Atelier scientifique au collège : mathématiques et modélisation en 3D

Francis Loret

En France, comme dans de nombreux pays développés, les effectifs des filières scientifiques sont, depuis plusieurs années, en régression. Les enquêtes récentes(1) qui étudient les facteurs de cette désaffection s'accordent sur plusieurs points : les jeunes pensent que la science est nécessaire. Pourtant, ils la considèrent comme une activité solitaire, « froide » et à faible potentiel humain(2).

C'est sur la base de ces constats qu'est né l'Atelier Scientifique Euclide du collège Albert Camus de Miramas : comment, dès le collège, mettre en place des actions qui permettent aux élèves de percevoir les dimensions méconnues par eux de *l'humaine science* ? Comment leur montrer que la démarche des grands découvreurs est profondément humaine et vivante ? Voilà la difficile mission qui est la nôtre. Pourtant, un certain nombre de grandes questions abordées dans le supérieur, parmi celles qui présentent un intérêt immédiat pour des adolescents, peuvent être rendues accessibles sous forme d'initiation à des collégiens de tout niveau, du moment qu'ils relèvent le défi de la curiosité. Les trous noirs, la structure de l'univers revisitée par les géométries non euclidiennes, l'approche d'une notion aussi fascinante que *l'infini*, la naissance d'une intelligence artificielle grâce aux développements de la logique formelle, etc., ne sont-ils pas des thèmes en mesure de susciter une fascination au moins aussi importante que cette génération veut bien vouer à des films comme *Matrix*, ou des jeux vidéos comme *Final fantaisy* ? En quoi ces questions sont-elles susceptibles d'ouvrir des portes sur des univers fascinants, où la réalité scientifique dépasse le plus souvent les fictions les plus extravagantes ?

Il s'agit donc de familiariser les élèves avec les grandes questions de la recherche scientifique de manière à susciter des vocations à un âge où la rencontre avec un chercheur ou toute simplement l'implication dans un sujet porteur de sens peuvent jouer de manière déterminante sur l'orientation à venir. Toute cette réflexion est à l'origine du projet « atelier Euclide » , dont les activités proposent à des élèves volontaires de quatrième et de troisième d'aller à la découverte de certaines des grandes thématiques de l'histoire des sciences, mais aussi de la science vivante et contemporaine. Afin de donner corps aux contenus étudiés, nous avons plusieurs fois fait appel ces dernières années à des personnes extérieures à l'établissement susceptibles de rajouter de la vie à une discipline aux mécanismes pour le moins abstraits : rencontre avec des chercheurs, des ingénieurs et déplacement sur des sites.

Parmi les thèmes abordés ces dernières années, on peut citer :

(1) *Europe needs more scientists*, rapport du High Level Group (HLG) on Human Resources for Science and Technology in Europe.

(2) *Pourquoi les filles sont l'avenir des sciences*, par Florence Robine, Inspectrice générale de l'Éducation Nationale.

– **L'étrange rapport entre la mathématique et le réel**, avec étude d'extraits de films comme *Matrix* et *Matrix Reloaded*, le travail sur le mythe de la Caverne de Platon, sur Descartes et Galilée et une ouverture sur des modèles et théories scientifiques modernes ; à cette occasion, les élèves ont travaillé avec un artiste graphiste sur la réalisation d'un film d'animation illustrant le texte de Platon. Rencontre avec un mathématicien poursuivant des travaux sur l'optimisation des protocoles de chimiothérapie, problématique hélas très réelle.

– **Une initiation aux fondements de la logique**, dont l'introduction s'appuyait sur les paradoxes et dilemmes empruntés au film singulier de Spielberg *Minority Report*. Les Sophistes. Aristote et la logique : initiation à la théorie des propositions et des syllogismes. Initiation à la logique moderne : tables de vérité, calcul des propositions. Logique et paradoxes : les approches de Hilbert, Russel et Gödel. Rencontre avec un ingénieur spécialiste en logique et robotique.

