Atelier maths et navigation

Michel Soufflet

Les problèmes de navigation en mer, liés à ceux de la cartographie, permettent d'introduire dans un contexte différent bon nombre de notions mathématiques, en particulier des questions de géométrie, intrinsèque ou différentielle, et des problèmes d'approximation. Les réponses utilisent des outils d'enseignement qui vont du collège au post-bac. Cet atelier des Journées de Laon en présente quelques exemples. Nous avons développé de préférence ceux qui sont susceptibles d'être utilisés dans les classes et d'ajouter ainsi du sens aux notions qu'elles mettent en œuvre. Sans perdre de vue que l'essentiel est culturel : on navigue plus sereinement quand on comprend son environnement ! Cela ajoute au plaisir de naviguer.

Nous avons commencé l'atelier par une série de questions afin d'instaurer un dialogue avec les participants.

Questions d'introduction

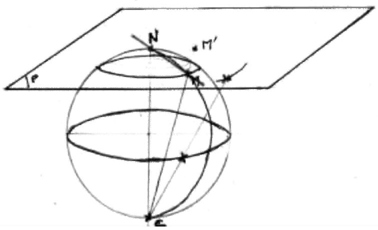
1. Quelle différence y a-t-il entre une carte marine et une carte routière ?
2. À quelle distance correspond une minute d'angle de latitude ? De longitude ? Comment cela se voit-il sur une carte marine ?
3. La Terre étant considérée comme une sphère, quelle courbe géométrique correspond à l'orthodromie (route la plus courte) et à la loxodromie (route à cap constant) ?

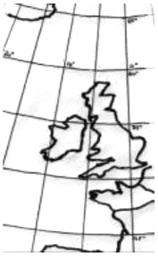
Réponses 1

Les cartes routières conservent localement les rapports de distances.
Les cartes marines doivent être conformes, c'est à dire conserver les angles. On appelle « cap » d'un bateau l'angle formé par la direction du Nord avec l'axe du bateau, qui définit aussi la tangente à la trajectoire. Un cap est donc un angle compris entre 0° et 360° mesuré à partir du Nord, l'Est est à 90°, le Sud à 180° et l'Ouest à 270°. Il doit pouvoir être vérifié sur une carte. On distingue le cap vrai ou géographique du cap compas (boussole) qui dépend à la fois du lieu et du bateau ; la correction doit être faite systématiquement, elle ne présente pas grand intérêt ici. Nous considérerons par la suite que toutes les mesures sont ramenées au Nord vrai.
La carte marine la plus connue est celle de Mercator qui consiste à projeter la Terre orthogonalement à l'axe Sud-Nord sur un cylindre qui lui est tangent à l'équateur. Le cylindre est ensuite déroulé. Elle est assez fidèle pour des latitudes faibles ou moyennes, mais très déformatrice vers les pôles.
La carte stéréographique polaire, quant à elle, est peu déformatrice pour les latitudes élevées. Du point de vue mathématique elle correspond à une inversion ; celle qui est présentée ci-après est obtenue en choisissant le pôle sud pour centre et en projetant la sphère sur un plan tangent à la Terre au pôle nord(1).

(1) Sur les cartes marines, on pourra consulter [4] et [5]

Rappelons que l'inversion est une transformation géométrique ponctuelle de l'espace euclidien E, définie à l'aide d'un point fixe A (pôle ou centre), et d'un réel non nul k (puissance), qui, à tout point M de E $-\{A\}$, associe le point M′ de la droite (AM) tel que $\overline{AM} \cdot \overline{AM'} = k$.
Il n'est pas inutile de se souvenir que toute sphère passant par le pôle est transformée en un plan et que tout plan est transformé en une sphère passant par le pôle. L'inversion peut aussi être définie par la relation vectorielle $\overrightarrow{AM'} = \dfrac{k}{AM^2}\overrightarrow{AM}$.





