Le jeu du « franc carreau »
Activité d'enseignement et de recherche.

David Nowacki(*) et Hervé Milliard(**)

Le rapport de la commission de réflexion sur l'enseignement des mathématiques(1) exprimait en ces termes un des enjeux de cet enseignement :

« *La notion de probabilité est abordée dès la classe de troisième à partir d'exemples concrets et de situations simples que l'élève peut se représenter sans aucune difficulté. C'est en observant et en relevant les résultats de nombreuses épreuves répétées que l'on pourra montrer la stabilisation des fréquences.* »

C'est pour illustrer ces directions que nous avons choisi de montrer divers aspects de l'un des thèmes d'étude proposés dans le document « Ressources pour la classe de seconde » *Probabilités et Statistiques*. Cette activité peut être traitée, dans l'ordre :

1. En **expérimentant** dans des conditions rigoureuses et après avoir précisé ce qui permet d'obtenir un « bon hasard ».
2. En donnant un **modèle théorique**, qui, même s'il est admis, peut être parfaitement compris des élèves car proposé par eux et obtenu à partir de considérations géométriques élémentaires.
3. En concevant une **simulation** sur un ordinateur pour obtenir un grand nombre de résultats.

Nous la traitons depuis une première approche pour les élèves de troisième jusqu'à des prolongements que l'on peut faire en classe de seconde, voire en première.

Relire les textes officiels à ce propos est tout à fait utile et révèle des mots-clés qui résonnent peut-être de façon nouvelle dans les pratiques pédagogiques :

« *La **notion de probabilité** est abordée à partir d'**expérimentations** qui permettent d'observer les **fréquences des issues** dans des situations familières (pièces de monnaie, dés, roues de loteries, urnes, etc.). La notion de probabilité est utilisée pour modéliser des situations simples de la vie courante. Les situations étudiées concernent les expériences aléatoires à une ou à deux épreuves.* »

Partie 0. Préambule.

Le lecteur averti comme l'est celui du bulletin vert comprendra les notions plus ou moins lourdes qui se cachent derrière cette activité qui peut paraître simple et sans difficultés apparentes.

Le problème du continu pourrait représenter un obstacle quasi insurmontable. Il est intéressant de constater que cette difficulté – réelle – semble n'exister que dans la

---

(*) Collège Sylvain Menu (Marseille) et groupe Statistique-Probabilités de l'IREM d'Aix-Marseille.

(**) Lycée Marseilleveyre (Marseille) et groupe Statistique-Probabilités de l'IREM d'Aix-Marseille.

(1) Commission de réflexion sur l'enseignement des mathématiques. Rapport d'étape *Statistiques et probabilités*, Jean-Pierre Kahane, Avril 2001.

perception de l'enseignant car elle n'a donné lieu à aucun blocage du côté des élèves (peut-être à tort ?).

Le carreau est constitué d'une infinité de points, mais dans le cas qui nous intéresse, il n'y a pas lieu de considérer le continu : l'élève admet que le carreau est assez bien défini par un ensemble fini de points dont les coordonnées sont constituées de nombres compris entre 0 et 5 et ayant deux chiffres après la virgule.

Le professeur, peut-être, pourrait aborder le problème de la précision pour approcher plus finement l'ensemble des points du plan.

Un autre problème est celui de la réduction de l'étude à un seul carré. Ce problème doit être abordé de front par le professeur et justifié par les élèves.

Dans tous les cas, et quel que soit le nombre de carreaux, on a toujours le problème de la « sortie de jeu ». Le fait d'avoir 100, 10 ou bien un seul carreau ne change pas la règle définie en préalable au jeu. Mais tous les élèves ont admis qu'il faut beaucoup de carreaux et lancer « de loin » pour avoir un « bon » hasard, quand on fait vraiment l'expérience.

Il faut seulement, et patiemment, définir clairement la méthode de lancer pour que tous les participants acceptent le lancer comme produisant un « bon » hasard. C'est-à-dire, en clair, que chaque point de l'aire atteignable par le centre de la pièce a autant de chances de coïncider avec celui-ci que n'importe quel autre point.

L'utilisation du tableur permet à l'élève d'accepter cette hypothèse sans difficulté.

Partie I (niveau collège). Mise en place du jeu.

