# Alors argent ou pas ? Euh … je serais assez platine

Richard Choulet(*)

## I. Petite chronologie introductive

Relecteur d'un article du B.V. qui parlait, de nombres « métaux »(1), je me suis intéressé à ce qu'en proposait l'Internet, pour préparer un atelier lors de notre journée de la régionale de Normandie Ocidentale en mars 2007 sous le titre « Métaux, Fibo, Bingo : le prix du métal s'emballe ».

Le congrès des professeurs belges de mathématiques sur le thème « Mathématiques, Arts et Littérature ». m'a donné l'occasion et la motivation pour enrichir l'atelier dans le domaine historique, artistique et culturel. Il en a résulté un article dans la défunte revue de nos collègues « Mathématiques et Pédagogie ». Ce texte de l'atelier, présenté lors du congrès de la SBPMef à Mons en août 2007. est visible à l'adresse http ://www.apmep.asso.fr/IMG/pdf/nbag.pdf. Le travail présenté ici, donc plus de deux ans après, reprend certains aspects de la partie mathématique de cet article après vérification de la validité des adresses en www alors citées.

Faisons donc notre plein de friandises à travers le marché pittoresque d'Internet.

## II. Les boutiques d'argenterie ne manquent pas

1. Un premier boutiquier [L5] nous propose – je ne pense pas que cela soit de la contrebande mais il y a quand même beaucoup trop de produits – des nombres d'argent : « nombre positif (c'est moi qui dit positif) égal à son inverse plus lui-même ». Cette définition est du toc, le commerçant voulant dire que l'on cherche les nombres S($n$) (sans doute que $n$ est entier) tel que $\mathrm{S}(n) = n + \dfrac{1}{\mathrm{S}(n)}$.

D'abord, il est singulier que le Nombre d'Or usuellement noté(2) $\Phi$ soit ramené au rang d'un vulgaire nombre d'argent. Ensuite l'équation qui régit ces nombres n'est que du second degré $x^2 - nx - 1 = 0$ (c'est d'un banal !) : on a sa valeur $\psi_n = \dfrac{n+\sqrt{n^2+4}}{2}$. Il n'est pas indiqué que $n$ soit exclusivement entier, mais c'est mieux si l'on veut faire des fractions continuées et cela donne alors ce résultat, gentillet : $\psi_n = n + \dfrac{1}{x} = n + \dfrac{1}{n+\dfrac{1}{x}} = \ldots$, noté encore [n ; n ; n ; …]. Bref, tout ce qui

(*) Lycée Augustin Fresnel CAEN. richardchoulet(Q)yahoo.fr

(1) Numéro 469.

(2) Pour l'instant : solution positive de l'équation $x = 1 + \dfrac{1}{x}$.

est rare étant cher…, je dirais que ce n'est pas cher mais on peut s'amuser avec cette bimbeloterie et au moins, ça a le mérite d'exister : il y a aussi beaucoup d'autres choses intéressantes à côté.

2. En sillonnant ce dédale, j'ai aussi trouvé un magasin [L] qui proposait (it was en étranger) de la constante d'argent comme la plus grande solution réelle positive de $x^3 - 5x^2 + 6x - 1 = 0$, en fait $2+2\cos\frac{2\pi}{7} = 3{,}246\ 979\ 603\ldots$ : il y avait là un petit côté aguicheur car il était écrit en grand que it is thé seventh Beraha number ce qui ne pouvait manquer d'attirer nombre de touristes en mal d'exotisme. On n'achète certes pas « un c'at dans une pouc' »(3) as said my mother mais voici quelques petits souvenirs. Le $n$-ième nombre de Beraha est $\mathrm{B}(n) = 2+2\cos\frac{2\pi}{n}$. Dans cette terminologie B(5) est le nombre $\Phi + 1$. B(7) est la constante d'argent du boutiquier et $\mathrm{B}(10) = \Phi + 2$. En notant $\alpha = \sqrt[3]{7+7\sqrt[3]{7+7\sqrt[3]{7+\ldots}}}$, ce qui veut dire en fait $\begin{cases}\alpha \geq 0 \\ \alpha^3 = 7\alpha + 7\end{cases}$, on démontre que $\mathrm{B}(7) = 2 + \frac{\alpha+2}{\alpha+1} = 3 + \frac{1}{\alpha+1}$.