– **Les mathématiques peuvent-elles permettre de comprendre l'infini ?** Qu'est-ce que compter ? Notion de bijection. Puissance du dénombrable et puissance du continu. Les problèmes de l'hôtel Hilbert. La suite $\aleph_0$, $\aleph_1$, … et le théorème de Gödel.

– **À la recherche de l'infiniment petit et l'infiniment grand en physique**. Initiation à la physique des particules. Visite du Centre de Physique des Particules de Marseille et rencontre avec un chercheur. Initiation à la cosmologie. Voyage à l'observatoire Saint-Michel.

– **Mathématiques et modélisation informatique en 3D sur le logiciel Blender**(3). Modéliser, texturer, animer un objet : quels outils mathématiques ? Initiation au calcul matriciel, au codage binaire du mode RVB, interpolation linéaire, calcul vectoriel, calcul barycentrique, courbes de Bézier. Réalisation par les élèves de films d'images de synthèse : voyage dans le système solaire, visite virtuelle d'une villa de Pompéi suite à la participation d'une partie des élèves à un voyage en Italie, … Rencontre avec un ingénieur spécialiste du logiciel Blender.

– **L'histoire extraordinaire du Dernier Théorème de Fermat**. Position historique du problème. Quelques points clés de la démonstration d'Andrew Wiles. Équations diophantiennes. Courbes elliptiques et « mathématiques de l'horloge ». Initiation aux différentes formes de raisonnement utilisés en arithmétique : le raisonnement par l'absurde, la descente infinie, la contraposée, le raisonnement par récurrence. Les enjeux de l'arithmétique de haut niveau.

– **Du Vendée-Globe aux trous noirs : d'étranges géométries**(4). Participation des élèves au Vendée-Globe virtuel. Choix de la route en fonction des prévisions météos. Initiation aux grands principes de la météorologie. Optimisation du rapport cap/vitesse et notion de polaire d'un bateau, rôle de la

(3) En annexe 1, le contenu plus détaillé de l'atelier. Le travail issu de cet atelier a été récompensé par la médaille d'or « Grand Prix du CNRS 2008 » au concours national Faites de la Science 2008 ; il est présenté en annexe 2.
(4) Ce travail a reçu en 2009 la médaille d'or « Grand Prix CEA » à la finale nationale de ce même concours.

trigonométrie. Initiation à la géométrie sphérique (somme des angles d'un triangle, orthodromie, loxodromie, …). Initiation à d'autres types de géométries non euclidiennes, notamment aux géométries comprenant des singularités. Notion de courbure positive, négative. Géométrie d'un trou noir.
Rencontre avec un météorologue, mise en contact avec un skipper professionnel, sortie en mer pour une initiation à la voile. Immersion dans un centre de recherche en mathématiques sur le campus de Luminy à Marseille, au sein du laboratoire PYTHEAS, où les élèves ont travaillé pendant trois jours sous la direction de chercheurs. Thème : *géométrie euclidienne et géométries non euclidiennes*.

