La place des grandeurs dans la construction des mathématiques

André Pressiat (*)

1. Introduction

D'un point de vue historique, les grandeurs ont occupé une place importante dans la construction des mathématiques, comme en témoignent les Éléments d'Euclide. Dans l'enseignement des mathématiques au niveau de l'école et du collège notamment, il semble difficile de reconstruire les nombres et la géométrie sans faire appel aux grandeurs. Ces dernières semblent ainsi cantonnées au début de la construction, qu'il s'agisse des mathématiques savantes ou de celles qui sont à enseigner dans les classes, leur remplacement par leurs mesures les faisant par la suite passer au second plan. Le but de cette conférence est double : d'abord, mettre en évidence les savoirs qui sont indispensables pour comprendre de quelle grandeur on parle avant même de s'intéresser à la question de sa mesure ; ensuite, identifier le travail sur les grandeurs nécessaire dans la modélisation d'une situation extra-mathématique, travail qu'un passage trop rapide aux mesures peut masquer aussi bien du point de vue de l'élève que de celui du professeur. Compte tenu de l'ampleur de la question, trois thèmes seront successivement traités. Dans un premier temps, le cas des aires sera revisité, en focalisant l'attention sur des aspects récents et encore peu connus de la théorie (en particulier l'apport des travaux de David Hilbert à la théorie euclidienne au début du XXe siècle, et des travaux plus récents), qui redonnent une place à des techniques de dissection de figures. Ensuite, sera évoquée la délicate question des rapports, des quotients et de leur emploi dans le traitement des problèmes de proportionnalité ; sur ce point l'enseignement en France et dans quelques pays voisins feront l'objet d'une comparaison. Enfin, la place de la grandeur « longueur » sera réévaluée compte tenu des considérations qui précèdent.

2. Les aires

Comment expliquer à un élève (à l'école, mais également au collège) ce qu'est l'aire d'une figure polygonale sans faire appel à la mesure ? La question est délicate pour un professeur pour qui une aire est un nombre réel positif. L'emploi du langage courant (par exemple, en évoquant la place occupée par la figure) n'est pas sans ambiguïté (confusion possible avec l'encombrement de la figure, qui conduit à considérer son diamètre). L'idée de se référer aux grands textes permet-elle de se sortir de cette situation délicate ?

(*) IUFM Centre Val de Loire (Orléans-Tours) – Équipe DIDIREM – Université Denis Diderot Paris 7. andre.pressiat@wanadoo.fr

2.1. Les aires chez Euclide

Euclide, dans le livre I, proposition 35, introduit une nouvelle notion d'égalité entre figures, qui correspond à ce que nous appellerions « figures de même aire ». Dans sa géométrie, il n'y a pas de nombres, ce qui montre qu'ils ne sont pas indispensables pour cette définition. Euclide ne définit pas véritablement cette relation. Comme celle d'égalité entre segments ou angles, elle satisfait des propriétés apparentées aux « notions communes », dont voici la liste :

Des figures égales au sens ancien[(1)] sont « égales ». (1)
Les sommes de figures « égales » entre elles sont « égales ». (2)
Les différences de figures « égales » entre elles sont « égales ». (3)
Les moitiés de deux figures « égales » sont « égales ». (4)
Le tout est plus grand que la partie. (5)
Si deux carrés sont « égaux », leurs côtés sont égaux. (6)

En suivant Hilbert, Hartshorne[(2)] a refondé la théorie euclidienne des aires, en évitant de recourir à un trop grand nombre de nouveaux axiomes ou nouveaux termes primitifs. Afin d'éviter d'utiliser le mot « égal » avec plusieurs significations, il propose de dénommer par « figures de même contenance » ce qu'Euclide appelle des figures « égales » (au sens nouveau). Il présuppose les axiomes d'un plan de Hilbert (axiomes d'incidence, d'ordre, de congruence pour les segments et pour les angles), rappelle la définition de l'intérieur d'un triangle comme intersection de trois demi-plans, donne la définition de triangles « n'empiétant pas l'un sur l'autre » (« nonoverlapping triangles », expression souvent traduite en français par « triangles quasi-disjoints »).