## III. Où je déniche du sérieux

Dans cette troisième échoppe, la définition possible de nombre d'argent prolonge l'idée de la définition du nombre d'or et se trouve donc avoir une interprétation géométrique ([L8]). Rappelons que la section d'un segment de longueur $a + b$ est « dorée » si et seulement si il existe un réel $k > 0$ tel que $k = \frac{a}{b} = \frac{1}{a}$ avec $a + b = 1$ ; ce réel $k$ est en fait $\Phi$.

Le nombre d'argent proposé à la définition apparaît ainsi. Dans le partage d'un segment unité en trois segments de longueurs respectives $a$, $b$ et $c$, la section est « argentée » si et seulement si existe un réel $k > 0$ tel que $k = \frac{1}{a} = \frac{a}{b} = \frac{b}{c}$. $k$, solution positive de $x^3 = x^2 + x + 1$, est alors appelé nombre d'argent et noté $\Psi$.

En souvenir du nombre d'or. solution positive de l'équation $x^2 = x + 1$, on pourrait appeler nombre métal d'ordre $m$ la solution positive de l'équation $x^m = x^{m-1} + x^{m-2} + \ldots + x + 1$ (lorsque $m$ est pair il y a une autre solution réelle). Pour $m = 2$, c'est le nombre d'or $\Phi$ : pour $m = 3$, c'est le nombre d'argent défini ci-dessus. Au-delà, de trois, le tableau de Mendeleïev n'y suffira pas. donc arrêtons les qualificatifs. D'ailleurs au passage, si on est tenté de poursuivre avec le bronze, le bronze n'est pas un métal. Pourquoi pas du chocolat ?

Nous avons les valeurs

(3) Formule aborigène de Normandie se traduisant par « un chai dans une pouliche ; la pouliche est le sac indispensable de l'éleveur de lapins pour aller cueillir des séneçons, laiterons, pattes d'oie et autres pissenlits.

$$\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1{,}618\,03\ldots$$

et

$$\Psi = \sqrt[3]{\frac{19+3\sqrt{33}}{27}} + \sqrt[3]{\frac{19-3\sqrt{33}}{27}} + \frac{1}{3} = 1{,}839\,286\,755\,214\,16\ldots$$

Signalons aussi les développements en fractions continuées de ces deux nombres.

Eu ce qui concerne le nombre d'or, c'est facile à. obtenir puisque $\Phi = 1+\frac{1}{\Phi}$ permet en itérant d'avoir $\Phi$ = [1 ; 1 ; 1 ; 1 ; …] dont les réduites successives sont les quotients des nombres de la suite de Fibonacci usuelle $1, 2, \frac{3}{2}, \frac{5}{3}, \frac{8}{5}, \frac{13}{8}, \ldots$

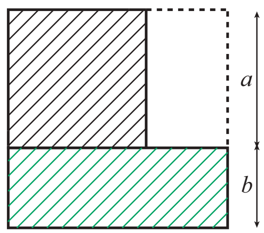
Quant au nombre $\Psi$, on obtient,

$$\Psi = [1 ; 1 ; .5 ; 4 ; 2 ; 305 ; 1; 8 ; 2 ; 1 ; 4 ; 6 ; \ldots]$$

qui donne pour premières réduites :

$$1, 2, \frac{11}{6}, \frac{46}{25}, \frac{103}{56}, \frac{31\,461}{17\,105}, \frac{31\,564}{17\,161}, \frac{694\,395}{377\,486}, \ldots$$

Géométriquement on peut. faire un parallèle entre or et argent comme l'illustrent les figures suivantes.