Réponses 2

En utilisant la définition historique du mètre, que l'on peut rappeler aux élèves, une règle de trois suffit : le quart du méridien vaut 10000 km, un degré de latitude vaut donc (10000 : 90) km et une minute vaut (10000) / (90 × 60) soit 1,852 km. On reconnaît la valeur du mille marin (ou nautique). Comme la Terre est un peu plus plate aux pôles, la définition du mille nautique est donnée pour une latitude de 45° ; cette précision est inutile en navigation.
Le rayon d'un parallèle de latitude L est R cos L, si R est le rayon de la Terre. La minute d'angle de longitude, à la latitude L, vaut donc en milles nautiques : cos L.

Pour mesurer une distance faible sur une carte marine, on utilise un compas à pointes sèches et on reporte l'écartement sur l'échelle des latitudes qui est en général graduée sur le côté de la carte

Réponses 3

Tous les participants connaissaient l'orthodromie : la distance la plus courte sur la sphère est le plus petit des deux arcs de grand cercle (dont le centre est celui de la Terre).
La loxodromie est une courbe moins connue. Son nom vient du grec *loxos* (oblique) et *dromos* (course). Sur la Terre, les loxodromies sont les courbes qui coupent les méridiens à angle constant, cet angle étant précisément le cap de la trajectoire. Bien sûr, si le cap vaut 0° ou 180° c'est une portion de méridien et, s'il vaut 90° ou 270°, c'est une portion de parallèle(2).
Les cartes marines usuelles, celle du SHOM (Service Hydrographique et Océanique de la Marine) en particulier, sont des projections de Mercator. Puisque cette projection conserve les angles avec les méridiens, et que les méridiens sont

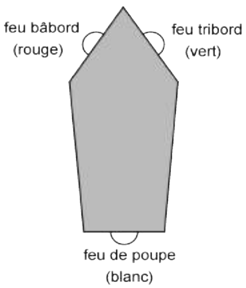
(2) Sur les loxodromies, on pourra consulter le site [6].

représentés par des droites parallèles « verticales », la loxodromie est représentée par une droite. En navigation côtière, pour faire son cap sur la carte, on utilise une *règle de Cras* qui contient un rapporteur transparent. On prend le cap entre les deux points à relier et, en faisant glisser le centre du rapporteur sur un méridien ou un parallèle, on relève le cap vrai. Ensuite on établit la correction pour donner le cap compas au barreur.
En navigation hauturière, on place quelques points (*waypoints*) sur l'orthodromie et on procède comme en navigation côtière entre ces points. On se déplace donc en fait sur une succession de morceaux de loxodromie.

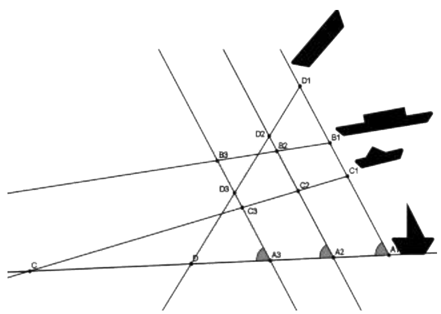
Notre navigation peut maintenant commencer. Mais attention aux dangers !

1 Navigation à gisement constant

Le gisement d'un objet est l'angle que fait la direction de cet objet avec la direction du bateau.



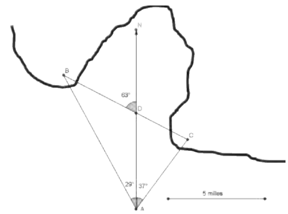
Vous naviguez de nuit à cap et vitesse constants ; de vos positions successives A_1, A_2, A_3 vous apercevez à tribord une lumière rouge dont l'angle avec votre cap est constant (c'est cet angle noté *g* qui est nommé gisement). Vous supposez qu'il s'agit d'un bateau, également à cap et vitesse constants, ce qui est généralement le cas. La situation est peut- être très dangereuse : il peut s'agir d'un bateau de fort tonnage et donc peu manœuvrant, surtout si la lumière est de plus en plus visible, ce bateau se rapproche rapidement et vous risquez de le rencontrer ! Vous ne pouvez pas savoir si l'autre bateau est en B_i, C_i, ou Di, mais le danger est réel, le schéma ci-contre et le théorème de Thalès vous aideront à comprendre pourquoi. Bien sûr, il se peut que les trajectoires soient parallèles, mais c'est plutôt rare, et dans ce cas, la lumière que vous apercevez sera blanche par moments : si c'est le quart arrière que vous apercevez la lumière sera blanche, le rouge n'étant visible que sur le quart avant.