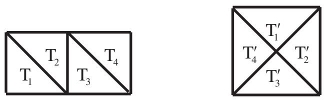
Les figures (polygonales) sont les parties du plan qui peuvent s'exprimer sous la forme d'une réunion finie de triangles quasi-disjoints. Hartshorne introduit deux définitions importantes : figures équidécomposables ; figures ayant même contenance (même aire). Cette dernière correspond à ce qu'Hilbert appelle des figures équicomplémentaires.

Deux figures P et P′ sont équidécomposables[(3)] s'il est possible d'écrire chacune d'elles sous forme de réunions de triangles n'empiétant pas l'un sur l'autre :

$$\mathrm{P} = \mathrm{T}_1 \cup \mathrm{T}_2 \cup \ldots \cup \mathrm{T}_n \text{ et } \mathrm{P}' = \mathrm{T}'_1 \cup \mathrm{T}'_2 \cup \ldots \cup \mathrm{T}'_n$$

telles que, pour chaque i, les triangles T_i et T'_i soient congruents.

Ainsi, par exemple, la réunion de deux carrés congruents est équidécomposable avec un carré construit sur une de leurs diagonales.



(1) Pour éviter l'emploi du mot « égales » en ce premier sens, Hilbert emploiera le mot « congruentes », et parlera de « congruence de triangles » là où Euclide parle d'« égalité » des triangles.

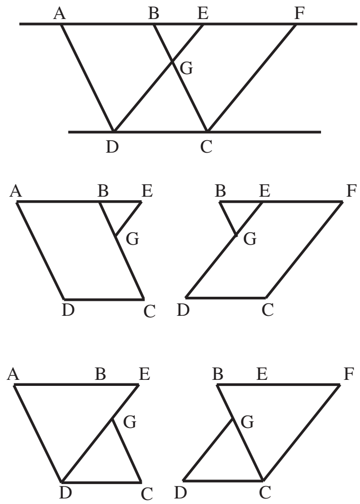
(2) Hartshorne, R. (2000) *Geometry : Euclid and beyond*, New York, Berlin, Heidelberg : Springer.

(3) En allemand, le mot correspondant est « zerlegungsgleich » qui signifie « égale décomposition », ou « égal découpage „.

Deux figures P et P′ sont équicomplémentaires[4] s'il existe des figures Q et Q′ telles que :

– P et Q n'empiètent pas l'une sur l'autre ;
– P′ et Q′ n'empiètent pas l'une sur l'autre ;
– Q et Q′ sont équidécomposables ;
– P ∪ Q et P′ ∪ Q′ sont équidécomposables.

On peut alors démontrer que « Des parallélogrammes construits sur la même base et entre les mêmes parallèles ont même contenance ».



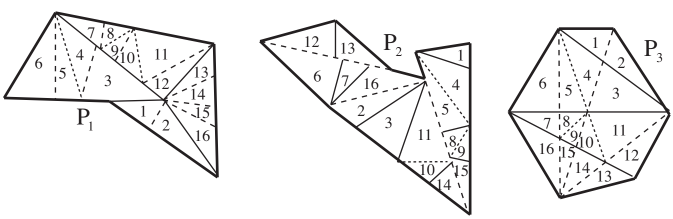
ABCD et CDEF sont les deux parallélogrammes dont il s'agit de démontrer qu'ils ont même contenance (Proposition I-35 d'Euclide). Pour cela, on ajoute le triangle BEG à chacun des parallélogrammes. Il s'agit alors de démontrer que les deux figures ainsi obtenues sont équidécomposables. Pour cela, on décompose chacune d'elles en deux triangles :

– les triangles ADE et CDG pour la première ;
– les triangles BCF et CDG pour la seconde.

Il suffit alors de démontrer que les triangles ADE et BCF sont congruents.