Les parties hachurées ont même aire lorsque :

$$x = \frac{a}{b} = \frac{1}{a} = \Phi \text{ avec } a+b=1.$$

puisque $a^2 = ab + b^2$ se traduit par :

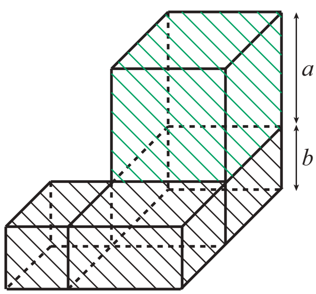
$$\begin{cases} x^2 - x - 1 = 0 \\ x \geq 0 \end{cases}$$

Les parties hachurées ont même volume lorsque :

$$x = \frac{a}{b} = \Psi$$

puisque $a^3 = a^2b + b^2a + b^3$ se traduit par :

$$\begin{cases} x^3 - x^2 - x - 1 = 0 \\ x \geq 0 \end{cases}$$




## IV. À nous les trésors !

Dans ce magasin, au demeurant bien achalandé ([L2]). est appelée *nombre d'argent* (ou constante plastique ou encore nombre plastique (là ça fait un peu déchetterie) la solution positive de l'équation $x^3 = x + 1$. On peut se dire en arrivant à l'entrée que ce sera un peu comme ailleurs, mais là on se trompe lourdement. Certes laisser tomber le $x^2$ par rapport au paragraphe précédent n'est pas très révolutionnaire. Et pourtant. jugez-en plutôt.

Cette équation est l'équation caractéristique des suites satisfaisant la récurrence linéaire R : $u_{n+3} = u_{n+1} + u_n$. Il y a deux suites répertoriées vérifiant R.
La suite de Padovan $P_a$ ([Ll]) pour laquelle $u_0 = u_1 = u_2 = 1$ ; elle commence donc par : 1, 1, 1, 2, 2, 3, 4, 5, 7, 9, 12, 16, 21, 28, … et a pour fonction génératrice

$$x \mapsto \frac{1-x^2}{1-x^2-x^3}.$$

La deuxième suite est la suite de Perrin $P_e$ pour laquelle $u_0 = 3$, $u_1 = 0$ et $u_2 = 2$ ; elle commence par : 3, 0, 2, 3, 2, 5, 5, 7, 10, 12, 17, 22, 29, 39, … et a pour fonction génératrice $x \mapsto \dfrac{3-x^2}{1-x^2-x^3}$.
La suite fondamentale qui satisfait R pour tout entier, est. quant à elle. définie par $G_0 = 0$. $G_1 = 1$ et $G_2 = 0$, ce qui fait que les premières valeurs en sont : 0, 1, 0, 1, 1, 1, 2, 2, 3. …, autrement dit une translatée de la suite de Padovan.
Plus précisément chacune des suites précédentes s'écrit à l'aide de la suite fondamentale et ainsi obtient-on pour tout entier $n$ (on pose $G_{-1} = 0$) :

$$P_a(n) = G_{n+1} + G_n = G_{n+4} \text{ et } P_e(n) = 3G_{n+1} - G_{n-1}.$$

Ce nombre d'argent $\Psi$ est égal à

$$\frac{\left(9-\sqrt{69}\right)^{\frac{1}{3}} + \left(9+\sqrt{69}\right)^{\frac{1}{3}}}{2^{\frac{1}{3}}3^{\frac{2}{3}}} = 1,324\,717\,95\ldots = [1;3;12;1;1;3;2;\ldots].$$

Un intérêt de la définition donnée de ce nombre réside dans le résultat suivant : il n'y a que <u>deux nombres réels</u> $x > 1$ pour lesquels existent des entiers naturels $k$ et $\ell$ satisfaisant à :

$$\begin{cases} x+1 = x^k \\ x-1 = x^{-\ell} \end{cases}.$$

Ces deux nombres sont le nombre d'or et ce nombre d'argent.

Le nombre d'or $\Phi$ vérifie : $\begin{cases} \Phi+1 = \Phi^2 \\ \Phi-1 = \Phi^{-1} \end{cases}$, et le nombre d'argent $\Psi$ est tel que : $\begin{cases} \Psi+1 = \Psi^3 \\ \Psi-1 = \Psi^{-4} \end{cases}$. La démonstration faite par Aarts *et alii* date de 2001 (voir [2] où ces auteurs parlent des *nombres morphiques*). Le problème est de démontrer que le système $\begin{cases} x^k - x - 1 = 0 \\ x^{\ell+1} - x^{\ell} - 1 = 0 \end{cases}$ n'a qu'une seule solution réelle si et seulement si $(k ; \ell) \in \{(2 ; 1) ; (3 : 4)\}$.