Ces thématiques peuvent être, *a priori*, jugées peu abordables pour des collégiens. Elles le deviennent pourtant grâce à un travail de simplification en amont, pour ne garder que l'indispensable et l'accessible. Après tout, si l'on considère une matrice comme un simple tableau de nombres, tout élève de quatrième qui manipule correctement les opérations sur les nombres relatifs est capable rapidement d'en faire le produit ou la somme. Si l'on compare la bijection à l'art d'apparier un *danseur* et une *danseuse* dans une soirée pour ne créer que des couples stricts, le concept présente moins de difficultés. Si l'on travaille avec des équations diophantiennes bien choisies, on contourne les difficultés majeures liées au cadre général de ces équations, tout en sensibilisant les élèves à ce type de problème. Par ailleurs, aucune obligation de résultat n'est demandée aux élèves. Chacun doit s'investir à la hauteur de ses envies, à la hauteur de ses moyens. En parallèle de la trame principale de travail, des activités *pour aller plus loin* sont proposées pour satisfaire les plus gourmands. Dans les débuts, en 2002, l'effectif comptait surtout des têtes de classe mais aussi des curieux/dilettantes. Le défi a été d'élargir le public. En 2005, sur un effectif d'une quarantaine d'élèves, répartis en deux groupes, on comptait un tiers d'élèves considérés comme des élèves en difficulté. L'inscription de nombreux élèves jugés en difficulté ces dernières années à l'atelier a clairement été le témoignage d'un besoin : celui d'affirmer qu'eux aussi, même s'ils ne se destinent pas *a priori* à un long parcours d'étudiant, revendiquent l'accès à des questionnements supérieurs. Pas de démagogie : les élèves qui ont les meilleurs résultats en classe restent dans la majeure partie des situations ceux qui ont *l'idée*. Toutefois, dans certaines situations, des élèves considérés habituellement en échec se sont trouvés faire jeu égal avec les meilleurs car le matériel de départ, nouveau pour tout le monde, leur permettait de partir sur les mêmes bases. Trouver une bijection entre l'ensemble des entiers naturels et l'ensemble des nombres relatifs n'est pas nécessairement plus facile parce que l'on a de bons résultats dans un cadre traditionnel.

Comment motiver sur le long terme des élèves nombreux et divers pour des thèmes d'apparence aride ? Il faut d'abord que l'enseignant, par sa présence, instaure un climat de prise de distance, le plus proche possible du *serio ludere* cher aux humanistes de la Renaissance, savant dosage entre la convivialité du jeu et le sérieux du contenu.

Il s'agit finalement de raccorder des univers aujourd'hui trop souvent disjoints. Cet étonnement, cette soif de vérité qui a guidé au jour le jour les Platon, Descartes, Fermat, Hilbert, … seraient-ils le fait de quelques vieux génies, membres d'une humanité révolue ? Ou bien pourrions-nous parier sur le caractère vivant et universel des découvertes réalisées par ces grands hommes, dont on peut faire le vœu qu'il est susceptible d'éveiller la même fascination pour qui se donne la peine de s'y intéresser ?

La démarche consisterait alors à (r)éveiller chez les élèves le goût de la recherche du vrai qui seule peut justifier de la nécessité de savoir lire, écrire, compter, mesurer, comprendre.

Annexe 1 :
Mathématiques et modélisation en 3D :
le contenu de l'atelier

Il pourra paraître surprenant pour bon nombre de collègues de traiter du calcul matriciel, de calcul barycentrique et autres courbes de Bézier avec des élèves de collège, tant il nous paraît déjà difficile de boucler les programmes de l'année avec des acquis sérieux. Il est donc important de préciser les conditions qui ont permis à certains élèves (et non à tous) de traiter ces notions a priori inabordables.

Le niveau et la motivation des élèves.

Si l'atelier regroupe des élèves de tous niveaux (y compris des troisièmes d'insertion), l'effectif est majoritairement composé de bons élèves, motivés car volontaires. Mais cette motivation s'exprime de manière différente : certains se passionneront pour la production concrète pendant que d'autres trouveront du plaisir à s'immerger dans des lignes de calculs. C'est pour cette raison que le contenu et sa progression sont conçus sur plusieurs niveaux, pour s'adapter au niveau et aux envies de chacun.

Le premier niveau du projet (45 élèves)

Dans le projet *Blender*, tous les participants ont été initiés aux images de synthèse (45 élèves répartis sur deux séances). Durant cette initiation, il a été fait systématiquement allusion aux mathématiques qui régissent les différentes fonctions du logiciel de manière à préparer la seconde étape du travail. Au bout de quelques semaines, il se dégageait trois profils d'élèves : ceux qui voulaient aller plus loin dans l'exploration du logiciel, ceux qui souhaitaient découvrir les mathématiques sous-jacentes et ceux qui souhaitaient poursuivre dans les deux directions. La séance du vendredi a donc été entièrement dédiée à la production d'images de synthèse pendant que le jeudi, les élèves volontaires poursuivaient sur le second niveau, à la découverte des mathématiques de la 3D.