Pourquoi a-t-on besoin de ces deux définitions ? Il est clair que si deux figures sont équidécomposables, alors elles ont même contenance (sont équicomplémentaires). La réciproque est-elle vraie ? Hilbert a montré que la réponse est négative si l'axiome d'Archimède n'est pas satisfait. Est-elle positive si on se place dans un plan de Hilbert où l'axiome d'Archimède est satisfait ? Hartshorne précise que l'on ne sait toujours pas le démontrer par des moyens purement géométriques, ce qui montre la difficulté de la théorie « pure » des aires.

Il démontre ensuite que l'équidécomposabilité et l'équicomplémentarité (la relation « avoir même contenance ») sont des relations d'équivalence. Voici les figures faites par Hilbert pour servir de support à la démonstration de la transitivité de l'équidécomposabilité.



(4) Dans les six premières éditions, Hilbert emploie le mot « inhaltsgleich », qui signifie littéralement « contenu égal », ou « superficie égale » ; dans les quatre éditions suivantes, il emploie « ergängzungsgleich » qui signifie « égal par complément ».

On peut alors dresser le bilan provisoire suivant : la relation d'équicomplémentarité (« avoir même contenance ») est une relation qui satisfait les propriétés 1, 2 et 3 énoncées au départ.

Afin de faire en sorte que les propriétés 4, 5 et 6 le soient aussi, Hartshorne introduit alors un nouvel axiome, l'axiome de de Zolt (A. de Zolt, mathématicien italien qui a tenté en 1881 de démontrer cet énoncé par des méthodes géométriques). Voici cet axiome, qui est seulement évoqué par Hilbert dans *Les fondements de la géométrie*, sans y être énoncé :
Si Q est une figure incluse dans la figure P, et si P \ Q a un intérieur non vide, alors P et Q n'ont pas la même contenance.

Si on se place dans un plan euclidien (c'est-à-dire un plan de Hilbert dans lequel l'axiome d'Euclide pour les parallèles (P), et un axiome relatif à l'intersection de deux cercles (E) sont satisfaits), alors 4, 5 et 6 sont satisfaits. En reprenant les démonstrations faites par Euclide, en remplaçant chacune des occurrences de « figures égales » par « figures d'égale contenance », on constate le phénomène suivant :
– tous les énoncés dans lequel Euclide démontre que deux figures sont « égales » demeurent vrais pour la notion d'égale contenance.
–quand une hypothèse d'égale contenance est utilisée pour conclure quelque chose concernant des congruences d'angles ou de segments, l'axiome (Z) est nécessaire.
Parmi ces derniers énoncés, figurent des résultats aussi importants que la réciproque du théorème de Pythagore et la construction du pentagone régulier à la règle non graduée et au compas.

2.2 La mesure des aires

L'axiome (Z) est satisfait s'il existe, dans le plan de Hilbert avec l'axiome des parallèles (P), une fonction mesure pour les aires, au sens de la définition suivante :
Une fonction mesure pour les aires sur un plan de Hilbert est une application α de l'ensemble P des figures à valeurs dans un groupe abélien ordonné G telle que :
– pour tout triangle T, $\alpha(T) > 0_G$;
– si T et T′ sont des triangles congruents, alors $\alpha(T) = \alpha(T')$;
– si deux figures P et Q n'empiètent pas l'une sur l'autre, alors
$$\alpha(P \cup Q) = \alpha(P) + \alpha(Q).$$
$\alpha(T)$ est appelée aire de la figure P, relativement à la fonction α.

On a en effet le résultat suivant : Supposons qu'il existe une fonction mesure α pour les aires sur un plan de Hilbert. Si P est une figure d'intérieur non vide, alors $\alpha(P) > 0_G$. Si P et P′ sont des figures équidécomposables, alors $\alpha(P) = \alpha(P')$. Si P et P′ sont des figures équicomplémentaires, alors $\alpha(P) = \alpha(P')$. Si une figure Q est contenue dans une figure P, et si P \ Q a un intérieur non vide, alors $\alpha(Q) < \alpha(P)$; en particulier, P et Q ne peuvent avoir même contenance, et donc (Z) est satisfait.