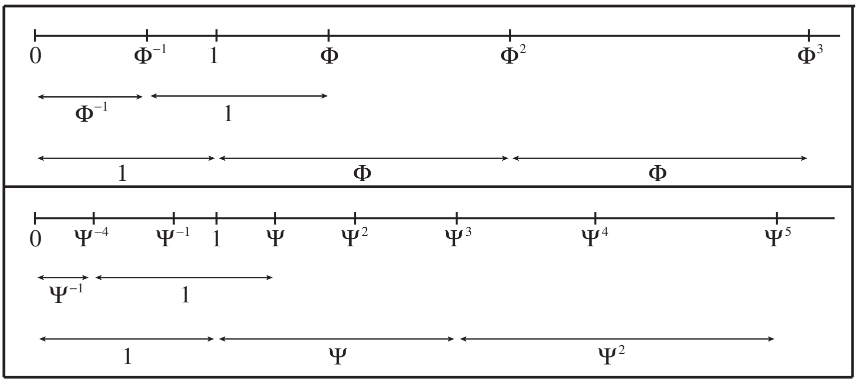
## V. Or-Fibonacci, Argent-Padovan : Même combat !

### 1. Système de mesures

Nous avons vu l'origine commune des nombres d'or $\Phi$ et d'argent $\Psi$ (celui du paragraphe 4 !) comme seules solutions d'un système d'équations : ce système a une source géométrique.

Appelons système de mesures associé au réel $q > 1$ la suite géométrique $(q^n)_{n\in\mathbb{N}}$. Si l'on considère cette échelle pour mesurer des longueurs de segments, deux conditions de compatibilité sur ce système doivent être satisfaites. Tout d'abord. en juxtaposant deux segments de mesure consécutive $q^k$ et $q^{k+1}$, on obtient un nouveau segment dont la mesure est un certain $q^n$ ($m = k + 2$ avec $q = \Phi$ ou $m = k + 3$ avec $q = \Psi$). D'autre part en superposant deux segments de mesure $q^{k-1}$ et $q^k$ on obtient un nouveau segment « différence ». dont la mesure doit être un certain $q^n$. On voit ainsi que cela se ramène, par équivalences à trouver $x > 1$ tel que $\begin{cases} x+1 = x^k \\ x-1 = x^{-\ell} \end{cases}$.

Ce qu'on a dit an paragraphe précédent montre donc qu'il n'y a que deux systèmes de mesures possibles. Le schéma ci-dessous illustre chacune des situations $q = \Phi$ et $q = \Psi$.

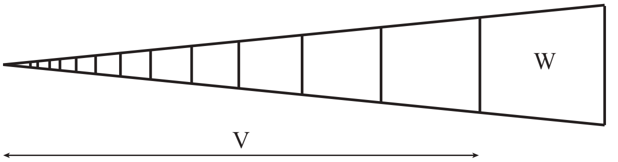



### 2. Rappel sur la notion de gnomon

Si étymologiquement. gnomon évoque l'idée de mesure du temps par un bâton planté en terre pour repérer l'ombre qu'en laisse le soleil, a coexisté également du point de vue numérique chez les Grecs cette idée que le gnomon est le truc qu'il faut ajouter pour que « ça reste pareil» : $2n + 1$ est gnomon du carré $n^2$ puisque la somme donne $(n + 1)^2$ qui est encore un carré. D'ailleurs on arrive rapidement à la même idée géométrique puisque $n^2$ est l'aire du carré de côté $n$ tandis $2n + 1$ est l'aire de l'équerre bordant ce carré pour faire un nouveau carré.