Le jeu du franc-carreau a été pratiqué dès le Moyen-Âge. Ce jeu consistait à jeter un écu sur un carrelage et à parier sur la position finale de la pièce : à cheval sur un des bords du carreau ou entièrement à l'intérieur d'un carreau, on parlait alors de « Franc-carreau ». Il a été étudié par Georges Louis Leclerc, comte de Buffon en 1733 :

Voici un problème qui m'a occupé ces jours passés, et qui sera peut-être du goût de Mr de Moivre. Vous ne savez peut-être pas ce que nous appelons en français le jeu du franc-carreau. Dans une chambre pavée de carreaux, on jette en l'air un écu. S'il retombe sur un seul carreau, on dit qu'il tombe ***franc****, et celui qui l'a jeté gagne. S'il tombe sur deux ou plusieurs carreaux, celui qui l'a jeté perd. C'est un problème à résoudre et qui n'a point de difficulté : trouver la probabilité de gagner ou de perdre, les carreaux et l'écu étant donnés.*

On précise pour les élèves le jeu en détail :
– on utilise un **damier** constitué de carrés identiques ;
– on lance au hasard une pièce sur ce damier ;
– si **la pièce chevauche** une des lignes du quadrillage, le lancer est « **Perdu** » ;
– si **la pièce est entièrement à l'intérieur d'une case du damier**, on dit que le lancer est réussi » ou que la pièce est « **Franc-Carreau** » ;

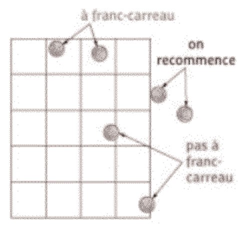


Figure 1. Situations possibles

– si **la pièce est tangente**, le lancer est considéré comme « **Perdu** » ;
– si **la pièce sort du damier**, on ne compte pas cet essai et on **relance** la pièce.

On réfléchit alors avec les élèves aux conditions qui permettront de considérer que le hasard est réalisé. Un seul grand carreau et un lancer de près ne conviennent pas. On sera amené à utiliser de nombreux carreaux, quitte à réduire la taille de la pièce si nécessaire. Ce sujet a donné lieu à beaucoup de questions et à un mini-débat sur la manière de lancer le dé :
« *Si tu fais exprès, tu gagnes à tous les coups* », « *C'est pas du hasard, car un bon lanceur va gagner plus souvent* », « *Si le carreau est grand, on va toujours gagner* »…
On peut remarquer que cette question des conditions de lancer est pédagogiquement extrêmement utile et formatrice, car elle est celle de tout expérimentateur.
On pourra par exemple adopter comme solution simple :

- une pièce de 1 centime d'euro, de diamètre 1,5 cm ;
- un quadrillage fait sur une feuille A3 ou plus, comportant des carreaux de 2,5 à 4 cm de côté ;
- un lancer effectué d'un peu loin.

Il faudra aussi faire des expérimentations avec des pièces de tailles différentes sur des carreaux de taille donnée, ou des pièces identiques sur des carreaux de tailles variables, voire même des pièces et des carreaux de tailles variables.

Partie II (niveau collège). Conjecturer.

Chaque élève confronte ses propres résultats avec ceux des autres élèves…, ce qui fait éclore les premières conjectures :
« *À carreaux fixés, plus la taille de la pièce est grande et plus on risque de perdre.* »
« *À pièce donnée, plus la taille des carreaux est grande et plus on a de chances de gagner.* »
« *C'est mieux encore avec une plus petite pièce sur des plus grands carreaux.* »
« ***Gagner, cela dépend donc de la taille de la pièce par rapport à la taille des carreaux !*** »

Partie III (niveau collège). Expérimenter.

Voici les questions posées aux élèves :

1. Lancer 20 fois la pièce sur le damier. Noter le nombre de fois où la pièce est franc-carreau.

   ....

2. Calculer la fréquence des francs-carreaux obtenus.

   ....

3. Comparer cette fréquence à celles obtenues par les autres élèves de la classe. Que constate-t-on ?

   ....