Remarquons que l'autre bateau vous voit sous la forme d'une lumière verte car vous êtes sur son bâbord. D'une façon générale, une lumière blanche signifie que le bateau s'éloigne, une rouge, qu'il se rapproche sur votre droite, une verte qu'il se rapproche sur votre gauche. Une double lumière rouge et verte signifie qu'il vient droit sur vous.

2. On est encore loin du rivage ? Triangulation.

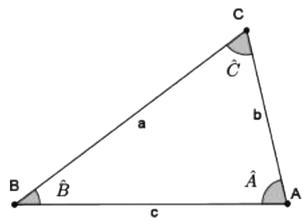
Du bateau A, on relève le phare de la Déroute B au cap 331° (ou 29°ouest) et celui de la Tourmente C au 37°. Sur la carte, on mesure la distance BC évaluée à 7,2 milles.



La direction (CB) est au 297°, relevée sur la carte.
Toutes les mesures d'angles sont données par rapport au Nord géographique, c'est-à-dire que les rectifications à partir du Nord compas sont faites.
Pouvez-vous calculer les distances AB et AC ?

Réponse :

Il faut se rappeler la formule dite « des sinus », qui peut se démontrer dès que l'on connaît la définition du sinus.



L'aire du triangle ci-contre vaut
$\frac{1}{2}ab\sin\hat{C} = \frac{1}{2}bc\sin\hat{A} = \frac{1}{2}ca\sin\hat{B}$.

En divisant cette double égalité par $\frac{abc}{2}$, on obtient :
$\frac{\sin\hat{C}}{c} = \frac{\sin\hat{A}}{a} = \frac{\sin\hat{B}}{b}$.
C'est cette formule que Méchain et Delambre, en vedette sur l'affiche des Journées de Laon, ont utilisée pour déterminer la longueur du méridien terrestre.
En l'utilisant et en se souvenant du fait que, dans le plan, la somme des angles d'un triangle vaut 180°, on trouve : AB = 7,76 milles et AC = 4,41 milles.
J'ai, par le passé, très souvent donné cet exercice en Première S ; il apporte un peu de bagage culturel aux futurs scientifiques.

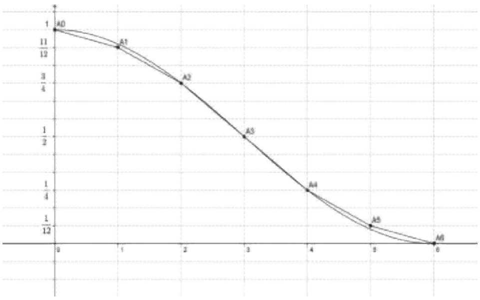
3. La marée vous permettra-t-elle d'entrer au port ?

Le 28 octobre 2015 au matin, vous espérez arriver devant l'entrée du port de St Denis d'Oléron vers midi. Le seuil d'entrée est à + 1,30 m. L'indicateur des marées prévoit une marée haute à 7h00 avec une hauteur d'eau de 6,55 m, la suivante à 17h15 (hauteur 6,65 m) et une marée basse à 10h55 hauteur d'eau 0,45 m. Votre tirant d'eau est d'1,5 m et vous souhaitez garder un « pied de pilote » de 0,5 m par sécurité.
A quelle heure pourrez-vous entrer dans le port ?
Indication 1 : La hauteur de la marée varie suivant une fonction sinusoïdale.
Indication 2 : il y a trois bouées d'attente à l'entrée du port, pensez à amarrer votre bateau avant de commencer le calcul !

Réponses

Les marins utilisent **la règle des douzièmes, une approximation de la fonction sinusoïdale**.
Longtemps incontournable du permis hauturier, cette règle permet de prévoir la hauteur d'eau dans un endroit donné en fonction de l'heure de la marée.

Elle stipule que, si on connaît la durée de la marée d_m, différence entre l'heure de la marée haute et celle de la marée basse, il faut calculer h_m, « l'heure-marée » égale à $d_m/6$, alors au cours de ces 6 « heures » ainsi définies, la variation de hauteur sera respectivement de 1, 2, 3, 3, 2, 1 douzième du marnage, le marnage m étant la différence de hauteur entre la marée haute et la marée basse.