D'où cette définition plus moderne de gnomon en géométrie euclidienne (plane ici) qu'une figure W est gnomon de V pour traduire qu'existe une similitude de $W \cup V$ vers V de rapport $\lambda$ avec $0 < \lambda < 1$ : on peut consulter par exemple

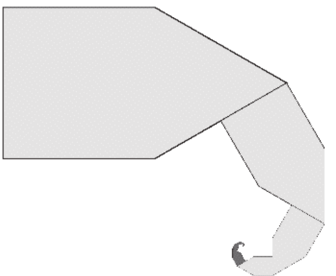
http ://expo.ifrauce.com/lenombre/pentag.htm
pour lier triangles d'or et pentagrammes. Voici un autre exemple pas trop évident d'une situation de Thalès avec des parallèles bien choisies telles que l'offre le schéma suivant :




Cette configuration de gnomons en cascade rappelle la disposition des barrettes sur certains instruments de musique (guitare, …) puisque qu'il y a, à la clé, des suites géométriques.

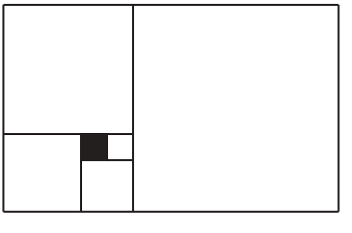
Ou peut imaginer sans peine qu'il y a une condition structurelle qui lie gnomon et forme associée et qu'on ne peut faire n'importe quoi.

Plus précisément, sur une conjecture de GAZALÉ (page 143 de son livre [3]). AARTS *et alii* ont démontré ([1]) que dans le cas où l'on suppose W polygone convexe (avec un nombre fini de côtés par définition). celui-ci a au maximum six côtés. Lorsque le polygone est supposé de plus régulier, W ne peut être qu'un *triangle équilatéral* ou un *carré*. Mézalor quelles formes peut-on associer ? Sous la condition de finitude, il n'y a que deux cas possibles. La variété ne manque pas dans le cas où l'ensemble comprend une infinité de côtés ou lorsqu'on n'impose plus de prendre un gnomon régulier comme l'illustrent le dessin qui suit avec le gnomon hybride d'un carré et d'un triangle équilatéral :

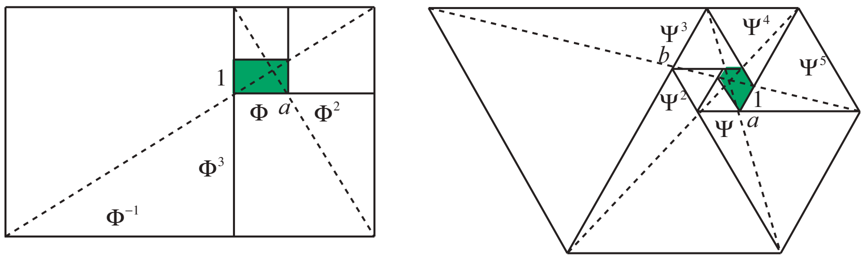


**Une des pinces d'or du crabe ?**

## 3. Rectangle doré : premier gnomon polygone convexe régulier



Dès que l'on complète un rectangle par un carré et que l'on recommence *ad libitum*, il y a de la suite de Fibonacci dans l'air. Dans le dessin ci-contre, on part du carré noir de côté 1. les carrés successifs, s'enroulant dans le sens indirect, ont pour longueur de côté 1, 1, 2, 3, 5, 8, …. Ce sont les nombres de la suite de Fibonacci F qui satisfait la récurrence $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$. On sait que les quotients consécutifs formés par les longueurs des côtés tendent vers le nombre d'or $\Phi = 1{,}618\ldots$ Nous ne sommes pas ici dans la situation de figures semblables contrairement au cas connu du rectangle d'or ou, plus exactement, de la spirale des rectangles d'or comme il suit.



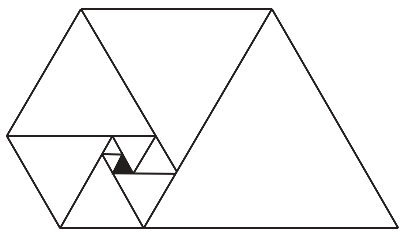

**À gauche des rectangles d'or, à droite des pentagones d'argent.**

**4. Pentagone d'argent : second gnomon polygone convexe régulier**

La situation géométrique abordée maintenant est à mettre en parallèle avec le 3 qui précède, et l'introduction de la suite de Fibonacci.

