Les problèmes de l'APMEP

Les propositions de problèmes, solutions ou commentaires, sont à envoyer à

Max HOCHART
13, rue des Garennes
63 800 Cournon d'Auvergne
ou
hochartmax@yahoo.fr

* * * * *

Énoncés des nouveaux problèmes

Problème 519 - 1 (Georges Vidiani, Fontaine Les Dijon)

Le réel a étant irrationnel, étudier la densité dans [0, 1] de la suite $\left(n^a \bmod 1\right)_{n\in\mathbb{N}}$.

Problème 519 - 2 (Michel Lafond, Dijon)

Trois récipients A, B et C ont des capacités respectives de 9, 5 et π litres. Au départ, A contient 9 litres d'eau, B et C sont vides. On peut verser de l'eau d'un récipient X dans un récipient Y aux deux conditions suivantes :
1) on ne gaspille pas d'eau ;
2) après le versement, X est vide ou Y est plein.
Démontrer que pour tout $\varepsilon > 0$, on peut au bout d'un nombre fini de transvasements, obtenir dans un des récipients 1 litre d'eau à ε près.

Problème 519 - 3 (Raymond Heitz, Névez)

Dans le plan, on considère deux points A, B et un cercle (Γ) de centre Ω. La droite (AB) ne coupe pas (Γ). Trouver un point M de (Γ) tel que le trajet AM + MB soit de longueur minimale.

Solutions des problèmes antérieurs

Mea culpa : j'ai oublié de mentionner **Raymond Heitz** (Névez) parmi les lecteurs m'ayant envoyé une réponse pour le problème 506.1. Je le prie de bien vouloir m'excuser et j'en profite pour le remercier pour son courrier régulier.

Problème 507-1 (Michel Lafond, Dijon)

On dispose de n quilles ($n > 2$) alignées tous les 15 cm. Un joueur adroit a une boule de 20 cm de diamètre. Il lance sa boule au hasard, tant que c'est possible, entre deux quilles consécutives encore debout et les renverse. Il renversera donc au plus $\dfrac{n}{2}$

paires de quilles. Soit X_n le nombre de paires de quilles renversées et $E_n = E(X_n)$ son espérance mathématique. Démontrer que lorsque n tend vers l'infini, la quantité $\frac{E_n}{n}$ admet une limite finie

$$L = 0{,}432332358381693654053000252513\ldots ?$$

Est-ce un hasard si

$$\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{5+\cfrac{1}{7+\cfrac{1}{9+\cfrac{1}{\ddots+\cfrac{1}{25+\cfrac{1}{27}}}}}}}} = 0;\,432332358381693654053000252513\ldots ?$$

Solutions de Michel Lafond (Dijon) et Georges Vidiani (Fontaine les Dijon), Pierre Renfer (Saint Georges d'Orques)

Voici l'approche proposée par Pierre Renfer. Le joueur vise d'abord l'une des $n-1$ paires de quilles consécutives avec la probabilité $\frac{1}{n-1}$ pour chacune. S'il choisit la k-ième paire en partant de la gauche, il reste une série de $k-1$ quilles consécutives à gauche et une série de $n-k-1$ quilles consécutives à droite. Donc

$$E_n = E(X_n) = \frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n-1}\left(1+E_{k-1}+E_{n-k-1}\right)$$

en posant $E_0 = E_1 = 0$.
Donc

$$(n-1)E_n = n-1+2\sum_{k=0}^{n-2}E_k$$

soit, au rang suivant,

$$nE_{n+1} = n+2\sum_{k=0}^{n-1}E_k.$$

En faisant la différence de ces deux relations, on obtient, pour n > 1,

$$nE_{n+1}-(n-1)E_n-2E_{n-1}=1. \qquad (1)$$

Pour cette relation de récurrence linéaire d'ordre 2 avec second membre, on a facilement une solution particulière : la suite constante égale à -1, ce qui amène à poser, pour $n \in \mathbb{N}$,

$$\mathrm{A}_n = 1 + \mathrm{E}_n.$$

Cette suite vérifie l'équation homogène associée :

