L'œuuvre scientifique et en particulier mathématique de Fourier

Daniel Reisz

En hommage à Daniel Reisz nous avons publié, dans le bulletin précédent, la première partie d'une de ses conférences autour de Joseph Fourier. Cette première partie retraçait la vie politique agitée et l'émergence de ce grand savant. La deuxième partie publiée ici retrace l'œuvre scientifique et en particulier l'œuvre mathématique de Fourier.

L'œuvre de Fourier s'organise en cercles concentriques autour du noyau central et fondamental qu'est la *Théorie analytique de la chaleur*. C'est cet ouvrage et uniquement cet ouvrage qui fait de Fourier l'un des très grands mathématiciens de l'humanité et dont la postérité scientifique reste encore de toute première importance. Le reste de son œuvre, pour intéressante qu'elle soit, en ferait simplement un savant parmi bien d'autres.

Un premier cercle, que j'ai déjà évoqué au fil de sa biographie, est constitué par ses textes non scientifiques, au sens restrictif du terme : éloges, discours, rapports, Introduction à la Description de l'Egypte, … Ces textes sont toujours écrits dans un style élégant, précis, clair. Et Fourier aimait écrire ce genre de textes, comme il aimait prendre la parole en public.

Un second cercle contient ses travaux scientifiques, pour l'essentiel mathématiques, non liés au problème de la chaleur. Ces travaux, non fondamentaux, méritent quand même notre attention et ont trop souvent été occultés par son travail sur la propagation de la chaleur.

- Il y a là des travaux qui tournent autour d'une question qui l'a préoccupé durant toute sa vie : la résolution des équations algébriques où il met en avant des idées nouvelles reprises par ses successeurs. On y trouve aussi un algorithme complètement ignoré de ses contemporains, qui correspond à ce que nos informaticiens appellent la méthode du simplexe et qui est à la base de la programmation linéaire.
- Il y a là une multitude d'articles et de communication sur des questions mathématiques diverses, y compris sur les géométries non-euclidiennes et plus généralement sur les bases de la géométrie.
- Il y a là ses travaux statistiques. Au plan des textes, il s'agit plus de textes didactiques que de véritables travaux de fond, mais il a quand même clarifié des problèmes liés à l'étude de la dispersion d'une population ou d'un ensemble de mesures expérimentales autour de leur moyenne.
- Il y a là ses travaux en liaison avec la physique. L'invention d'un marégraphe,

l'étude, avec Prony et Lagrange des bases de la statique, son travail de jeunesse sur le principe des vitesses virtuelles, des travaux en thermoélectricité avec Oersted.

Un troisième cercle est constitué par tout ce qui touche à la propagation de la chaleur : les textes successifs qui le mènent à la *Théorie analytique de la chaleur*, textes que nous évoquerons un peu plus loin, et puis il y a les textes qui tournent autour de cette question de chaleur et qui vont dans toutes les directions : chaleur animale, refroidissement du globe terrestre, chauffage et aération des immeubles d'habitation, …

Et puis il y a la *Théorie analytique de la Chaleur*, fondement de sa postérité, de son actualité, de sa situation de mathématicien essentiel dans l'histoire des mathématiques. Comme son titre l'indique il s'agit d'une problématique de nature essentiellement physique : comment la chaleur se propage-t-elle à travers un corps ? Comment se réalisent les échanges de chaleur entre deux corps ? Entre un corps et l'air ambiant ? Entre un corps et le liquide dans lequel il est plongé ? L'inventivité mathématique dont il fait preuve à ce sujet est tout à fait extraordinaire et il met en place les fondements de tout un secteur des mathématiques, l'analyse de Fourier, encore fécond de nos jours tant en mathématiques pures qu'en mathématiques appliquées à divers secteurs. L'imagerie médicale moderne, la numérisation de nos vieux 78 tours en CD nettoyés de tout bruit de fond sont des applications de l'analyse de Fourier et donc lointaines héritières des travaux sur la propagation de la chaleur.