4. Compléter le tableau suivant, où l'on cumule, élève après élève, le nombre de lancers et le nombre de francs-carreaux :

Numéro de l'élève	1	2	3	4	5	6	7	8	9	…
Cumul du nombre de lancers	20	40	60	80	100	120	140	160	180	…
Cumul du nombre de francs-carreaux										
Fréquence de francs-carreaux en écriture décimale										

5. Quelle(s) remarque(s) peut-on faire à partir des résultats regroupés dans ce tableau ?
   ....
   ....
6. Calculer la fréquence des lancers réussis pour l'ensemble des élèves de la classe ……………………
7. Sur une échelle de 0 à 100, où placeriez-vous vos chances de gagner à chaque lancer ? ………......

Partie IV (niveau collège). Simuler.

Grâce à un ordinateur, on peut tenter de faire comme si on répétait un très grand nombre de fois cette expérience aléatoire (le lancer de la pièce sur le damier). Par exemple ***100 fois, 500 fois, 1000 fois !***

On dit alors qu'on fait une **SIMULATION** du jeu.

Cette méthode peut être plus commode (et surtout plus rapide !) que de lancer soi-même réellement la pièce.

Et le **tableur** permet, entre autres, de réaliser une telle simulation.
Élaborer une telle simulation sur tableur est difficile pour un élève de troisième ; on donne ici une formule car elle utilise des fonctions imbriquées, mais l'explication de cette formule est donnée.

Analysons le problème et faisons comme si l'expérience revenait à lancer une pièce de 10 centimes d'euro (de taille 2 cm, représentée par différents cercles) à l'intérieur d'un carré de 5 cm de côté (représenté en vert) comme le montre la figure ci-contre. Ici le damier ne comporte qu'une seule case.
La pièce centrée en K réalise franc-carreau alors que les pièces centrées en I, J et L ne le réalisent pas.

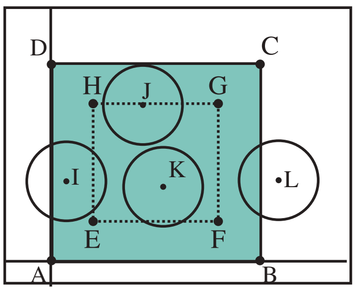
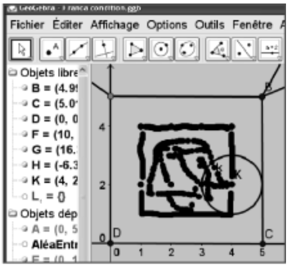


Figure 1

Question ouverte : Comment tester avec un tableur que la pièce a fait un « franc-carreau » ?

C'est un nœud du problème qu'il ne s'agit pas de parachuter. Le professeur peut entendre et faire débattre des diverses solutions proposées.

Lors de la réalisation de cette activité, c'est évidemment l'idée du rapport des aires qui a posé un véritable obstacle, avec de nombreuses hypothèses plus ou moins intéressantes, plus ou moins exploitables par le professeur. « *On a gagné si le rayon tombe dans le carré sans les coins* ». Un élève a proposé ensuite de « *faire la maquette avec un carton* » et d'observer ce qu'il y a de remarquable quand on gagne :



On pourra s'aider d'un disque en carton percé au centre que l'on promène sur un carré dessiné au tableau, ou d'un logiciel comme Geogebra qui laissera les traces du centre.

Il faudra patienter pour que les élèves pensent à la position du centre et à ses limites dans un carré à préciser…
…mais quatre groupes d'élèves y ont pensé !

On peut obtenir un exemple de simulation sur un carreau à l'adresse www.apmep.asso.fr, rubrique Publications / Le Bulletin Vert / Supplément en ligne au BV.

« Maintenant que nous avons une condition précise de franc-carreau, nous allons demander à l'ordinateur, par l'intermédiaire du tableur, de recommencer le jeu du franc-carreau un très grand nombre de fois (bien supérieur aux 20 lancers que vous avez effectués !) et de regarder ce que l'on peut éventuellement conjecturer. »

Pour cela, ouvrir le fichier « Franc-carreau.ods » ou « Franc-carreau.xlsx ».

1\. En utilisant la fonction « =ALEA( ) » qui donne un nombre aléatoire entre 0 et 1, compléter les cellules B2 et C2 de façon à obtenir deux nombres aléatoires compris entre 0 et 5, avec deux chiffres après la virgule.
Ces deux nombres correspondent aux coordonnées du centre de la pièce à chaque fois que le tableur réalise un lancer.

2\. Étendre ces deux formules jusqu'aux cellules B501 et C501.

