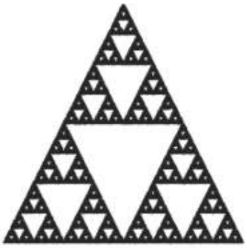
Que signifie « dimension » ?

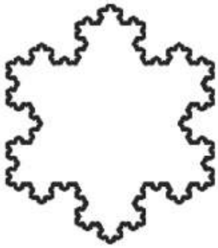
Christiane Rousseau
Traduction de Catherine Combelles

Ce texte est une « vignette » du projet Klein. Le texte d'origine, en anglais, se trouve à l'adresse : http://wikis.zum.de/dmuw/images/d/d0/Dimension_klein_rousseau.pdf

Comment mesurer la taille d'un objet géométrique ? Pour décrire des sous-ensembles du plan, nous utilisons couramment les mots de périmètre, de longueur, d'aire, de diamètre, etc. Mais ils ne suffisent pas lorsqu'on veut décrire les fractales. Les objets fractals sont des objets géométriques très complexes et nous devons trouver un moyen de quantifier leur complexité. C'est dans ce but que les mathématiciens ont introduit le concept de dimension. La dimension permet de mesurer la complexité d'une fractale. Cette notion de dimension est une généralisation et une formalisation de notre notion intuitive de dimension, lorsque nous parlons de dimension 1, 2 ou 3. Nous allons parler de plusieurs moyens de décrire les objets fractals, en examinant deux exemples : le triangle de Sierpinski et le flocon de von Koch (voir figure 1).



a) Triangle de Sierpinski



b) Flocon de von Koch

Figure 1 : le triangle de Sierpinski et le flocon de von Koch

1. Quelle est l'aire du triangle de Sierpinski ?

Tout d'abord, examinons comment est construit le triangle de Sierpinski (voir figure 2) : il est le résultat d'un processus itératif. On part d'un triangle que l'on partage en quatre triangles en joignant les milieux des côtés, et on supprime le triangle central. Il nous reste trois triangles ; dans chacun d'eux, on itère l'opération et on supprime le triangle central, et ainsi de suite.
Nous disposons maintenant de tous les ingrédients pour calculer l'aire du triangle de Sierpinski. Supposons que l'aire du triangle initial soit A (voir figure 2a).

(*) Université de Montréal.

- À la première itération, on supprime une aire de $\frac{A}{4}$. Il nous reste l'aire : $A_1 = \frac{3A}{4}$.
- À la deuxième itération, on supprime le quart de l'aire des trois triangles restants, donc un quart de A_1 L'aire restante est donc : $A_2 = \frac{3}{4}A_1 = \left(\frac{3}{4}\right)^2 A$.

a) le triangle initial b) la première itération c) la deuxième itération

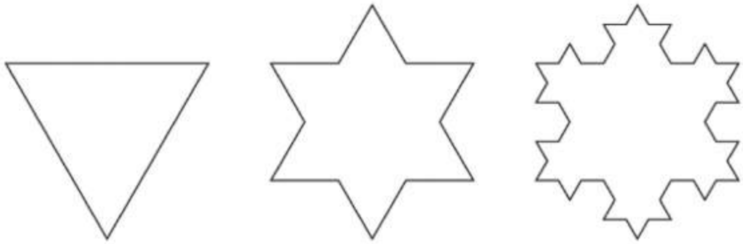
Figure 2 : Le processus d'itération pour construire le triangle de Sierpinski

- À la troisième itération, nous supprimons un quart de l'aire des neuf triangles restants, et donc un quart de A_2. L'aire restante est donc : $A_3 = \frac{3}{4}A_2 = \left(\frac{3}{4}\right)^3 A$.
- …
- À la n-ième itération, nous supprimons un quart des 3^{n-1} triangles restants, c'est-à-dire un quart de A_{n-1}. L'aire restante est donc : $A_n = \frac{3}{4}A_{n-1} = \left(\frac{3}{4}\right)^n A$.

