Vos exercices préférés pour la classe

Lors des journées nationales de Laon, des lecteurs du BV sont venus rencontrer les membres de la commission pour échanger et faire des propositions. Parmi celles-ci, nous avons retenu l'idée d'une rubrique d'échanges de nos « exercices préférés ». Donc si vous avez quelques exercices que vous appréciez particulièrement pour leur richesse et leur efficacité en classe, et si vous avez envie de lles partager, n'hésitez pas à alimenter cette rubrique : envoyez-nous les énoncés accompagnés de quelques commentaires. Merci de faire parvenir vos petits trésors à Daniel VAGOST (daniel.vagost@gmail.com)

Pour initier cette rubrique, voici deux exercices proposés par Vincent DAGEVILLE.

Énoncé 1 (niveau troisième/seconde)

Un ingénieur a conçu un pont capable de supporter une charge maximale (après calcul !) de $1000\left(99-70\sqrt{2}\right)$ tonnes. Il demande à un stagiaire de faire une pancarte pour avertir les usagers de la charge maximale autorisée.

1. Donner une valeur approchée à 0,001 près de $\sqrt{2}$.

Le stagiaire réalise la pancarte en prenant 1,414 comme valeur approchée de $\sqrt{2}$. Qu'indique sa pancarte ? Un camion de 8 tonnes peut-il s'engager sur le pont en respectant la pancarte ?

2. Un camion de 12 tonnes s'est engagé sur le pont. Le pont s'est écroulé à son passage…

Au procès, l'ingénieur affirme qu'il avait interdit aux camions de plus de 5 tonnes de franchir le pont. Qui de l'ingénieur ou du stagiaire a raison ? (justifiez précisément votre réponse)

Réponses : le calcul de $1000\left(99-70\sqrt{2}\right)$ avec 1,414 comme valeur pour $\sqrt{2}$ donne 20.

Le même calcul avec $\sqrt{2}$ donné par la calculatrice (qui n'est pas une valeur exacte mais seulement une meilleure approximation de) donne 5,05…

C'est donc l'ingénieur qui a raison, même si $20 \approx 5{,}05\ldots$

Commentaires : je donne cet exercice en début d'année en devoir maison à mes élèves de Seconde. Par la suite, quand un élève remplace (sans raison) $\sqrt{a}$ par une valeur approchée, je lui rappelle que « attention ! Le pont s'écroule… ».

La différence entre les deux valeurs calculées vient de ce que 99/70 est une très bonne approximation de $\sqrt{2}$.

On peut refaire le même genre d'énoncé avec d'autres racines en cherchant une approximation de $\sqrt{a}$ par une fraction : ainsi $1000\left(362\sqrt{3}-627\right) \approx 2{,}39$ et

$1000\left(362\times 1{,}732-627\right)=-16.\cdot$

Moralité : dans « à peu près" » la question à se poser est « peu, c'est combien ? ».

Énoncé 2 (tous niveaux à partir de la seconde). Cet énoncé est maintenant assez connu. C'est une situation due au mathématicien Matiassevitch.

Soit (P) la parabole d'équation $y = x^2$.
Soient A(a ; a^2) ; B($-b$; b^2) les points de la parabole où a et b sont deux entiers ($a \geq 2$, $b \geq 2$).
On trace tous les segments [AB] possibles. Les segments coupent l'axe des ordonnées aux points M(0 ; n) où n est un entier. Quelles sont les valeurs de n qui ne sont pas atteintes ?
Lorsqu'un tel segment [AB] est parallèle à (Ox) , que dire de n, s'il coupe (Oy) au point M(0 ; n) ?

Réponse : la droite (AB) coupe (Oy) au point M(0 ; ab) donc n ne peut être un nombre premier : seuls les nombres premiers sur (Oy) ne sont pas atteints et tous les autres le sont. Il s'agit donc d'une alternative géométrique au crible d'Ératostène…
Si un segment parallèle à (Ox) coupe (Oy) en M(0 ; n), c'est que $a = b$ donc que n est un carré parfait.

Commentaires : pour ma part, je donne la figure (la parabole et « plein » de segments [AB]) et je demande aux élèves d'observer, de conjecturer et de démontrer. Seules connaissances nécessaires : déterminer l'équation de (AB), factoriser $a^2 - b^2$… Et savoir ce qu'est un nombre premier.