2\. Saisir dans la cellule D2 la formule :
=SI(ET(B2>1;B2<4;C2>1;C2<4);"Oui";"Non").

Explication

Cette formule demande à l'ordinateur :
« **SI** *l'abscisse (B2) est supérieure à 1* **ET** *inférieure à 4* **ET SI** l'ordonnée *(C2) est supérieure à 1* **ET** *inférieure à 4 alors affiche « Oui », sinon affiche « Non »* ».
Donc lorsque « Oui » s'affiche, c'est que le franc-carreau est réalisé.

4\. Nous allons maintenant observer ce qu'il se passe au fur et à mesure que le nombre de lancers augmente en calculant la fréquence des francs-carreaux.
Pour cela saisir dans la cellule E2 la formule : =NB.SI(D2:D2;"Oui")/A2.

Explication

Cette formule demande à l'ordinateur de :
« *compter* (**NB.SI**) *dans la plage de cellules D2 à D2 le nombre de fois où*

apparaît le « Oui », puis de diviser ce nombre par le nombre de lancers réalisés (A2) ».

5. Étendre alors les formules de D2 jusqu'à D501 et E2 jusqu'à E501.
   « *Les symboles **$** avant le **D** et avant le **2** indiquent que cette référence à la cellule D2 ne change pas lorsqu'on étend la formule* ».
6. Construire alors le diagramme (Ligne) correspondant à la plage E1:E501.
7. Appuyer plusieurs fois sur F9 (l'ordinateur relance à chaque fois 500 fois la pièce) et conjecturer un résultat sur les chances de gagner à ce jeu.

   Conjecture : la probabilité de gagner au jeu de franc-carreau à chaque lancer est environ comprise entre ….. et …….
8. Comparer votre réponse à celle donnée à la question 7 de la partie III.

Partie V (niveau collège). Démontrer.

Le centre de la pièce est toujours à l'intérieur du carré ABCD (sinon, comme on l'a dit, on ne compte pas le lancer et on relance la pièce).

Un lancer est franc-carreau si le centre de la pièce est à l'intérieur du carré EFGH dont les bords sont à 1cm des côtés du carré ABCD (cf. Figure 1).

1. Calculer l'aire $\mathcal{A}_{\text{ABCD}}$ et l'aire $\mathcal{A}_{\text{EFGH}}$ des deux carrés.
   ....
   ....
2. Pour gagner, il faut que le centre de la pièce soit dans le carré EFGH. On admettra que la probabilité de réaliser « Franc-carreau » est égale au quotient de l'aire du carré EFGH par l'aire du carré ABCD, c'est-à-dire :

$$\text{P}\left(\text{Franc-carreau}\right) = \frac{\mathcal{A}_{\text{EFGH}}}{\mathcal{A}_{\text{ABCD}}}.$$

3. Écrire cette probabilité sous forme fractionnaire, puis en donner une valeur décimale au centième près.
   ....
   ....
3. Comparer ce résultat avec la conjecture de la partie III.

Partie VI. Conclusion (au collège).

« La **probabilité** d'un évènement peut s'obtenir **approximativement** en réalisant **un grand nombre de fois** une expérience et en calculant la **fréquence** des réalisations de cet événement ».
Je peux donc affirmer qu'à mon jeu de « Franc-carreau », la probabilité de gagner est d'environ ….

Partie VII. Prolonger en seconde ».

« *Les premiers éléments de probabilité ont été abordés au collège essentiellement dans des simulations de jeux. Cela a permis une première approche de quelques lois* *de probabilité qui seront progressivement décontextualisées au lycée en vue de fournir des modèles pour d'autres champs d'application…* »

Cet exercice peut être effectué en totalité, ou repris et complété par la simulation du jeu à l'aide d'un logiciel.

En seconde, les élèves doivent assimiler les notions de distribution de probabilité, comme celles de réunion, intersection, et contraire d'événements.

Le problème peut, dans ce contexte, être posé de **façon entièrement ouverte** après avoir exposé la règle du jeu.

« **Au jeu de « franc-carreau » quelle est la probabilité de gagner ?** »

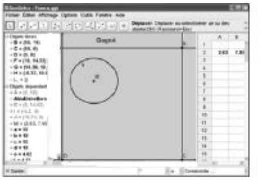
En laissant du temps, en classe comme à la maison, **il appartiendra aux élèves de faire toutes les démarches**, y compris le choix du logiciel de simulation et de la conception nécessaire à la simulation.