Le second niveau (26 élèves)

Dans le foisonnement des outils mathématiques utilisés dans la production d'images de synthèse, il est possible de sélectionner quelques notions qui peuvent être rendues abordables par un travail de vulgarisation approprié. C'est le cas du codage des couleurs en mode RVB, du mode de projection utilisé pour projeter une carte du monde sur une sphère (opération utilisée lors d'une vidéo réalisée par les élèves sur le thème « rotation de la lune autour de la terre ») et du rôle du calcul matriciel dans les transformations courantes effectuées sur les objets.

Le codage couleur RVB

- Qu'est-ce que le mode RVB ?
- Qu'est-ce qu'un bit en informatique ?
- Qu'est-ce qu'une base de numération ?
- Exercices de conversion en base 2 de nombres courants.
- Exercices de codage de couleur en mode RVB.

Un exemple de projection dans Blender

- Faire une recherche internet pour lister différents modes de projection pour passer de la carte du globe à un planisphère (liens avec le programme de géographie).
- Si possible, trouver le calcul permettant de passer d'un point du globe repéré par une longitude et une latitude, à un point du planisphère repéré par une abscisse et une ordonnée (maîtrise de la trigonométrie de troisième, introduction du sinus et de la tangente aux élèves de niveau quatrième).
- Identifier le mode de projection utilisé par *Blender* pour projeter un planisphère sur une sphère.

Agrandir, déplacer, tourner un objet : le calcul matriciel

- Notion de vecteur (activités calquées sur les anciens programmes de collège).
- Coordonnées de vecteurs dans un repère 2D (idem).
- Coordonnées de vecteurs dans un repère 3D.
- Travail à la règle, équerre et compas sur les transformations de base comme la symétrie axiale, la symétrie centrale, l'agrandissement/réduction, la translation, la rotation (objectifs pour la plupart faisant partie des exigibles ou des anciens exigibles au collège).
- Notion de matrices, vues comme un tableau de nombres répondant à certaines propriétés calculatoires. Pratique de l'addition et la multiplication de matrices, produit d'une matrice et d'un vecteur (ce travail ne nécessite que la maîtrise des opérations sur les relatifs).
- Identifier sur des exemples simples les matrices qui opèrent lors des transformations courantes utilisées par le logiciel : agrandissement/réduction d'objets, symétries, rotation.
- Cas de la translation.

Lisser la courbe de déplacement d'un objet : courbes de Bézier

- Notion de relation entre deux ensembles, notion de fonction entre deux ensembles.
- Notion de fonction numérique (au programme de troisième).
- Herbier de fonctions courantes dans le secondaire (linéaire, affine, parabolique).
- Courbes paramétrées simples (ce travail nécessite une bonne compréhension de la notion de fonction numérique).
- Courbes paramétrées particulières utilisées par le logiciel : cubiques de Bézier.

– Exercices : trouver les courbes de Bézier lissant la trajectoire passant par 3 points, 4 points, 5 points donnés à partir de la formule générale (remplacement de valeurs indéterminées par des nombres, découverte du triangle de Pascal).
– Tracés de courbes de Bézier à l'aide d'un tableur (usage du tableur au programme de collège pour le tracé de courbes).

Le troisième niveau (8 élèves)

Enfin, il a été proposé aux élèves les plus motivés de travailler sur un thème techniquement plus difficile : établir les équations paramétriques d'une cubique de Bézier à partir de la définition barycentrique. Comme il n'était pas question d'imposer ce travail à l'ensemble du groupe, des séances spéciales ont été organisées en dehors des heures traditionnelles de l'atelier (après le repas de 12h30 à 13h30, le soir, …). Les huit élèves concernés avaient à tout moment la possibilité de poser des questions aux récréations.

Comment établir la formule générale d'une courbe de Bézier passant par 3 points ?