Comme $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{3}{4}\right)^n = 0$, nous pouvons conclure que l'aire du triangle de Sierpinski est égale à zéro !

2. Quelle est la longueur du flocon de von Koch ?

Le flocon de von Koch s'obtient lui aussi par itération. À chaque étape de l'itération, on remplace un segment par un ensemble de quatre segments, chacun de longueur le tiers de celle du segment de départ (voir la figure 3). Si le triangle d'origine dans la figure 3(a) a pour périmètre L, alors le périmètre de l'étoile de la figure 3(b) est $\frac{4}{3}L$, et l'objet de la figure 3(c) a pour périmètre $\left(\frac{4}{3}\right)^2 L$, Et ainsi de suite. Autrement dit, à chaque étape, le périmètre est multiplié par 4/3. Puisque la construction comporte une infinité d'étapes, le périmètre du flocon de von Koch est infini !



a) triangle initial b) première itération c) deuxième itération

Figure 3 : Le flocon de von Koch, et le processus itératif de sa construction

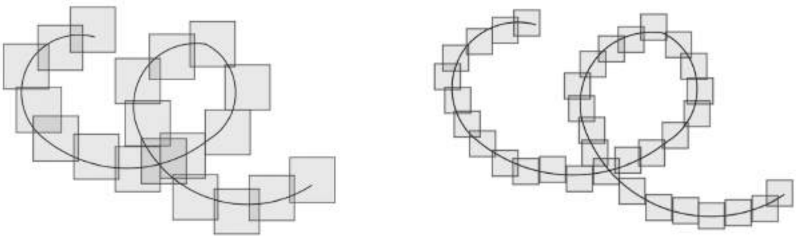
3. Dimension d'une fractale

Le triangle de Sierpinski est un objet très compliqué. Pourtant, sa superficie est nulle et donc nous donne peu de renseignement sur cet objet. Le fait que le flocon de von Koch ait une longueur infinie nous dit bien que c'est un objet complexe, mais sans plus de précision. Pour pouvoir apporter davantage d'information sur les fractales, les mathématiciens ont introduit le concept de dimension.

Comment un mathématicien définit-il la dimension ?

Commençons par notre idée intuitive de dimension. Intuitivement, les courbes sont de dimension 1, les surfaces de dimension 2 et les volumes de dimension 3. Donc, nous devons énoncer une définition mathématique qui donne 1 pour les courbes, 2 pour les surfaces et 3 pour les volumes. Nous nous limiterons ici aux dimensions 1 et 2. Nous allons recouvrir un objet géométrique du plan avec des petits carrés. (Si nous voulions définir la dimension 3, nous utiliserions des petits cubes, mais nous pourrions utiliser aussi des petits cubes pour les courbes et les surfaces sans modifier leur dimension !)

Cas d'une courbe : (voir Figure 4)



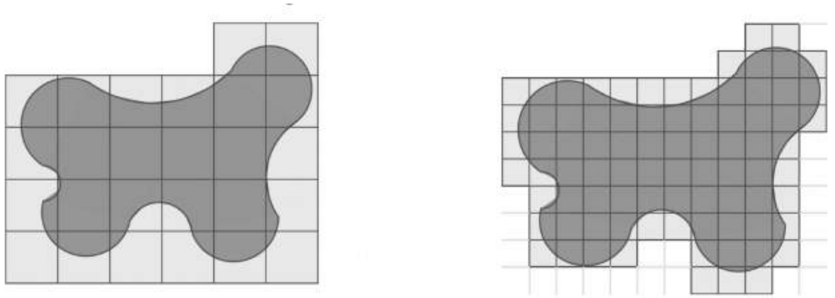
(a) (b)

Figure 4 : calcul de la dimension d'une courbe
en utilisant des carrés de différentes tailles

- Si nous divisons par deux les côtés des carrés utilisés, il nous faudra à peu près deux fois plus de carrés pour recouvrir l'objet ;

- Si nous divisons par trois les côtés des carrés utilisés, il nous faudra à peu près trois fois plus de carrés pour recouvrir l'objet ;
- …
- Si nous prenons des carrés de côté divisé par n, nous utiliserons à peu près n fois plus de carrés pour recouvrir l'objet.