Ses travaux sur la propagation de la chaleur débutent en 1805 au retour d'Egypte, alors qu'il est préfet à Grenoble. La légende veut que ce soit parce qu'il a beaucoup souffert de la chaleur en Egypte qu'il se lance dans cette étude. Remarquons que la notion même de chaleur est purement conceptuelle, contrairement à la température qui se mesure et elle se prête donc à toute sorte de considérations plus ou moins philosophiques ou scientifiques. Le 21 décembre 1807 il lit à l'Académie des Sciences un mémoire intitulé *Théorie de la Propagation de la Chaleur dans les Solides*. Mais Lagrange et Laplace firent de nombreuses objections et ce mémoire ne fut jamais publié ni par l'Académie, ni par Fourier, ni ultérieurement par Gaston Darboux dans les œuvres complètes. Pourtant on est maintenant certain que Darboux a consulté ce manuscrit à l'École des Ponts et Chaussées et il en dit grand bien. Ce n'est qu'en 1972 que l'historien des sciences anglais Grattan-Guiness, grand spécialiste de Fourier, publiera ce premier texte sur la propagation de la chaleur. Pendant les années 1808 et 1809, Fourier publiera de nombreuses mises au point qui essayent de répondre aux critiques de Lagrange et Laplace. Il trouve dans ce travail l'aide de Poisson. En 1811, il soumet à nouveau son mémoire, nettement amélioré, à l'Académie des Sciences. Lagrange souligne alors « *la nouveauté du sujet et son importance* » mais reste encore réservé « *du côté de la rigueur* ». Et pourtant on peut sans doute dire que c'est partiellement à cause de cette indifférence envers la rigueur, accompagnée d'une très grande sûreté de jugement, que Fourier a été capable de franchir certaines étapes conceptuelles, ce qui aurait été proprement impossible pour des savants ayant un sens de la rigueur plus aigu. Dans ce sens Fourier est dans le droit fil des mathématiciens du XVIIIème siècle tel Euler, ou les Bernoulli. Sa perspicacité, conduisant à la réponse correcte à travers de flagrantes insuffisances du côté de la rigueur, ne pouvait satisfaire le fin analyste qu’était Lagrange. Il faut d’autant plus souligner l’intelligence de ce dernier, ainsi que celle de Legendre et de Laplace, qui, en lui accordant, au-delà de ces insuffisances, le Grand Prix de l’Académie des Sciences, ont compris en quoi le travail de Fourier était fondamentalement novateur. Finalement c’est en 1822 que Fourier publiera sa *Théorie analytique de la chaleur* dont Darboux dira qu’il s’agit « *d’un bel ouvrage que l’on peut placer sans injustice à coté des écrits scientifiques les plus parfaits de tous les temps* ». C’est en tout cas l’exposé le plus achevé de Fourier sur cette question.

Nous allons à présent essayer de faire comprendre à quelles questions mathématiques répond le travail de Fourier, travail qui, rappelons-le, paraît sous un titre de physique, *Théorie analytique de la chaleur*. Mais cela était dans le droit fil des conceptions de Fourier : faire subir à une question de physique un traitement purement mathématique. Une question de physique peut s’aborder de deux façons : une étude expérimentale qui permettra de conjecturer des lois ou une modélisation mathématique qui produira les réponses de façon purement calculatoire. La démarche de Fourier s’inscrit clairement dans la seconde perspective, mais dans tous ses textes il signale qu’il s’est appuyé en amont ou en aval de ses calculs sur des études expérimentales. Cela mérite d’être signalé, mais ne s’agit-il pas plutôt de précautions de style que d’une véritable attention au côté expérimental de la physique ? En tout cas c’est à travers l’inventivité mathématique dont il fait preuve que Fourier est beaucoup plus perçu comme un mathématicien de première grandeur que comme un physicien. Remarquons d’ailleurs à ce propos que ses interlocuteurs scientifiques sont presque exclusivement des mathématiciens. C’est cette démarche qui permet de qualifier Fourier de véritable créateur d’un nouveau domaine qui se situe aux confins de la physique et des mathématiques, la *physique mathématique*. À travers ce travail, Fourier va se heurter à des difficultés mathématiques qu’il surmontera en allant de l’avant, sans trop s’occuper de la rigueur de sa démarche, mais en ébranlant des questions tout à fait fondamentales, liées en particulier au concept de fonction. L’école allemande d’analyse du XIXème siècle (l’analyse est le domaine des mathématiques qui étudie précisément les fonctions) saura ensuite approfondir et nettoyer de ses scories le travail de Fourier, jusqu’à lui donner un statut parfaitement rigoureux.