– Travail de base sur les vecteurs : somme de vecteur, relation de Chasles (activités calquées sur les anciens programmes de collège).
– Découverte de la notion de barycentre entre deux points. Approche pratique, définition vectorielle (travail limité au barycentre de deux points). Notion de Barycentre partiel.
– Définition barycentrique d'un point d'une courbe de Bézier passant par 3 points.
– Établir les équations de Bézier à partir de cette définition (travail réservé aux élèves les plus à l'aise).

Annexe 2
Mathématiques et modélisation 3D sur Blender
Collège Albert Camus de Miramas

Nous sommes des élèves de quatrième et nous représentons les élèves qui ont travaillé sur le thème *mathématiques et modélisation 3D* de l'atelier Euclide du collège.

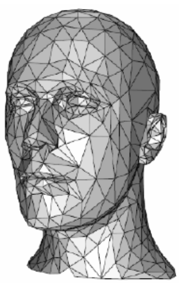
Le but de ces séances était à la fois de découvrir comment techniquement on produit des images de synthèse, mais aussi de travailler sur la place centrale que jouent les mathématiques dans ce domaine. On a travaillé sur *Blender*, un logiciel gratuit, mais très performant. Il est développé par des passionnés et il permet de modéliser tout type d'animation 3D.

Le travail dans l'atelier a permis d'aborder les 4 compétences principales du logiciel :
- la modélisation (que l'on pourrait traduire par la fabrication d'objets),
- les textures (c.a.d. la manière d'habiller ces objets),
- l'animation (comment mettre ces objets en mouvement),
- la simulation de mécanismes physiques complexes, par exemple générer des particules physiques (faire du feu), gérer des collisions entre objets, ou bien encore l'écoulement d'un fluide.

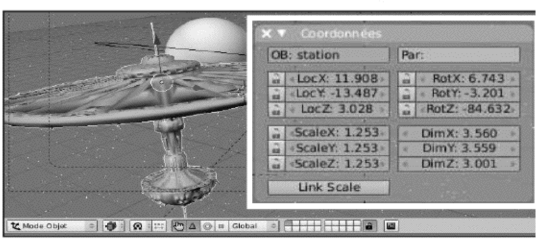
En même temps que l'on a produit des séquences animées d'images de synthèse, on a exploré les opérations mathématiques qui se cachent derrière les principales fonctions du logiciels.

La modélisation

Modéliser un objet c'est en quelque sorte sculpter en 3D un volume en travaillant soit sur l'objet entier (on fait des rotations, on agrandit, ...) soit sur ses points : on déplace des points (ce que l'on appelle en maths une translation), on extrude, on symétrise, etc. En quatrième, on apprend justement à faire ces transformations avec la règle, le compas et le rapporteur : l'agrandissement (par la configuration de Thalès), la translation, la symétrie, la rotation … Mais *Blender* n'a pas de règle et d'équerre pour faire ses transformations. Comment fait-il, alors ? Le logiciel travaille en fait sur les coordonnées des points.



L'espace de *Blender* possède un repère qui permet de déterminer la position d'un objet dans l'espace grâce aux coordonnées x, y, z, de son centre de gravité et par la donnée de trois angles appelés angles d'Euler. Ces trois angles déterminent la manière dont l'objet est tourné par rapport à chaque axe.



Pour faire ces transformations, *Blender* calcule, à partir des coordonnées de départ, les coordonnées des points transformés. Pour cela, il utilise un outil mathématique puissant ; les **matrices**.

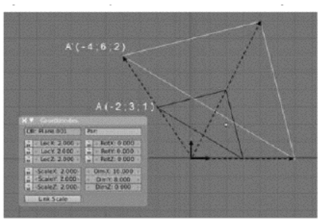
Une matrice, c'est quoi ? C'est un tableau de nombres disposés en lignes et colonnes qui représente une application linéaire. Par exemple une matrice 3×3 est un tableau de nombres de 3 lignes et 3 colonnes qui représente une application linéaire de $\mathbb{R}^3$: $\begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 3 & 1 & -2 \\ 7 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.