$$n\,\mathrm{A}_{n+1} - (n-1)\,\mathrm{A}_n - 2\,\mathrm{A}_{n-1} = 0. \tag{2}$$

L'ensemble Σ des suites réelles vérifiant cette relation de récurrence linéaire d'ordre 2 à coefficients non constants est un espace vectoriel réel de dimension 2 (puisqu'une telle suite est entièrement déterminée par ses deux premiers termes). On cherche donc une base de cet espace vectoriel Σ. La suite $\left(\mathrm{U}_n = n+2\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est déjà dans cet espace et l'on cherche une deuxième suite $\left(\mathrm{V}_n\right)_{n\in\mathbb{N}} \in \Sigma$, par exemple avec la condition initiale ($\mathrm{V}_0 = 0$, $\mathrm{V}_1 = 1$). Pour trouver $\left(\mathrm{V}_n\right)_{n\in\mathbb{N}} \in \Sigma$, on introduit la série entière suivante (série génératrice « décalée ») :

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{V}_{n+1}\, x^n.$$

Montrons que f a un rayon de convergence non nul, par exemple en montrant que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\left|\mathrm{V}_n\right| \leq n$. C'est clair pour $n = 0$ et $n = 1$ et si l'on suppose cette majoration établie aux rangs $n - 1$ et n, la relation (2) donne

$$\left|\mathrm{V}_{n+1}\right| \leq \frac{n-1}{n}\left|\mathrm{V}_n\right| + \frac{2}{n}\left|\mathrm{V}_{n-1}\right| \leq \frac{n-1}{n} \times n + \frac{2}{n} \times n = n+1$$

comme souhaité. La fonction f est donc définie au moins sur $]-1, 1[$ et l'on peut dériver terme à terme :

$$f'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} n\,\mathrm{V}_{n+1}\, x^{n-1}.$$

En multipliant par x^{n-1} la relation (2) appliquée à V_n, on obtient, pour $n > 1$,

$$n\,\mathrm{V}_{n+1}\, x^{n-1} - (n-1)\,\mathrm{V}_n\, x^{n-2} \times x - 2\,\mathrm{V}_{n-1}\, x^{n-2} \times x = 0.$$

En sommant pour $n \in \mathbb{N}^*$, on a donc

$$f'(x) - x\,f'(x) - 2x\,f(x) = 0$$

soit encore, sur $]-1, 1[$,

$$f'(x) - \frac{2x}{1-x} f(x) = 0.$$

Les solutions sur $]-1, 1[$ sont de la forme

$$f(x) = f(0)\exp\left(\int \frac{2x}{1-x}\right) = f(0)\exp\left(\int\left(-2 + \frac{2}{1-x}\right)\right) = f(0)\exp\left(-2x + \ln(1-x)\right).$$

Puisque $f(0) = \mathrm{V}_1 = 1$,

$$f(x)=\frac{e^{-2x}}{(1-x)^2}.$$

On développe ces deux fonctions en série entière :

$$f(x)=\left(\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-2)^k}{k!}x^k\right)\left(\sum_{k=0}^{+\infty}(k+1)x^k\right).$$

Par produit de Cauchy,

$$f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\mathrm{V}_{n+1}\,x^k$$

avec

$$\mathrm{V}_{n+1}=\sum_{k=0}^{n}\frac{(-2)^k}{k!}(n-k+1)$$

soit

$$\mathrm{V}_{n+1}=(n+1)\sum_{k=0}^{n}\frac{(-2)^k}{k!}+2\sum_{k=0}^{n}\frac{(-2)^{k-1}}{(k-1)!}$$

soit enfin

$$\frac{\mathrm{V}_{n+1}}{n+1}=\sum_{k=0}^{n}\frac{(-2)^k}{k!}+\frac{2}{n+1}\sum_{k=0}^{n}\frac{(-2)^k}{(k)!}\xrightarrow[n\to+\infty]{}\exp(-2).$$

Revenons à la suite $(\mathrm{A}_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Elle est combinaison linéaire des suites $(\mathrm{U}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\mathrm{V}_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Il existe donc $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ tels que, pour tout $n\in\mathbb{N}$,

$$\mathrm{A}_n=\alpha\mathrm{U}_n+\beta\mathrm{V}_n.$$

Les conditions initiales donnent

$$\begin{pmatrix}\mathrm{A}_0\\ \mathrm{A}_1\end{pmatrix}=\alpha\begin{pmatrix}\mathrm{U}_0\\ \mathrm{U}_1\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}\mathrm{V}_0\\ \mathrm{V}_1\end{pmatrix}$$

soit

$$\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}=\alpha\begin{pmatrix}2\\ 3\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}.$$