Un travail aussi nouveau tant au plan de la méthode qu’à celui de la technologie mathématique n’a pas été accepté sans réticence par la communauté scientifique. Il est donc intéressant de revenir sur la genèse historique de cette affaire. L’idée d’approcher une fonction qu’on ne sait pas écrire comme combinaison de fonctions dûment répertoriées et connues, par une somme de fonctions trigonométriques judicieusement calibrées n’était pas nouvelle. En effet, dès 1755, à propos de l’équation des cordes vibrantes, établie en 1747 par D’Alembert, Daniel Bernoulli propose une solution de ce type. Cette solution donne alors naissance à un rude débat entre D'Alembert, Euler et Bernoulli et, sans rentrer dans les détails de ce débat, il faut signaler que ces mathématiciens comprirent déjà plus ou moins qu'ils ébranlaient la conception même qu'ils avaient à cette époque de la notion de fonction. La contribution de Fourier se situe là, fondatrice encore peu rigoureuse d'une notion abstraite de fonction dont le mathématicien allemand Lejeune-Dirichlet, dans un mémoire célèbre, paru en 1829, sous le titre *Sur les séries trigonométriques qui servent à représenter une fonction arbitraire entre des limites données*, posera les fondements, avec toute la rigueur propre au XIXème siècle.

Éclairons un peu ces questions, sans dépasser le niveau mathématique d'un lycéen d'aujourd'hui. Mes collègues mathématiciens me pardonneront les inévitables simplifications, parfois un peu caricaturales, que je suis ainsi obligé de faire. Un exposé précis de ces affaires nécessite un niveau mathématique de BAC+2. La vision simpliste d'une fonction dans les mathématiques élémentaires du lycée et aussi d'une certaine manière chez les mathématiciens du XVIIIème siècle, consiste à associer à la valeur x de la variable une valeur y de la fonction par l'intermédiaire d'une *formule*. Il en est ainsi des fonctions définies par : $y = 2x - 5$ ou $y = x^2 - 2x - 7$. Remarquons que ces deux exemples ne font intervenir que les quatre opérations arithmétiques : ce sont des fonctions rationnelles. Un pas de plus est franchi dès le XVIIIème siècle, et aussi par nos lycéens, lorsqu'on introduit des fonctions non rationnelles telles que : $y = \sqrt{x+1}$ ou $y = \sin x$ (sinus de x).

Sauf pour des valeurs exceptionnelles ($x = 0$ ou $x = 3$ pour la première, ou $x = 0$ pour la seconde) on ne peut plus calculer la valeur exacte de y. Mais les mathématiciens ont mis au point des *fonctions approchées* (c'est à dire des fonctions rationnelles qui fournissent avec la précision désirée des valeurs approchées de y). Pratiquement c'est ce que fait une calculatrice de poche, c'est aussi ainsi qu'étaient construites les tables numériques en usage avant l'invention des calculatrices de poche. Ce sont ces fonctions et leurs combinaisons qui constituent l'herbier des fonctions des mathématiciens du XVIIIème siècle et aussi celui de nos actuels lycéens. Une occupation classique des lycéens consiste à représenter graphiquement de telles fonctions en portant les valeurs de la variable x sur un axe horizontal, celles de y sur un axe vertical. Lorsque x varie, le point M de coordonnées (x,y) parcourt alors la *courbe représentative* (C) de la fonction.