L'avantage en informatique, c'est qu'un tel tableau de nombres se programme facilement. Ces tableaux de nombres peuvent s'additionner et se multiplier :

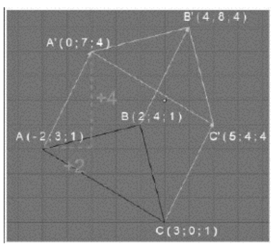
$$\begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 5 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+6 & 7+4 \\ 3+5 & 1+8 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 5 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\times 6+7\times 5 & 2\times 4+7\times 8 \\ 3\times 6+1\times 5 & 3\times 4+1\times 8 \end{pmatrix}.$$

Elle peuvent aussi, et ce qui nous intéresse ici, agir sur les coordonnées par multiplication.
Or, on va voir que les transformations mathématiques comme l'agrandissement ou la symétrie peuvent s'écrire sous la forme de matrices.
Notre travail a été de trouver la matrice qui opère à chaque transformation que l'on fait.



On a commencé par l'agrandissement à l'échelle 2 d'une figure simple comme ce triangle. On a observé que le vecteur OA (–2, 3, 1) est devenu OA′ (–4, 6, 2). Oui, mais quelle matrice a fait le travail pour obtenir OA′ à partir de OA ? Tout le monde a assez rapidement trouvé qu'il fallait des 2 sur la diagonale et des 0 partout ailleurs : $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$



On a fait le même travail pour les différentes symétries et pour la rotation. Par contre la translation a posé un problème : On a appliqué à notre triangle une translation selon le vecteur (2, 4, 3). Chaque point a gagné 2 unités au niveau des abscisses, 4 unités au niveau des ordonnées et 3 en hauteur. Est-il possible trouver une matrice qui permette de réaliser cette transformation ? Eh bien, personne n'y arrivait. Cela tient au fait que la translation n'est pas une application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans lui-même : $t(kx) = kx + u \neq k\ t(x)$. Comment faire alors ?

Un espace de travail en 2D comme un plan peut être vu comme plongé dans un espace en 3D. L'idée pour la translation est de considérer l'espace à 3 dimensions plongé dans un espace à 4 dimensions en ajoutant une quatrième coordonnée factice. Il est alors simple de voir que la matrice à utiliser est : $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Pour rendre l'ensemble du travail homogène, on a réécrit chaque matrice de transformation avec 4 lignes et 4 colonnes :

Pour un agrandissement de rapport k :

$$\begin{pmatrix} k & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k \end{pmatrix}$$

Pour une symétrie par rapport au plan (XOY)

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Pour la rotation autour de l'axe (Ox) :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Pour la translation de vecteur (t_x, t_y, t_z) :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & t_x \\ 0 & 1 & 0 & t_y \\ 0 & 0 & 1 & t_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Tout ce travail nous a permis de vérifier par des calculs que les transformations qui permettent de modéliser les objets sont gérées par les mathématiques.

Les couleurs dans Blender

Pour les couleurs, on a découvert que *Blender* code ses couleurs en mode RVB, c'est-à-dire qu'il utilise 3 couleurs : le Rouge, le Vert et le Bleu. L'information est codée en binaire. Une mémoire élémentaire, que l'on appelle en informatique un bit, a 2 états possibles : 0 ou 1.

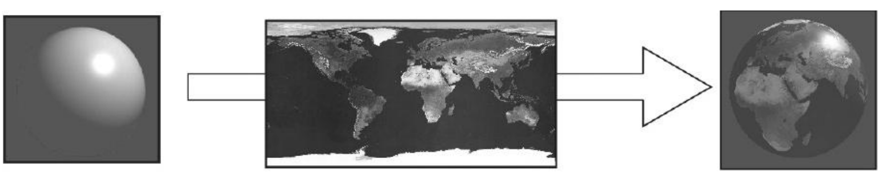
– À l'aide de 1 bit on a donc 2 possibilités 0/1 ou ouvert/fermé ou noir/blanc.