La figure ci-contre met en évidence le fait que cette règle est une approximation linéaire par morceaux d'une fonction cosinus (en vert). Avant l'invention des calculatrices c'était un outil remarquable pour résoudre simplement ce type de problème. Désormais si on souhaite un calcul assez précis, il peut être plus simple de programmer la fonction.
Cette règle reste cependant excellente pour une évaluation grossière par calcul mental, évaluation souvent suffisante.

Pour faire « coller » la fonction cosinus à la règle des douzièmes, il suffit de chercher la fonction de type : $f(t) = a\cos(\omega t + \varphi) + b$ dont la représentation passe par les points communs aux deux courbes. On trouve $a = b = m/2$, $\omega = \pi/6$ et $\varphi = 0$, ce qui nous donne : $f(t) = (m/2)\cos(\pi t/6) + m/2$.
Si t désigne le nombre d'heures-marées et d_m la durée de la marée, la fonction qu'il faut programmer sur une calculatrice en mode radian est :

$$f(t) = (m/2)\cos(\pi t/d_m) + m/2.$$

t et d_m doivent être exprimés dans la même unité (minutes ou heures).

Par exemple, si le marnage est de 6 m et la durée de la marée de 363 min, la hauteur d'eau sera de : $f(t) = 3\cos(\pi t/363) + 3$.
2h20 soit 140 min après l'heure de la marée haute la hauteur d'eau sera : $f(140) = 4{,}05$ m au-dessus de celle de la basse mer indiquée sur l'annuaire. Afin de connaître la hauteur d'eau sous le bateau (et donc de vérifier avec le sondeur), cette hauteur devra être ajoutée à celle de la marée basse et à celle indiquée sur la carte à cet endroit.
Cette fonction est celle d'une marée descendante ; dans le cas d'une marée montante, on prendra $\varphi = -\pi$ soit : $f(t) = (m/2)\cos(\pi t/d_m - \pi) + m/2$.

Si la durée de la marée descendante est égale à celle de la marée montante, on utilisera une seule fonction.

Cette méthode est surtout intéressante si on dispose d'un écran pour représenter la fonction car la lecture graphique permet de répondre aux deux types de questions qui peuvent se poser : *Quelle hauteur d'eau à un moment donné? Jusqu'à quelle heure peut-on passer à cet endroit ?*

Sans perdre de vue que les estimations que l'on fait correspondent aux conditions atmosphériques des annuaires : pas de vent et pression normale, c'est-à-dire environ 1015 hPa (hectopascals). Près des côtes, un fort vent de terre peut faire baisser sensiblement le niveau de la marée, de même qu'une situation anticyclonique.

Prévoir 10 cm de hauteur d'eau en moins pour 10 hPa en plus. Sous un anticyclone de 1040 hPa, il faudra retrancher 25 cm. Inversement, lors d'une dépression de 950 hPa, il faudrait ajouter 65 cm – il faudrait, car dans ce cas, la sécurité impose d'être rentré au port ! Cela permet toutefois de comprendre pourquoi la conjonction entre un fort vent de mer, une dépression profonde et une marée haute peut provoquer des inondations sur les zones de faible altitude.
En octobre 87, cette situation s'est produite lors des journées nationales de l'APMEP à Quimper. Les dégâts furent très importants et les journées interrompues. En voyant les bateaux coulés dans le port, les marins de Loctudy disaient n'avoir jamais vu cela de mémoire d'homme mais aussi que, fort heureusement, nous étions en marée de morte eau, en pleine ou nouvelle lune, l'île de Sein proche aurait probablement été engloutie.

Ces formules ne sont applicables que lorsque la règle des douzièmes l'est, ce que l'on fait par défaut d'informations supplémentaires. Dans certains lieux à configuration particulière, les cartes marines proposent une lecture de la hauteur d'eau sous forme d'abaque, il convient alors de s'y référer. En baie de Seine, par exemple, l'étale de haute mer dure 2h (en vive eau), au lieu de1h habituellement.