Le drame se noue lorsqu'on regarde les choses dans l'autre sens : on a un tableau numérique avec les valeurs de x et celles correspondantes de y ou, encore plus visuellement, on a une courbe (par exemple un enregistrement graphique d'un phénomène physique ou une courbe économique). Sur une telle courbe, sous certaines conditions sur lesquelles je ne m'étends pas ici, je peux lire, pour une valeur donnée de x, la valeur correspondante de y. On a donc, à juste titre, l'intime conviction qu'une telle courbe ou un tel tableau définit une fonction : y est *fonction* de x. Quelle est cette fonction f ? Puis-je l'écrire comme combinaisons de fonctions élémentaires ? La réponse est en général « Non ! ». Par contre je peux, moyennant quelques précautions et contraintes déterminer avec la précision désirée une *fonction approchée*, de cette fonction *abstraite f*. Cette fonction approchée étant, elle, combinaison de fonctions élémentaires.

Dès le XVIIème siècle apparaissent les premières difficultés, les premières insuffisances de l'herbier des fonctions élémentaires. Le problème des cordes vibrantes qui aboutit à une équation différentielle dont on ne peut pas trouver de solution en termes de fonctions élémentaires en est un exemple typique. Bien sûr l'équation de propagation de la chaleur du mathématicien allemand Lejeune-Dirichlet rentre aussi dans cette catégorie et on bascule alors dans une conception beaucoup plus abstraite du concept de fonction, dans une conception plus existentialiste que constructiviste : la fonction solution existe, mais je ne peux pas l'exhiber ! Après Fourier, ce sera l'école allemande d'analyse, avec Lejeune-Dirichlet, Weierstrass, Riemann, qui mettra tout cela en place de façon rigoureuse, mais aussi bien plus abstraite. Cette nouvelle vision des choses rencontrera des îlots de résistance jusqu'au début du XXème siècle et cela même chez des mathématiciens de premier plan, tel Hermite ou Poincaré.

La façon dont Fourier aborde la question de la propagation de la chaleur dans une tige, dans une plaque d'épaisseur négligeable ou encore dans un solide le conduit à envisager la température θ comme une fonction à plusieurs variables (dépendant de plusieurs variables)

$$\theta = \theta(t, x) \text{ pour une tige,}$$
$$\theta = \theta(t, x, y) \text{ pour une plaque,}$$
$$\theta = \theta(t, x, y, z) \text{ pour un solide,}$$

t étant le temps (la température, avant de se stabiliser évolue évidemment en fonction du temps), x, y, z étant les coordonnées cartésiennes du point considéré M.

Cette fonction est pour l'instant inconnue (si ce n'est par des valeurs expérimentales), mais les principes de la propagation de la chaleur que Fourier se fixe l'amènent à écrire qu'elle est la solution d'une équation différentielle (ou plus précisément une équation aux dérivées partielles) que voici, pour une plaque (dimension 2) :

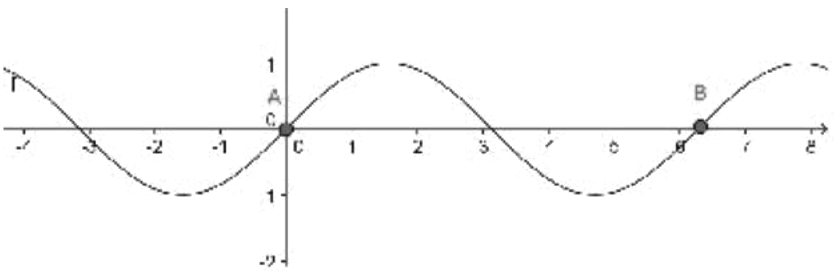
$$\frac{\partial\theta}{\partial t} = \frac{\mathrm{K}}{\mathrm{CD}}\left[\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\theta}{\partial y^2}\right].$$