Cas d'une surface : (voir Figure 5)



(a) (b)

Figure 5 : calcul de la dimension d'une surface
en utilisant des carrés de différentes tailles

- Si nous prenons des carrés de côté divisé par deux, nous utiliserons à peu près quatre fois plus de carrés pour recouvrir l'objet ;
- Si nous prenons des carrés de côté divisé par trois, nous utiliserons à peu près neuf fois plus de carrés pour recouvrir l'objet ;
- …
- Si nous prenons des carrés de côté divisé par n, nous utiliserons à peu près n^2 fois plus de carrés pour recouvrir l'objet.

Nous pouvons maintenant donner une définition (intuitive) de la dimension.

Définition 1 : Un objet du plan est de dimension d si, lorsque nous prenons des carrés de côté n fois plus petit pour le recouvrir, nous utilisons environ n^d fois plus de carrés pour le faire.

Quelques remarques sur notre définition :

1. Bien sûr, les carrés utilisés pour recouvrir l'objet peuvent être inclinés, ils peuvent aussi se chevaucher.
2. Au lieu de carrés, on pourrait utiliser des rectangles isométriques, de format, longueur sur largeur, fixé à r ($r > 1$). On obtiendrait les mêmes résultats pour les dimensions 1 et 2, et c'est vrai aussi dans le cas général des sous-ensembles du plan. Pour calculer la dimension du flocon de von Koch, il est plus facile d'utiliser des rectangles que des carrés.
3. La notion de dimension donnée ci-dessus porte dans la littérature le nom de *dimension de boîte*, ou encore *dimension de comptage*. Ce n'est qu'une définition de la dimension parmi une pléiade d'autres définitions. Toutes

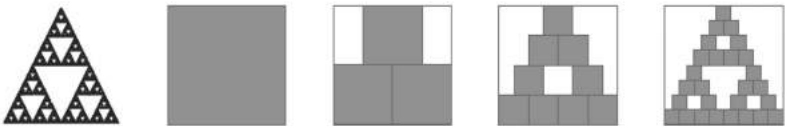
donnent 1 pour les courbes lisses, 2 pour les surfaces lisses, et 3 pour les volumes. Elles donnent les mêmes résultats pour les fractales auto-similaires, mais peuvent donner des résultats différents pour des ensembles complexes mais non auto-similaires.

4. Tous les objets géométriques n'ont pas nécessairement une dimension de boîte. Mais les objets auto-similaires ont une dimension qui, la plupart du temps, n'est pas un nombre entier.

Cette définition peut être généralisée aux objets géométriques sous-ensembles de $\mathbb{R}^m$, et le résultat est indépendant du m considéré !

Définition 2 : Un sous-ensemble de $\mathbb{R}^m$ est de dimension d si, lorsque nous prenons des hypercubes de dimension m de côté n fois plus petit pour le recouvrir, nous utilisons environ n^d fois plus d'hypercubes pour le faire.

Calculons maintenant la dimension du triangle de Sierpinski (voir Figure 6).



(a) triangle de Sierpinski (b) 1 (c) 3 (d) 9 (e) 27

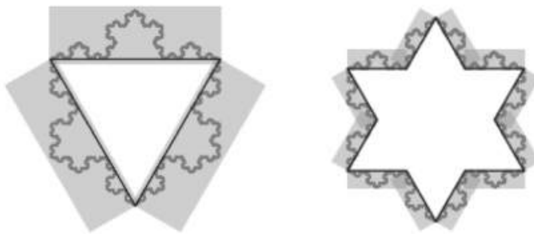
Figure 6 : nombre de carrés recouvrant le triangle de Sierpinski tracé en a)