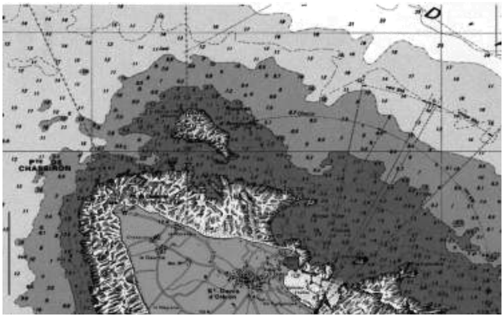
Remarque : sur une calculette, la fonction ci-dessus doit se programmer en mode radian.
En mode degré, il faut bien sûr prendre : $f(t)=(m/2)\cos(180t/d_m)+m/2$.

Pour la même approximation, le SHOM propose : $f(t)=m\sin^2(90t/d_m)$.

C'est, bien sûr, la même fonction car $\cos(2x)=2\sin^2(x)-1$.

Les calculs montrent qu'il faudra attendre 2h 58 après le début de la marée montante soit 13h 53.

La ligne de sonde



Capture d'écran de la carte du SHOM sur la pointe de Chassiron : la partie grise est l'estran, c'est-à-dire la zone découverte à marée basse, la limite du gris avec le bleu foncé correspond au zéro des cartes, niveau atteint lors des marées d'équinoxe les plus fortes, la limite entre ce bleu foncé et le bleu moyen est la ligne de sonde des 5 m, celle entre le bleu moyen est le bleu clair, la ligne des 10 m (pour les couleurs, cf. la couverture de ce Bulletin.
Cet outil est essentiel pour prévoir la hauteur d'eau car il peut permettre de se repérer grâce au seul sondeur, même par temps de brouillard, lorsque les appareils électroniques sont en panne : si la hauteur de la marée est de 4 m, en restant sur une valeur de 9 m au sondeur, vous pouvez suivre la ligne de sonde de 5 m toujours indiquée sur les cartes marines (limite bleu clair, bleu foncé sur la carte ci-dessus).

En suivant cette ligne, vous pouvez contourner des récifs dangereux et espérer rentrer au port. Dans certains cas, en observant la carte, par prudence, vous opterez pour la sonde des 10 m. Sur l'exemple ci-dessus, par exemple, venant de l'Ouest à l'approche de la pointe de Chassiron, la sonde des 10 m est plus appropriée, celle des 5 m passant trop près du zéro des cartes. Si le brouillard est vraiment épais, il sera plus prudent d'éviter St Denis d'Oléron et de viser le port de La Rochelle un peu plus à l'est.

Remarque : La recherche de la bonne fonction sinusoïdale pour la hauteur de marée peut aussi s'appliquer à un problème analogue : la hauteur du soleil. Je l'ai conseillée aux professeurs dans tous les pays tropicaux que j'ai traversés, Afrique, Antilles, Polynésie et testé moi-même à Basse Terre en Guadeloupe (16° de latitude Nord), le tropique du cancer étant à 23° 25'
Il faut se trouver entre les tropiques ; on demande aux élèves de prévoir à quel moment de l'année le soleil sera à la verticale, à Basse Terre on trouvait une date autour du 14 mai et le symétrique (par rapport au 21 juin) le 5 août ; entre ces deux dates, à midi le soleil est au nord. À Tahiti (16°Sud), le problème est le même autour du 21 décembre.
Les élèves pouvaient vérifier qu'à cette date, aux environs de midi, il y a un moment où un bâton vertical n'a pas d'ombre. Le problème est exactement le même que pour la marée, il faut juste consulter un calendrier pour connaître les dates exactes des solstices et équinoxes ; c'est une vraie question porteuse de sens dans ces pays.