En partant du triangle équilatéral noir de côté 1, les triangles successifs, s'enroulant dans le sens indirect, ont pour longueur de côté 1, 1, 1, 2, 2, 3, 4, 5, 7, 9, 12, 16, 21, … Ce sont les nombres de la suite de Padovan $P_a$ qui satisfait la récurrence

$$P_a(n+1) = P_a(n-1) + P_a(n-2).$$



Les quotients consécutifs formés par les longueurs des côtés tendent vers le nombre d'argent, $\Psi = 1{,}324\,717\ldots$

La « figure d'argent » ci-dessus à droite, est obtenue ainsi : on part d'un pentagone particulier (celui hachuré où apparaît $\omega$) puisqu'il a quatre angles de 120° et un de 60° tandis que ses côtés, dans l'ordre approprié aux angles, sont proportionnels à $\Psi$, $\Psi^2$, $\Psi^3$, $\Psi^4$ et $\Psi^5$.

En accolant, dans le sens indirect, un triangle équilatéral, on obtient un nouveau pentagone semblable au premier dans le rapport $\Psi$ et ainsi de suite. On peut faire de même dans le sens direct dans le rapport inverse, ce qui n'a pas été entrepris ici pour avoir une lecture plus aisée. On conçoit facilement la convergence des pentagones vers le point $\omega$.

# VI. Conclusion

Dans cet article, n'a été abordée que la partie technico-mathématique, sans même évoquer l'histoire humaine et artistique (voir par exemple [4] et [5]) qui se cache derrière la sécheresse des nombres.

Pour garder le caractère de richesse et d'unicité du nombre $\Psi$ sur lequel nous avons disserté, on devrait plutôt l'appeler nombre de platine ; étymologiquement le mot platine en français vient de l'espagnol *plata* (argent) en fait par *platina* qui en est un diminutif traduisant l'idée, lors de sa découverte, d'argent de deuxième zone ou de plus basse extraction : le platine a été découvert en Amérique du Sud vers 1750. Par ailleurs le platine est plus précieux que l'or ; Φ, le nombre d'or, se construit à la règle et au compas alors que…

Ainsi, de mon point de vue. il n'y aurait que deux nombres précieux : le nombre d'or et le nombre de platine. Dans ces conditions, on pourrait mettre sans aucun inconvénient tous les autres nombres d'argent dans un coffre plus ou moins bien gardé dans une banque peu regardante sur la nature des fonds : je vous laisse le choix, les pays de complaisance ne manquent pas ! Le nombre Ψ, quel que soit le nom qu'on lui donne, a-t-il été vu dans la nature ? Ceci est une autre question, qui sera sans doute résolue des qu'on aura passé suffisamment de temps à observer la nature.

## VII. Bibliographie

[1] Aarts, Fokking, *On gnomons*, Math. Vesnik, 55, (2003), 59-64.

[2] Aarts, Fokking, Kruijtzer, *Morphic numbers*, Nieuw Archiev Wiskunde 1, (2001), 56-58.

[3] Gazalé J. Midhat, *Gnomon, from Pharaons to Fractals*, Princeton University Press, 1999.

[4] Steward Ian, *Tales of a Neglected Number*, Scientific American, June 1996.

[5] Van der Laan Hans. Le nombre Plastique, Ed. Brill, Leiden, 1960.

[6] Liens Internet

[Ll] http ://en-wikipedia.org/wiki/Padovan_sequence

[L2] http ://fr. wikipedia. org/wiki/Nombre_plastique

[L3] http ://pagesperso-orange.fr/gery.huvent/irem/metal.pdf

[L4] http ://pagesperso-orange-fr/jean-paul.davalan/liens/liens_fibo.html

[L5] http ://villemin.gerard.free/wwwgvmm/Nombre/FCrectan.htm

[L6] http ://www.mathworld.wolfram.com : de tout sur toutes les maths, enfin presque toutes…

[L7] http ://www.research.att.com/-njas/sequences : plus de 159 000 suites sont passées au peigne fin !

[L8] http ://www.univ-lemans.fr/-hainry/articles.html