- Soit un carré dont le côté est égal à la base du triangle. Il recouvre le triangle de Sierpinski de la figure 6(a).
- Si nous divisons par deux le côté des carrés, il nous faut 3 carrés pour le recouvrir. Remarquons que $3 = 2^{\frac{\ln 3}{\ln 2}}$ (figure 6(c)).
- Si nous divisons par 4 le côté des carrés, il nous faut 9 carrés pour le recouvrir. Remarquons que $9 = 4^{\frac{\ln 3}{\ln 2}}$ (figure 6(d)).
- Si nous divisons par 8 le côté des carrés, il nous faut 27 carrés pour le recouvrir. Remarquons que $27 = 8^{\frac{\ln 3}{\ln 2}}$ (figure 6(e)).

On en conclut aisément que la dimension du triangle de Sierpinski de la figure 6(a) est $d = \dfrac{\ln 3}{\ln 2} \approx 1.585$.

Nous affirmons maintenant que la dimension du flocon de von Koch de la figure 1(b) est $\dfrac{\ln 4}{\ln 3} \approx 1.262$. Pourquoi ?

Si nous tentons de le recouvrir avec des carrés de côtés de longueurs égales à celles des segments des figures successives de la figure 3, on se trouve en difficulté parce que certains carrés couvrent un seul côté, alors que d'autres en couvrent deux lorsqu'ils forment une pointe. Utilisons alors l'astuce de notre remarque 2, et servons-nous de rectangles dont la longueur vaut trois fois la largeur.



a) avec 3 rectangles b) avec 12 rectangles

Figure 7 : calcul de la dimension du flocon de von Koch en utilisant des rectangles

Nous donnons ici les étapes principales de l'argumentation et laissons le lecteur compléter les détails. À chaque itération, nous avons besoin d'autant de rectangles qu'il y a de côtés, en choisissant des rectangles de même longueur que les côtés. Si nous plaçons ces rectangles vers l'extérieur du flocon, ils vont recouvrir les segments produits par les itérations suivantes comme sur la figure 7. Il est facile de vérifier qu'il faut autant de rectangles que de côtés. Le triangle de départ a 3 côtés. À chaque itération on multiplie le nombre de côtés par 4 et donc, on multiplie le nombre de rectangles par 4. En même temps, on utilise des rectangles de côtés trois fois plus petits. Comme $4 = 3^{\frac{\ln 4}{\ln 3}}$, on conclut que la dimension du flocon de von Koch est égale à $\frac{\ln 4}{\ln 3}$.

La dimension donne une « mesure » de la complexité ou de la densité d'un fractal. En effet, nous sentons bien que le triangle de Sierpinski est plus dense que le flocon de von Koch, qui ressemble davantage à une courbe « épaissie ». Cette impression est reflétée par l'inégalité : $\frac{\ln 3}{\ln 2} > \frac{\ln 4}{\ln 3}$.

Applications

Le réseau capillaire au voisinage d'une tumeur : il n'est pas le même qu'ailleurs dans l'organisme. Des recherches sont effectuées à ce sujet, et en particulier sur la dimension fractale de ce réseau, dans le but d'améliorer le diagnostic établi à partir de l'imagerie médicale.

Le dessin de l'arbre bronchique : les athlètes de haut niveau souffrent davantage d'asthme que le reste de la population. Pourquoi ? L'article [1] étudie le poumon optimal. Il existe 17 niveaux de tubes bronchiques avant d'arriver aux bronchioles terminales, suivies des acini pulmonaires impliqués dans les échanges gazeux (voir figure 8).