On peut même démontrer le résultat suivant : dans un plan de Hilbert avec (P), muni d'une fonction mesure des aires α, deux figures P et P′ ont même contenance si et seulement si $\alpha(P) = \alpha(P')$. Dans un tel cadre, la théorie des aires obtenue à l'aide de la fonction α et celle des figures de même contenance sont essentiellement équivalentes.

Les exposés plus élémentaires de la théorie des aires utilisant les nombres sont mieux connus(5).

On considère un carré C, le réseau plan R construit à partir de C (niveau 0), et une partie F bornée du plan. On désigne par a_0 le nombre de carrés du réseau R formés entièrement de points de F, et par b_0 le nombre de carrés du réseau R dont certains points appartiennent à F. Puis on subdivise chaque carré de R en 100 carrés de même côté : on obtient ainsi le réseau R_1 (niveau 1), et on recommence indéfiniment… On définit alors les réseaux R_k (niveau k) pour tout entier naturel k. Au niveau k, a_k désignant le nombre de carrés du réseau R_k formés entièrement de points de F, et b_k celui de carrés du réseau R_k dont certains points appartiennent à F, on a alors :

$$a_0 \leq \frac{a_1}{10^2} \leq \frac{a_2}{10^4} \leq \ldots \leq \frac{a_k}{10^{2k}} \leq \ldots \leq \frac{b_k}{10^{2k}} \leq \ldots \leq \frac{b_2}{10^4} \leq \frac{b_1}{10^2} \leq b_0.$$

On dit que F est quarrable si $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{b_n - a_n}{10^{2n}} = 0$. Dans ce cas, les deux suites $\left(\dfrac{a_n}{10^{2n}}\right)$ et $\left(\dfrac{b_n}{10^{2n}}\right)$ sont adjacentes : elles ont la même limite, que l'on peut noter $s(\mathrm{F})$. On définit ainsi une application s qui associe à chaque figure quarrable F du plan un nombre réel $s(\mathrm{F})$, appelé « aire de F », qui a les propriétés suivantes :
(α) La fonction s est positive.
(β) s est additive : si F et F′ sont deux figures quarrables n'ayant pas de points intérieurs en commun, $s(\mathrm{F} \cup \mathrm{F}') = s(\mathrm{F}) + s(\mathrm{F}')$.
(γ) s est invariante par translation.
(δ) s est normalisée : $s(\mathrm{Q}) = 1$, Q désignant un carré du réseau initial R.

On peut alors démontrer que tout polygone est quarrable. On peut également établir le résultat suivant, qui permet de définir axiomatiquement l'aire, sans recourir aux réseaux précédents ; on a seulement besoin d'un carré unité (qui est fixé) : il existe une fonction s et une seule définie sur l'ensemble des polygones qui satisfait les conditions (α), (β), (γ) et (δ).

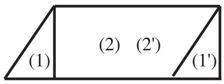
2.3. Et dans les classes ?

• On peut calculer des aires par la méthode de décomposition, qui repose sur le fait que deux figures équidécomposables ont même aire. En notant + les réunions de figures quasi-disjointes, pour calculer l'aire d'une figure F, on la décompose sous la forme : $\mathrm{F} = \mathrm{F}_1 + \mathrm{F}_2 + \ldots + \mathrm{F}_n$, de telle manière qu'en faisant subir à chacune des F_i un déplacement convenable, on obtienne n figures $\mathrm{H}_1, \mathrm{H}_2, \ldots \mathrm{H}_n$ quasi-disjointes dont la réunion $\mathrm{H}_1 + \mathrm{H}_2 + \ldots + \mathrm{H}_n$ est une figure H dont on connaît déjà l'aire.

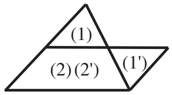
La méthode de décomposition permet de déduire les formules donnant l'aire du parallélogramme dans certains cas, puis celles du triangle et du trapèze ; elle permet également d'élaborer des démonstrations du théorème de Pythagore, qui ne sont pas les plus utilisées dans les manuels actuels. Les figures ci-dessous en donnent des illustrations.