– À l'aide de 2 bits on a $2 \times 2 = 4$ possibilités : 00/01/10/11.

Blender code chacune de ses couleurs à l'aide de 8 bits ($2^8 = 256$ possibilités), ce qui offre 256 nuances. En convertissant ces nombres en système binaire avec des 0 et des 1 et en mettant ces trois nombres bout à bout, on obtient par exemple le code suivant pour une couleur « chair » : 111110111101000010010111 (Rouge 251 soit 11111011, Vert 208 soit 11010000, Bleu 151 soit 10010111)

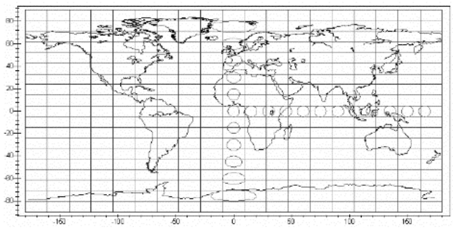
Plaquer une texture dans Blender

Comment par exemple plaquer l'image rectangulaire de la terre sur une sphère ?



Pour plaquer cette image sur une sphère, on donne l'ordre au logiciel que la sphère mathématique devienne un matériau. Sur ce matériau, on va plaquer une texture en appelant cette image. Puis on annonce au logiciel qu'il devra projeter cette image sur une sphère.

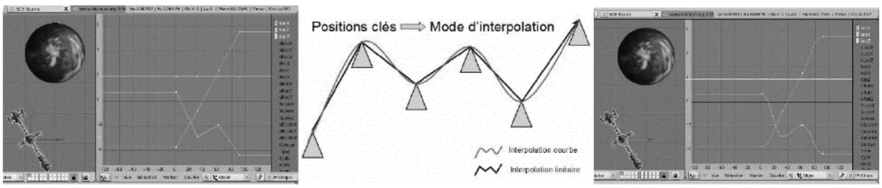
On peut se demander alors quel type de projection mathématique est utilisé lorsque l'on active le mode « sphère ». *Blender* utilise en fait la plus simple des projections cylindriques. Un point se repère par une longitude Ouest ou Est par rapport au méridien de Greenwich : de −180° à +180° et par une latitude sud ou nord : de −90° à +90°.



Lorsqu'on lui demande de plaquer cette image sur la sphère, Blender se contente de considérer que l'abscisse de chaque point de l'image correspond à la longitude, et l'ordonnée à la latitude.

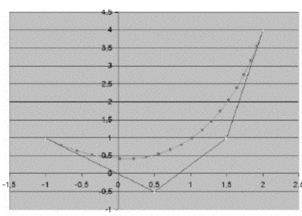
L'animation et les courbes de Bézier

Pour animer un objet, *Blender* réclame simplement de lui donner des positions clés espacées dans le temps. Dans *Blender*, ces positions clés offrent des valeurs que le logiciel utilise pour calculer alors toutes les positions intermédiaires (appelées dans *Blender* courbes « IPO ») par une méthode mathématique appelée « interpolation ». L'interpolation peut être courbe ou linéaire.



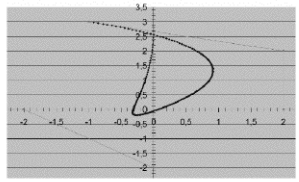
Au collège, on étudie les fonctions linéaires et affines : c'est ce qu'utilise Blender pour relier les positions clés par un déplacement rectiligne. Le problème de monsieur Bézier, qui était ingénieur dans l'automobile, était d'arriver à trouver une méthode mathématique qui permette de lisser par une courbe un ensemble de points reliés par des segments. Il a proposé d'utiliser pour cela deux fonctions qui permettent de calculer l'abscisse x et l'ordonnée y des points de cette courbe en fonction d'une variable t qui varie entre 0 et 1. Ces deux polynômes se construisent autour des coefficients du triangle de Pascal et autour des puissances de t et de $(1 - t)$.