Donc

$$\alpha=\frac{1}{2}\text{ et }\beta=-\frac{1}{2}$$

Ainsi,

$$\mathrm{E}_n=\mathrm{A}_n-1=\frac{1}{2}\mathrm{U}_n-\frac{1}{2}\mathrm{V}_n-1$$

et donc

$$\frac{E_n}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1}{2}-\frac{1}{2}e^{-2}=\frac{e-e^{-1}}{2e}=\frac{\operatorname{sh}(1)}{e}=L.$$

Un logiciel de calcul formel donne effectivement

$$L = 0{,}432332358381693654053000252513$$

Pour finir, en partant de la fraction continue de th(t), donnée par Johan Lambert

$$\operatorname{th}(t)=\cfrac{t}{1+\cfrac{t^2}{3+\cfrac{t^2}{5+\cfrac{t^2}{7+\cfrac{t^2}{9+\cfrac{t^2}{11+\cdots}}}}}}$$

on a

$$\operatorname{th}(1)=\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{5+\cfrac{1}{7+\cdots}}}}$$

Posons

$$M=\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{5+\cfrac{1}{7+\cdots}}}}$$

et

$$a=\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{5+\cfrac{1}{7+\cdots}}}$$

Alors

$$\operatorname{th}(1)=\frac{1}{1+a}$$

et

$$M=\frac{1}{2+a}$$

Donc

$$\frac{1}{\mathrm{M}}=2+a=1+\frac{1}{\mathrm{th}(1)}=\frac{\mathrm{e}+\mathrm{e}^{-1}}{\mathrm{e}-\mathrm{e}^{-1}}+1=\frac{2\,\mathrm{e}}{\mathrm{e}-\mathrm{e}^{-1}}=\frac{\mathrm{e}}{\mathrm{sh}(1)}=\frac{1}{\mathrm{L}}$$

ce qui explique pourquoi L = M.

Problème 507-2 (Franck Gautier, Aubière)

Soit P un polynôme à coefficients réels de degré $n \in \mathbb{N}$. Pour $k \in \mathbb{N}$, on note P(k) la dérivée k-ième de P. On suppose que pour tout $i \in [1, n-1]$, il existe $a_i \in \mathbb{R}$ tel que

$$\mathrm{P}^{(i)}(a_i)=\mathrm{P}(a_i).$$

Trouver le polynôme P.

Solutions de Pierre Renfer (Saint Georges d'Orques)

Tous les polynômes de degré impair possèdent la propriété. En effet, si P est de degré n impair, tous les polynômes $\mathrm{P}(\mathrm{X}) - \mathrm{P}^{(i)}(\mathrm{X})$ pour $1 \leq i \leq n-1$ ont le même degré impair et admettent au moins une racine réellle.
Supposons maintenant que le degré n de P est pair. Par linéarité de la dérivation, si le polynôme P possède la propriété, il en est de même du polynôme λP pour tout $\lambda \neq 0$ et l'on peut donc supposer P unitaire.
Posons

$$\mathrm{P}(\mathrm{X})=\mathrm{X}^n+a_{n-1}\,\mathrm{X}^{n-1}+\cdots+a_1\,\mathrm{X}+a_0$$

et

$$\mathrm{R}(\mathrm{X})=\mathrm{P}(\mathrm{X})-a_0=\mathrm{X}^n+a_{n-1}\,\mathrm{X}^{n-1}+\cdots+a_1\,\mathrm{X}.$$

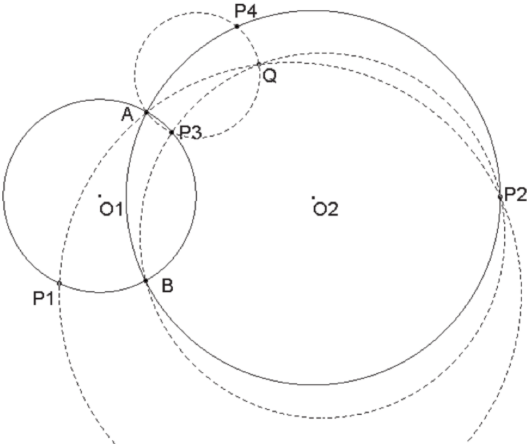
Chaque polynôme $\mathrm{R}(\mathrm{X}) - \mathrm{R}^{(i)}(\mathrm{X})$ pour $1 \leq i \leq n-1$ est de degré pair et unitaire donc admet un minimum sur $\mathbb{R}$, noté m_i. Posons