(5) Voir en bibliographie les ouvrages de Lebesgue, Boltianskii, et Rogalski.

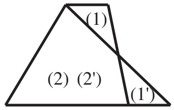
Tableau 1



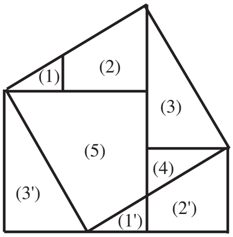
Du parallélogramme
au rectangle
par équidécomposition



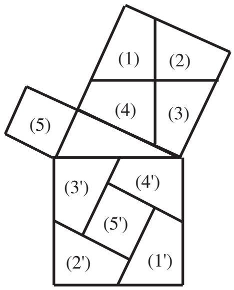
Du triangle
au parallélogramme
par équidécomposition



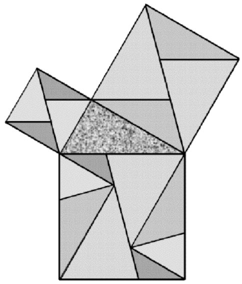
Du trapèze
au triangle
par équidécomposition



Théorème de Pythagore
et équidécomposition (I)

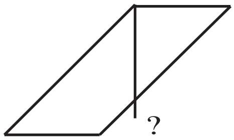


Théorème de Pythagore
et équidécomposition (II)

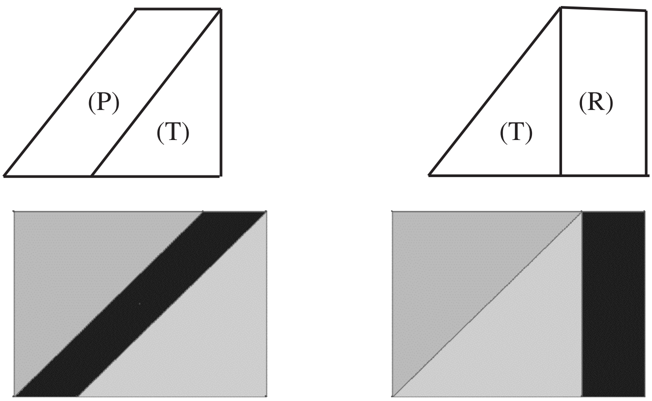


Théorème de Pythagore
et équidécomposition (III)

En revanche, elle échoue dans certains cas de figures pour établir la formule relative au parallélogramme (cas où ce dernier ne contient pas entièrement la hauteur considérée).

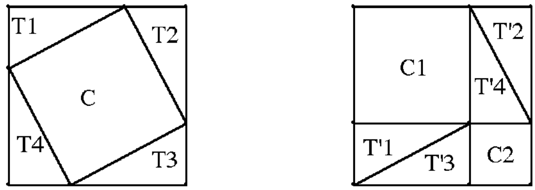


C'est alors que la *méthode de complémentation* est d'une grande efficacité (elle permet de traiter tous les cas de figure) : pourtant, elle est fort peu mobilisée ; si la démonstration d'Euclide (reprise au 2.1) peut être considérée comme compliquée, il n'en est pas de même de celle que les figures suivantes permet d'élaborer.



Du parallélogramme au rectangle par équicomplémentarité

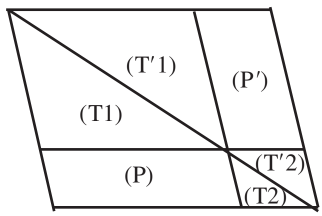
En revanche, c'est la méthode de complémentation qui est implicitement au cœur des justifications les plus habituelles du théorème de Pythagore.



Théorème de Pythagore et équicomplémentarité

Nombreux sont les élèves à qui cette justification est présentée qui sont tout autant impressionnés par la propriété d'équicomplémentarité que par le résultat qu'elle permet ici d'atteindre.