Il s'agit de dérivées partielles. Les constantes: K *est la conductivité de la plaque,* D *la densité et* C *la chaleur spécifique.*

Les mathématiciens (ceux du XVIIIème siècle comme ceux d'aujourd'hui) savent résoudre certaines équations différentielles (c'est à dire trouver la fonction solution) mais pas toutes et surtout pas souvent pour des équations aux dérivées partielles. Comme par hasard et pour la plus grande gloire de Fourier, celle de la chaleur fait partie de celles qu'on ne sait pas résoudre : elle admet une solution (θ existe forcément) mais on ne peut pas l'exprimer comme combinaison de fonctions de l'herbier des fonctions dont le mathématicien dispose.

Je ne rentre pas ici plus avant dans les arcanes de la nature des équations différentielles. Cela fait intervenir les dérivées (et ici les dérivées partielles) de la fonction θ et nous mènerait trop loin. Je vais par contre, via la musique, essayer de vous donner une idée de la méthode de Fourier pour trouver une *fonction approchée* de la fonction θ (et on pourra l'approcher aussi précisément que l'on voudra, à condition d'y mettre le prix).

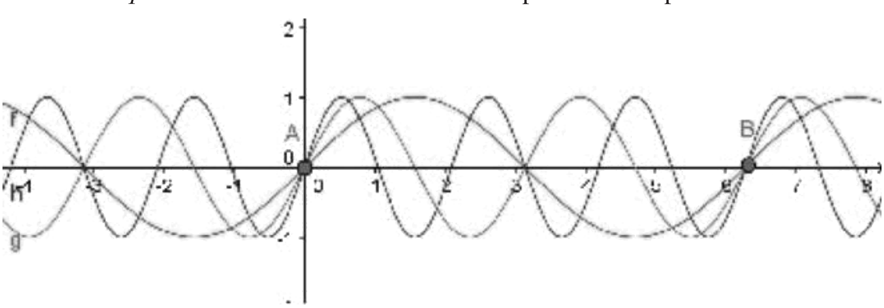
Qu'est-ce qui distingue le « la » d'un diapason du « la » d'une trompette ou de celui d'un violon ? C'est bien la même note et on peut s'imposer de les jouer toutes les trois avec la même force (intensité). Et pourtant nous sommes capables de les distinguer ! Ce qui, en fait, fait la différence est un phénomène plus complexe que musiciens et physiciens appellent le timbre. Le « la » du diapason est une vibration simple, dite fondamentale. En fonction du temps cette vibration peut se représenter ainsi



et s'écrire mathématiquement ainsi $x_1 = \sin t$.

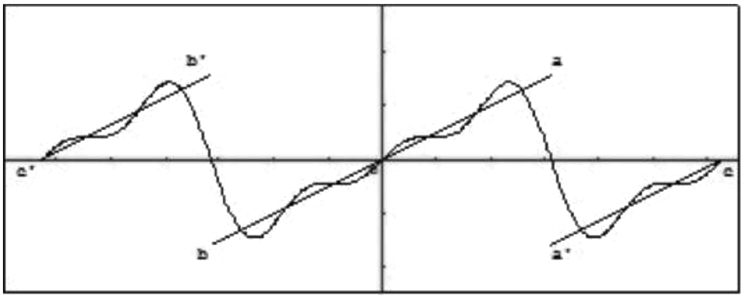
Pour des raisons de simplicité on néglige ici tout problème d'échelle tant du coté du temps (axe horizontal) que du coté de l'intensité (axe vertical). Précisons simplement que la durée qui sépare les instants A et B est dans notre musique occidentale de 1 / 440 de seconde.

Dans le « la » des autres instruments – violon, trompette, etc. – les différentes pièces de l'instrument se mettent aussi à vibrer et ces vibrations se superposent avec des intensités variables à la fondamentale. Ces vibrations supplémentaires sont des *harmoniques* de la vibration fondamentale et peuvent se représenter ainsi :



et s'écrire mathématiquement : $x_2 = \sin 2t$, $x_3 = \sin 3t$, etc.