Navigation astronomique

Elle consiste à se repérer en utilisant la hauteur des astres. L'utilisation du sextant n'a plus qu'un intérêt culturel, sauf pour un navigateur très expérimenté, même en cas de panne ; déterminer avec une bonne précision sa longitude et sa latitude en mesurant la hauteur du soleil requiert une pratique régulière ; c'était souvent une gentille épreuve de bizutage pour le jeune officier sortant de l'École Navale. Les mathématiques sous-jacentes à sa pratique n'ont pas d'application dans nos classes, elles ont surtout servi pour le calcul des éphémérides qui n'a été possible qu'après la découverte des logarithmes comme outil de calcul.
L'intérêt culturel reste entier, l'aspect historique, bien sûr, mais aussi la satisfaction de savoir se situer approximativement par rapport aux astres.
L'étoile polaire est un bon exemple, sa hauteur est plus simple à mesurer car elle est quasiment ponctuelle et il n'y a pas besoin de distinguer base, centre ou sommet de son cercle. Elle indique le Nord géographique car elle est positionnée presque sur l'axe de la Terre, elle oscille à deux degrés près autour de cet axe. Au cours de la nuit et durant l'année, les autres étoiles lui tournent autour. La hauteur observée vous donne donc votre latitude à 2° près. En notant l'heure de l'observation et en consultant les éphémérides, vous pouvez obtenir votre latitude exacte, mais même avec les 2 degrés d'approximation, évaluer sa latitude en regardant les étoiles procure une satisfaction certaine. En hémisphère sud, la Croix du Sud, petit amas de 4 étoiles dans la voie lactée indique le Sud avec moins de précision mais permet quand même de ne pas perdre le nord en vous retournant !

Conclusion

L'atelier s'est déroulé dans une ambiance de dialogue très sympathique. Par gentillesse ou par timidité, les participants m'ont épargné la traditionnelle question que posent les marins quand ils s'adressent à un matheux, question que Flaubert avait posée à sa sœur Caroline en 1841 :
« *Puisque tu fais de la géométrie et de la trigonométrie, je vais te donner un problème : Un navire est en mer, il est parti de Boston chargé de coton, il jauge 200 tonneaux, il fait voile vers Le Havre, le grand mât est cassé, il y a un mousse sur le gaillard d'avant, les passagers sont au nombre de douze, le vent souffle N.-E.-E., l'horloge marque trois heures un quart d'après-midi, on est au mois de mai…. On demande l'âge du capitaine ?* »
Peut-être, parce que j'ai fait une grande partie de ma carrière en Normandie, pays de Flaubert, cette question m'a souvent été adressée. N'ayant pas de réponse, je m'étais permis de la poser à un vieux marin Normand qui, fort de son bon sens et de son expérience, m'a répondu :
« *Plus le bateau est long, plus le capitaine est vieux !* »

Bibliographie et sitographie

[1] Soufflet Michel, *100 énigmes Mathématiques de tous les jours*, Editions Vuibert, 2e ed. 2014.
[2] Sur le même thème (niveau collège) : Vidonne Romain, « Un tour du monde à la voile en classe de seconde », *Bulletin de l'APMEP* , n° 501, 2012.
[3] Pour les nostalgiques du bon vieux temps, le calcul d'un trajet aérien par courbe loxodromique par morceaux avec une TI 58 ou 59 : Lehmann Daniel, « Géométrie sphérique : Géodésiques et loxodromies - Navigation aérienne ou maritime. » *Bulletin de l'APMEP*. n° 342. p. 17-31, 1984.
[6] Sur les loxodromies de la sphère, et beaucoup d'autres courbes, consulter le site : http://www.mathcurve.com/courbes3d/loxodromie/sphereloxodromie.shtml.

Pour une histoire des cartes marines :

[4] Gambin Marie-Thérèse, « Des cartes portulans à la formule d'Edward Wright : l'histoire des cartes à rumbs », *Mnémosyne* n° 11, p. 31-62, en ligne sur le site de Paris 7
[5] Lubczanski Jacques, « Les cartes marines : histoire d'un problème posé aux mathématiques. » *L'Ouvert*. N° 59. p. 10-18.en ligne sur le site de l' IREM de Strasbourg .

Logiciels utiles :

Open cpn 4.0.0. Penser à charger avec les cartes du SHOM les vectorielles et les courants. La carte de la pointe de Chassiron ci-dessus est une copie d'écran à partir de ce logiciel. Couplé avec un GPS, ce logiciel permet de prévoir les fonds autour du bateau.
Marées du Monde, essentiel si vous naviguez dans des zones pour lesquelles il n'y a pas d'annuaire de marées.