$$\mathrm{M}=\max_{1\leq i\leq n-1}(m_i).$$

Le polynôme $\mathrm{P}(\mathrm{X}) - \mathrm{P}^{(i)}(\mathrm{X})$ atteint le minimum $a_0 + m_i$. Il s'annule si et seulement si $a_0 \leq m_i$. Donc le polynôme P vérifie la propriété si et seulement si $a_0 \leq \mathrm{M}$.

Problème 507-2 (Jean-Pierre Friedelmeyer, Strasbourg)

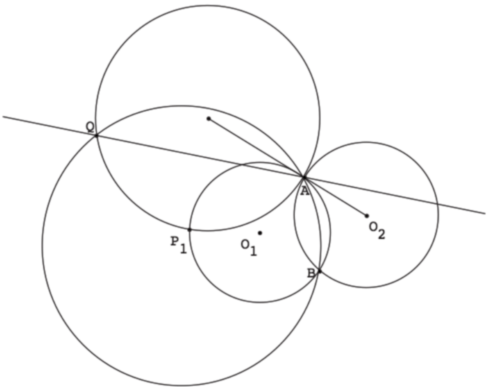
Soit, dans un plan, deux cercles C_1 et C_2 de centre O_1 et O_2. Les cercles C_1 et C_2 sont sécants en A et B. Soit Q un point du plan, non situé sur l'un des deux cercles. À un point P_1 du cercle C_1, on associe le point P_2 du cercle C_2, intersection autre que A avec le cercle passant par les points P_1, A et Q (si ce cercle est tangent en A, on prendra $\mathrm{P}_2 = \mathrm{A}$). Au point P_2, on associe le point P_3 du cercle C_1 intersection autre que B avec le cercle passant par P_2, B et Q (si le cercle est tangent en B, on prendra $\mathrm{P}_3 = \mathrm{B}$). Puis l'on recommence avec P_3 auquel on associe le point P_4 de C_2, intersection autre que A avec le cercle passant par A, P_3 et Q, etc. (Voir la figure ci-dessous).



1. Démontrer que si les cercles C_1 et C_2 sont orthogonaux, la suite des points $P_1P_2P_3$… se referme au plus tard en P_5 (c'est-à-dire que $P_5 = P_1$).
2. Dans le cas général, démontrer que la suite de points $P_1P_2P_3$… se referme sur P_1, (c'est-à-dire qu'il existe un entier $n \in \mathbb{N}$ tel que $P_n = P_1$) si et seulement si l'angle $\widehat{O_1AO_2}$ est commensurable à π.

Solutions de Michel Bataille (Rouen), Maurice Bauval (Versailles), Jean-Claude Carréga (Lyon), Georges Lion (Wallis), Pierre Renfer (Saint Georges d'Orques) et Jean Pierre Friedelmeyer (Strasbourg).

L'auteur de cette question, **Jean Pierre Friedelmeyer**, signale qu'il s'est inspiré d'un court article de la revue suisse *Elemente der Mathematik*, volume 5, cahier 3 (1950). **Michel Bataille** et **Jean-Claude Carréga** signalent que les cas particuliers envisagés dans l'énoncé (considérer la tangente lorsque l'un des P_i vaut A ou B) sont à exclure. **Michel Bataille** donne un exemple illustré : supposons par exemple que le cercle passant par P_1, A, Q soit tangent en A à C_2. On devrait prendre alors $P_2 = A$. Mais le cercle passant par B, Q, P_2 coupe C_1 en B et en A si bien que $P_3 = A$. Le cercle passant par A, Q, P_3 n'est donc pas défini.



Un problème analogue survient lorsque (P_2BQ) est tangent à C_1 en B. Dans la suite, on écarte donc cette configuration et l'on suppose donc les P_i distincts de A et B.