Pour faire une interpolation de Bézier sur 3 points, on utilise une courbe de degré 2 :



$$x(t) = x_A (1-t)^2 + 2x_B t(1-t) + x_C t^2,$$

$$y(t) = y_A (1-t)^2 + 2y_B t(1-t) + y_C t^2.$$

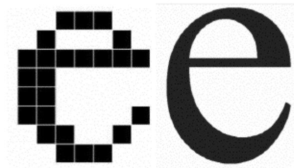


Pour 4 points, on utilise une cubique :

$$x(t) = x_A(1-t)^3 + 3x_B t(1-t)^2 + 3x_C t^2(1-t) + x_D t^3,$$

$$y(t) = y_A(1-t)^3 + 3y_B t(1-t)^2 + 3y_C t^2(1-t) + y_D t^3.$$

Pour 5 points, une courbe de degré 4, etc.



Pour bien se rendre compte que cela fonctionne, on a fait de nombreux calculs à la main de coordonnées de points de courbes de Bézier. On a aussi appris à se servir d'Excel pour trouver les équations de Bézier qui permettent de produire des lettres de l'alphabet.
C'est une autre application de ces courbes : dans Blender, il est possible de mettre du texte, pour faire des titres. Comment sont faites les lettres par l'ordinateur ? Dans les années 80, l'ordinateur avait en mémoire un dessin de chacune des 26 lettres de l'alphabet. Une lettre était stockée sous la forme d'une grille de 8 lignes et 8 colonnes. Chaque case était noire ou blanche, ce qui en mémoire correspond au symbole 0 ou 1.
Mais cette méthode avait des inconvénients. Si l'on voulait grossir le texte, l'ordinateur grossissait la grille, et on voyait apparaître des gros carrés.

Avec les ordinateurs modernes, ces lettres sont obtenues par des courbes de Bézier et l'ordinateur recalcule des détails supplémentaires à chaque nouvel agrandissement

Pour finir, on a étudié comment géométriquement sont produits les points de la courbes de Bézier. Par exemple, dans une interpolation de Bézier sur 3 points A, B et C on cherche :
– le barycentre M des points A et B affectés des masses $1 - t$ et t : $(1-t)\overrightarrow{MA} + t\overrightarrow{MB} = 0$ donne $\overrightarrow{AM} = t\overrightarrow{AB}$;
– puis le barycentre N des points B et C affectés toujours des masses $1 - t$ et t : $\overrightarrow{BN} = t\overrightarrow{BC}$;
– enfin le point G, barycentre des points M et N affectés encore des masses $1 - t$ et t : $\overrightarrow{MG} = t\overrightarrow{MN}$. G est en final un point de la courbe. Il suffit alors faire varier t entre 0 et 1 et on trouve tous les points de la courbe. En exprimant le vecteur OG en fonction de OA, OB et OC grâce à la relation de Chasles, on a retrouvé nos courbes de Bézier :

$$\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OG} = t\overrightarrow{MO} + t\overrightarrow{ON}$$

$$\overrightarrow{OG} = (1-t)\overrightarrow{OM} + t\overrightarrow{ON}$$

$$\overrightarrow{OG} = (1-t)\overrightarrow{OA} + (1-t)\overrightarrow{AM} + t\overrightarrow{OB} + t\overrightarrow{BN}$$

$$\overrightarrow{OG} = (1-t)\overrightarrow{OA} + (1-t)t\overrightarrow{AB} + t\overrightarrow{OB} + t^2\overrightarrow{BC}$$

$$\overrightarrow{OG} = (1-t)\overrightarrow{OA} + (1-t)t\left(\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB}\right) + t\overrightarrow{OB} + t^2\left(\overrightarrow{BO} + \overrightarrow{OC}\right)$$

$$\overrightarrow{OG} = (1-t)^2\overrightarrow{OA} + 2t(1-t)\overrightarrow{OB} + t^2\overrightarrow{OC}$$