L'idée de génie de Fourier est de construire ainsi une somme d'harmoniques, chacune avec une intensité bien choisie, pour représenter n'importe quelle fonction de période AB .
Prenons un exemple. Additionnons $x_1 = \sin t$, $x_2 = -\ 1/2 \sin 2t$ et $x_3 = 1/3 \sin 3t$.
On obtient alors $X = x_1 + x_2 + x_3 = \sin t - 1/2 \sin 2t + 1/3 \sin 3t$ soit graphiquement



c'est-à-dire déjà une assez bonne approximation de la fonction $X = t/2$ sur chaque période.

Et si on désire une meilleure approximation, il suffit de continuer, avec la même procédure, d'ajouter des harmoniques judicieusement calibrés.

L'exemple ci-dessus est un exemple qui se trouve dans la *Théorie analytique de la chaleur*. Il était connu de Cauchy qui passe, à juste titre, comme quelqu'un de très rigoureux. Et pourtant cela n'empêchera pas ce dernier de « démontrer » dans son Cours d'Analyse de l'École Polytechnique, un théorème dont cet exemple est un contre-exemple ! La résistance de Cauchy à ce contre-exemple, comme d'autres cas historiques où des mathématiciens, ont résisté à des contre-exemples, montre que le statut du contre-exemple comme argument définitif pour infirmer une assertion, n'est pas si simple.

Annexes

1. BIBLIOGRAPHIE SUCCINTE

Jean DHOMBRES et Jean-Bernard ROBERT, *Joseph FOURIER, créateur de la physique mathématique*, BELIN, collection UN SAVANT, UNE EPOQUE, 1998 ; *un ouvrage complet tant sur sa vie et son oeuvre que pour une analyse épistémologique de ses travaux. On y trouvera une bibliographie très riche.*

GRATTAN-GUINESS, *Joseph Fourier 1768–1830*, MIT Press, Cambridge-Londres, 1972 ; *l'autre grande biographie et analyse de l'œuvre de Fourier (en anglais).*

Joseph FOURIER, *Théorie analytique de la chaleur*, 1822, reprint 1988 chez Gabay ; *d'une lecture plus difficile, demande un niveau mathématique de Bac+2.*

CESTRE, *Le plan d'études de Dom Rosman au Collège d'Auxerre*, Bull; Soc. Sc. Hist. Nat. Yonne, 1909, p. 225 et svtes. ; *ce plan d'études aurait pu être influencé pour sa partie mathématique par Joseph Fourier.*

CESTRE, *Le collège d'Auxerre de 1750 à 1796*, Bull; Soc. Sc. Hist. Nat. Yonne, 1910, p. 79-183.

MAUGER, *Joseph Fourier*, Ann. Stat. Dépt. Yonne, 1837, p. 270 et svtes

Les trois derniers titres sont des études d'historiens locaux. Mauger a été un élève de Fourier.

2. Petite note de la commission du bulletin

Il faut noter que c'est à Fourier que l'on doit la notation $\int_a^b$ comme on peut le lire dans « *Théorie analytique de la chaleur* » [The Analytical Theory of Heat], Firmin Didot, Paris, 1822, page 252 (paragraph 231) au paragraphe Limits of integration.

Limits of integration were first indicated only in words. Euler was the first to use a symbol in *Institutiones calculi integralis*, where he wrote the limits in brackets and used the Latin words ab and ad (Cajori vol. 2, page 249).

The modern definite integral symbol was originated by Jean Baptiste Joseph Fourier (1768-1830). In 1822 in his famous *The Analytical Theory of Heat* he wrote:

« Nous désignons en général par le signe $\int_a^b$ l'intégrale qui commence lorsque la variable équivaut à a, et qui est complète lorsque la variable équivaut à b… »