La dernière version de *GEOGEBRA*, logiciel libre de géométrie, convient parfaitement puisqu'elle dispose d'un tableur intégré.

On peut obtenir un exemple de simulation sur un carreau à l'adresse www.apmep.asso.fr, rubrique Publications / Le Bulletin Vert / Supplément en ligne au BV, et la touche F9 permet de relancer la simulation.

Il suffit d'utiliser les cellules du tableur pour effectuer un grand nombre d'essais et calculer les fréquences observées.

Un tableur convient, mais l'idéal est de combiner tableur et géométrie : « *Les distributions de probabilité peuvent être estimées par observation de la stabilisation des fréquences sur de longues séries d'expériences ou par des considérations géométriques ou physiques en référence à l'équiprobabilité.* »



Partie VIII. Tester le modèle.

Les élèves de seconde doivent être familiarisés avec la notion difficile de la fluctuation d'échantillonnage.

Un scénario d'activité a montré que des élèves de seconde parviennent à l'intuition que la probabilité pourrait être le rapport des aires.

On décide alors d'adopter ce modèle théorique, qui semble fournir des résultats proches de ceux obtenus par l'observation des fréquences.

La valeur obtenue par des considérations géométriques est de $\frac{9}{25} = 0.36$.

On peut donc demander aux élèves de tester ce modèle, par exemple lors du lancer d'une pièce de 2 cm de diamètre sur des carreaux de 5 cm de côté.

Les résultats expérimentaux ont donné une fréquence observée de $f = 0.34$ sur un total de 34×20 essais, soit $n = 680$.

On adopte donc $p = 0.36$ comme valeur théorique de la probabilité.

L'intervalle de fluctuation donne alors $\left[0.36-\frac{1}{\sqrt{680}},0.36+\frac{1}{\sqrt{680}}\right]$.

Une nouvelle simulation de 500 lancers a montré que 97% des résultats sont dans l'intervalle de fluctuation.

Le modèle théorique semble donc acceptable.

Partie VIII. Conclusion générale.

Dans le cadre proposé par les programmes officiels et dans l'esprit d'une réelle démarche scientifique (expérimentation, simulation, démonstration), l'activité du Franc-carreau permet au niveau collège (classe de Troisième), puis au lycée, d'aborder l'approche fréquentiste de la notion de probabilité sans connaître a priori la probabilité recherchée. Elle donne également un premier exemple très parlant de validation d'un modèle (classe de Seconde) à partir de considérations géométriques, même si des difficultés sont inévitables quant à la justification du fait qu'il s'agit en réalité d'une probabilité continue sur une partie du plan et non d'une probabilité discrète, du choix de l'utilisation d'une probabilité uniforme et du remplacement de la pièce de monnaie par son centre.

Cette activité peut être encadrée de bout en bout par le professeur qui n'a rejeté aucune proposition des élèves, et les a toujours mises en débat, les élèves pouvant être acteurs pendant toute l'activité.

Le fait d'agir sur les trois niveaux (expérimenter, simuler, théoriser) nous a paru excellent car peu d'activités sont aussi aisément accessibles dans ces trois parties.

On a pu varier les séances et utiliser le temps de travail à la maison ; le travail individuel sur écran et le travail par groupes. On a aussi pu constater de véritables progrès dans l'utilisation des logiciels.

Parmi toutes les activités testées cette année, c'est indiscutablement celle qui a donné le plus satisfaction, aux professeurs, et surtout aux élèves.

Éléments de bibliographie

BUFFON, G. L. Leclerc de (1733). Solution de problèmes sur le jeu du franc-carreau. Mémoire présenté à l'Académie Royale des Sciences. In *Essai d'arithmétique morale, Histoire Naturelle, générale et particulière, Supplément, tome quatrième*, Paris, Imprimerie Royale, 1777, 46-148.

GROUPE STATISTIQUE (1996). *Une activité probabiliste au collège, le jeu du Franc-Carreau*. Éd. IREM de Rouen.

MIEWIS, J. (2006). Le jeu de Franc-Carreau. *Math-Jeunes* numéro spécial S, p. 2-3.