sqrt[n]{x_1 \dots x_n} \leq \frac{x_1+\cdots+x_n}{n}$




$\frac{1}{n}\left(\frac{1}{x_1}+\cdots+\frac{1}{x_n}\right) \geq \frac{n}{x_1+\cdots+x_n}$
d'où : moy. harmonique $\leq$ moy. arithmétique

Les deux figures ci-dessus sont faites pour $n = 3$.

## *Approximation de $f(1) + f(2) + \cdots + f(n)$ par une intégrale*

**Exemple 1**

On lit sur la figure que

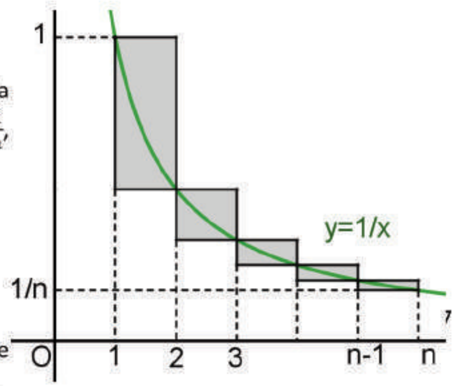
$$1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n-1} > \int_1^n \frac{dx}{x}$$

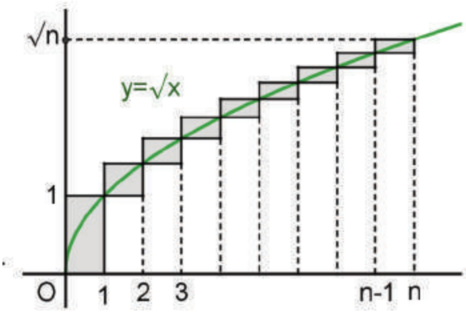
et que la différence est inférieure à la somme des aires des rectangles, soit $1 - \frac{1}{n}$, donc *a fortiori* à 1. D'où :

$$1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n-1} = \ln(n) + \theta(n)$$

avec $0 < \theta(n) < 1$.

On lit aussi sur la figure que la différence $\theta(n) = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n-1} - \int_1^n \frac{dx}{x}$, somme d'aires de triangles curvilignes, croît avec $n$, donc a une limite, la constante d'Euler.




**Exemple 2**

On lit sur la figure que

$\sqrt{1} + \sqrt{2} + \cdots + \sqrt{n} > \int_0^n \sqrt{x}dx$

et que la différence est inférieure à la somme des aires des rectangles, soit $\sqrt{n}$.

D'où

$$\sqrt{1} + \sqrt{2} + \cdots + \sqrt{n} = \frac{2}{3}n\sqrt{n} + \varphi(n)\sqrt{n}$$

avec $0 < \varphi(n) < 1$.

## Conclusion

Je viens de recompter les exemples donnés ci-dessus. J'en ai trouvé vingt-deux, nombre dont il est bien connu qu'il constitue une alerte. Il est donc temps que je m'éclipse.
Cette revue est pourtant loin d'être achevée (je n'ai, par exemple, parlé ni des « patates » ensemblistes ni de l'usage des arbres en probabilités). Mais pourquoi un lecteur courageux (voire plusieurs) n'entreprendrai(en)t-il pas de prendre la suite ?

Pourquoi même notre bulletin n'imiterait-il pas le *Mathematics Magazine de la Mathematical Association of America*, qui présente depuis quelque quarante ans des « Proofs Without Words » … très commodes pour remplir les bas de page ?

## Référence

▪ Roger B. NIELSEN, *Proofs without words*, 1993. Accessible sur Internet.