C'est également à une convocation implicite de cette méthode que l'on fait appel pour justifier l'égalité des aires des parallélogrammes (P) et (P′) dans la figure suivante de l'œuvre d'Euclide qui est devenue un classique :



Tout ce qui précède dans le présent paragraphe montre le parti que le professeur de collège peut tirer des « découpages et recompositions » (formulations parfois utilisées dans les programmes pour évoquer des figures équidécomposables) et des complémentations pour démontrer que des figures polygonales ont même aire. Il n'y a donc pas lieu de déprécier les activités de « découpage », qui ne relèvent pas seulement des « petites » classes de l'école et qui sont en étroite relation avec les relations fondant la théorie des aires.

2.4. Quelques résultats plus récents et le programme de Cinquième

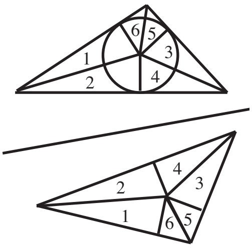
On a vu au 2.1 qu'il n'y a pas équivalence entre équicomplémentarité et équidécomposabilité dans un plan non archimédien, et que dans un plan de Hilbert avec (P), muni d'une fonction mesure des aires α, deux figures P et P′ ont même contenance (sont équicomplémentaires) si et seulement si $\alpha(P) = \alpha(P')$. Il est clair que si deux figures P et P′ sont équidécomposables, alors elles ont même aire : $\alpha(P) = \alpha(P')$. Que dire de la réciproque apportée par le théorème de Bolyai-Gerwien :

Dans un plan de Hilbert dans lequel les axiomes d'Euclide (P) et d'Archimède (A) sont satisfaits, soit α la fonction mesure des aires. Deux figures P et P′ sont équidécomposables si et seulement si elles ont même aire : $\alpha(P) = \alpha(P')$.

Ce théorème a été démontré par le mathématicien hongrois Farkas Bolyai (en 1832) et par le mathématicien amateur P. Gerwien (en 1833). On doit à Hilbert d'avoir montré le rôle fondamental de l'axiome d'Archimède, et le caractère non nécessaire de l'axiome des parallèles : le théorème demeure valable en géométrie hyperbolique et en géométrie elliptique.

Dans la définition de figures équidécomposables, on exige que pour chaque i, les triangles T_i et T'_i soient « égaux » ou « congruents », c'est-à-dire qu'il existe une isométrie f_i du plan telle que $f_i(T_i) = T'_i$. On peut augmenter les contraintes sur les transformations f_i. Il convient cependant qu'elles appartiennent à un groupe G, afin que la nouvelle relation d'équidécomposabilité obtenue soit encore une relation d'équivalence. On notera alors $\underset{G}{\sim}$ cette relation, appelée G-équidécomposabilité. On peut envisager les cas suivants :

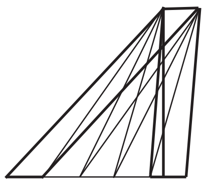
G = groupe des isométries planes (noté I) ;
G = groupe des déplacements du plan (noté D)
G = groupe engendré par les symétries centrales (noté S) ;
G = groupe des translations du plan (noté T).



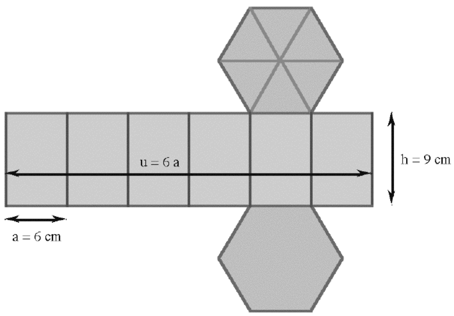
Deux figures I-équidécomposables sont également D-équidécomposables. En effet, un triangle et son symétrique par rapport à une droite sont équidécomposables.