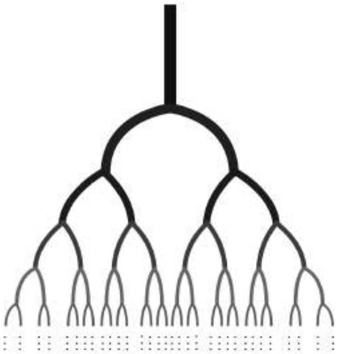


Figure 8 : l'arbre bronchique

Si les tubes bronchiques sont trop fins, la pression augmente lorsque l'air pénètre au niveau suivant de bronchiole. Mais s'ils sont trop larges, de sorte que le volume reste le même à chaque niveau, le volume devient trop grand (il deviendrait infini s'il y avait un nombre infini de niveaux). Ainsi, le poumon « optimal » doit avoir le volume minimum permettant de ne pas augmenter la pression. Mais quand on se rapproche du poumon optimal, une petite diminution du diamètre des bronchioles provoque une bien plus grande augmentation de la pression que ne le ferait la même diminution dans des tubes bronchiques plus larges (cela provient de la spécificité de la fonction non linéaire donnant la pression). Les poumons humains ont des bronches plus larges et un volume plus grand que le poumon optimal théorique. Cette marge de sécurité apporte une protection en cas de bronchoconstriction, pathologie réduisant le diamètre des bronches et qui peut être causée par l'asthme. Les athlètes ont des poumons en général plus proches du poumon optimal théorique, et sont donc plus vulnérables.

L'intestin grêle : La surface externe de l'intestin grêle a une aire d'environ 0,5 m^2, alors que sa surface interne a une aire d'environ 300 m^2. Nous avons vu, avec le flocon de von Koch, qu'une courbe fractale peut avoir une longueur infinie tout en occupant une surface finie. Nous pouvons de même concevoir aisément qu'une surface fractale occupant un volume fini peut avoir une aire infinie. On retrouve cette astuce dans la nature : l'aire de la surface interne de l'intestin grêle doit être très grande afin de maximiser l'absorption intestinale. La nature fractale de cette surface remplit cet objectif. C'est vrai aussi de la surface des alvéoles qui terminent les bronchioles dans les poumons : comme l'arbre bronchique est de nature fractale, la surface des alvéoles est très grande, ce qui maximise les échanges gazeux.

[1] Benjamin Mauroy, *Géométrie pulmonaire*, dans La Recherche hors-série, *365 énigmes mathématiques*, décembre 2007, p. 48-51.

Compléments

L'autosimilarité

Quelques mots pour expliquer cette notion d'autosimilarité et l'usage qu'on peut en faire ici.

Un segment peut être coupé en 2 segments de longueur moitié, un carré en 4 carrés de côté moitié, un cube en 8 cubes d'arête moitié, un hypercube en dimension d en 2^d hypercubes de taille moitié.
Ici le triangle de Sierpinski peut être coupé en 3 triangles de Sierpinski de côté moitié ; il n'est donc pas absurde de lui attribuer, comme le fait le texte, une dimension d telle que $2^d = 3$, donc $d = \dfrac{\ln 3}{\ln 2}$.
Il s'agit ici d'un objet autosimilaire, c'est-à-dire décomposable en un nombre fini de morceaux qui lui sont semblables.
Le flocon de von Koch tout entier n'a pas cette propriété, mais si on regarde seulement la partie du flocon qui est construite sur un seul des côtés du triangle initial (courbe de von Koch), on voit aussitôt que cette partie est faite de 4 morceaux qui lui sont semblables dans le rapport 1/3. On peut donc lui attribuer, comme le fait le texte, une dimension d telle que $3^d = 4$, donc $d = \dfrac{\ln 4}{\ln 3}$.

Dimensions fractales

Pour approfondir la question, on trouvera sur le site Wikipedia :

- à la page « Dimension » un aperçu de diverses notions de dimension dans des contextes scientifiques variés.
(http://fr.wikipedia.org/wiki/Dimension).
- à la page « Dimension fractale » une revue des diverses notions de dimension d'un fractale ; celle qui est présentée ici est la dimension de Minkowski ou dimension de boîte.
(http://fr.wikipedia.org/wiki/Dimension_fractale).
- à la page « Dimension de Minkowski–Bouligand » la définition formelle de la dimension décrite ici, et ses liens avec la dimension de Hausdorff.
(http://fr.wikipedia.org/wiki/Dimension_de_Minkowski%E2%80%93 Bouligand).