Toutes les solutions proposées passent par une inversion (de centre A ou B selon les lecteurs), sauf celle de **Jean-Claude Carréga**. Pour l'originalité, suivons donc la démonstration de ce dernier.
Dans le cercle passant par A, Q, P_1, nous avons en angles de droites orientées,

$$\widehat{\left((P_1A),(P_1Q)\right)}=\widehat{\left((P_2A),(P_2Q)\right)}, \tag{3}$$

Dans le cercle passant par B, Q, P_2, nous avons

$$\widehat{\left((P_3B),(P_3Q)\right)}=\widehat{\left((P_2B),(P_2Q)\right)}=\widehat{\left((P_2B),(P_2A)\right)}+\widehat{\left((P_2A),(P_2Q)\right)},$$

Donc, d'après (3),

$$\widehat{\left((P_3B),(P_3Q)\right)}=\widehat{\left((P_2B),(P_2A)\right)}+\widehat{\left((P_2A),(P_2Q)\right)}. \tag{4}$$

Et

$$\widehat{\left((P_3A),(P_3Q)\right)}=\widehat{\left((P_3A),(P_3B)\right)}+\widehat{\left((P_3B),(P_3Q)\right)}.$$

Donc, d'après (4),

$$\widehat{\left((P_3A),(P_3Q)\right)}=\widehat{\left((P_3A),(P_3B)\right)}+\widehat{\left((P_2B),(P_2A)\right)}+\widehat{\left((P_1A),(P_1Q)\right)}. \tag{5}$$

D'autre part, dans le cercle C_1,

$$\widehat{\left((P_3A),(P_3B)\right)}=\widehat{\left((O_1A),(O_1O_2)\right)}$$

et dans le cercle C_2,

$$\widehat{\left((P_2B),(P_2A)\right)}=\widehat{\left((O_2O_1),(O_2A)\right)}$$

Ainsi, (5) s'écrit alors

$$\widehat{\left((P_3A),(P_3Q)\right)}=\widehat{\left((O_1A),(O_1O_2)\right)}+\widehat{\left((O_2O_1),(O_2A)\right)}+\widehat{\left((P_1A),(P_1Q)\right)}.$$

soit

$$\widehat{\left((P_3A),(P_3Q)\right)}=\widehat{\left((P_1A),(P_1Q)\right)}+\widehat{\left((AO_1),(AO_2)\right)}. \tag{6}$$

Venons-en à la question 1. On passe de P_3 à P_5 comme on passe de P_1 à P_3. Donc, d'après (6),

$$\widehat{\left((P_5A),(P_5Q)\right)}=\widehat{\left((P_3A),(P_3Q)\right)}+\widehat{\left((AO_1),(AO_2)\right)}=\widehat{\left((P_1A),(P_1Q)\right)}+2\widehat{\left((AO_1),(AO_2)\right)}.$$

Si les cercles C_1 et C_2 sont orthogonaux, les droites (AO_1) et (AO_2) sont perpendiculaires et on a

$$2\widehat{\left((AO_1),(AO_2)\right)}=0,$$

angle nul du groupe des angles orientés de droites. Donc

$$\widehat{\left((P_5A),(P_5Q)\right)} = \widehat{\left((P_1A),(P_1Q)\right)}.$$

Cela signifie que les points P_1 et P_5 sont à l'intersection du cercle C_1 et d'un cercle passant par A et Q. Ces deux cercles se coupent en A en un autre point H, donc $P_1 = P_5 = H$ car on a supposé P_1 et P5 différents de A.
Passons à la question 2. Par itération à partir de (6), on obtient pour tout $n > 1$,

$$\widehat{\left((P_{2n+1}A),(P_{2n+1}Q)\right)} = \widehat{\left((P_1A),(P_1Q)\right)} + n\widehat{\left((AO_1),(AO_2)\right)}.$$

Comme dans le raisonnement fait en question 1 pour P_1 et P_5, il existe un entier $n \in \mathbb{N}$ tel que $P_{2n+1} = P_1$ si et seulement si

$$\widehat{\left((P_{2n+1}A),(P_{2n+1}Q)\right)} = \widehat{\left((P_1A),(P_1Q)\right)}$$

soit encore si et seulement il existe un entier $n \in \mathbb{N}^*$ tel que

$$n\widehat{\left((AO_1),(AO_2)\right)} = 0$$

soit encore si et seulement si il existe $n \in \mathbb{N}$ et $k \in \mathbb{N}$ tels que

$$n\widehat{O_1AO_2} = k\pi,$$

ce qui signifie exactement que l'angle $\widehat{O_1AO_2}$ est commensurable à π.