Que se passe-t-il lorsque G = S ? Peut-on décomposer deux figures de même aire de façon à ce que les pièces correspondantes aient des côtés parallèles deux à deux ? La réponse est affirmative. Ce résultat, démontré par les mathématiciens suisses Hadwiger et Glur en 1951, est assez surprenant. Ainsi deux carrés de même aire non translatés l'un de l'autre sont S-équidécomposables (voir Rogalski, pour une solution, page 235-237). La démonstration n'est cependant pas très compliquée, car elle s'obtient en aménageant celle du théorème de Bolyai-Gerwien.

Ce qui précède montre le rôle très important joué par la symétrie centrale pour prouver des résultats relatifs aux aires de polygones. Le schéma suivant illustre une technique de « redressement » d'un parallélogramme dont la hauteur ne « tombe » pas sur la base en un parallélogramme de même aire et de même hauteur ne souffrant pas de cette particularité. Ce qui permet de montrer d'une autre manière que la formule pour l'aire du parallélogramme s'applique dans tous les cas de figure.



2.5. Calculs de longueurs, d'aires et volumes chez nos voisins



Cette reproduction de figure tirée d'un manuel scolaire montre qu'en Allemagne, on calcule avec les longueurs, et en particulier, on multiplie une longueur par un nombre ($a = 6$ cm et $u = 6a$). Dans l'application des formules d'aires et de volumes, les lettres sont remplacées par des grandeurs, et non pas seulement par les mesures de ces dernières :

$$\begin{array}{lll} \mathrm{M} = u \times h & \mathrm{G} = 6 \times \dfrac{a^2}{4} \times \sqrt{3} & \mathrm{V} = \mathrm{G} \times h \\ \mathrm{M} = 6{,}6\ \mathrm{cm} \times 9\ \mathrm{cm} & \mathrm{G} = 6 \times \dfrac{(6\ \mathrm{cm})^2}{4} \times \sqrt{3} & \mathrm{V} \approx 93{,}5\ \mathrm{cm}^2 \times 9\ \mathrm{cm} \\ \mathrm{M} = 324\ \mathrm{cm}^2 & \mathrm{G} \approx 93{,}53\ \mathrm{cm}^2 & \mathrm{V} \approx 841{,}5\ \mathrm{cm}^3 \end{array}$$

Cette pratique est étendue aux calculs trigonométriques, comme le montrent les exemples suivants :

$$\sin\beta = \frac{685\ \mathrm{m}}{1421\ \mathrm{m}} \approx 0{,}4820548\ ;\ \cos\beta = \frac{1245\ \mathrm{m}}{1421\ \mathrm{m}} \approx 0{,}8761435$$

et même :

$$\cos\gamma = \frac{(5\ \mathrm{cm})^2 + (3{,}5\ \mathrm{cm})^2 - (6{,}5\ \mathrm{cm})^2}{3{,}5\ \mathrm{cm}\ \times\ 3{,}5\ \mathrm{cm}} = \frac{-5\ \mathrm{cm}^2}{35\ \mathrm{cm}^2} \approx -0{,}1428571$$

au niveau du lycée.

3. Les nombres (quotients), les grandeurs proportionnelles et les fonctions

3.1. Intermède

> « Outre Atlantique, l'efficacité énergétique d'une voiture est exprimée en miles (1,6 kilomètre) par gallon (3,78 litres). Intuitivement, Européens et Américains pensent que la consommation en essence d'une voiture est proportionnelle à son efficacité. Or ce n'est vrai que si l'efficacité est exprimée en gallons par mile (ou en litres par kilomètre). En revanche, quand l'unité est inverse, la relation n'est plus proportionnelle. Ainsi, passer d'une voiture effectuant 12 miles par gallon à une qui en fait 14 réduit la consommation d'essence de 1,2 gallon sur 100 miles. Au contraire, le gain n'est que de 0,3 gallon pour une voiture passant de 42 miles par gallon à 48. Exprimer l'efficacité en miles par gallon est trompeur : les Américains jugent peu utile, à tort, de remplacer leur vieille voiture. Il suffirait, pour les convaincre, d'exprimer l'efficacité en gallons par mile ! ».

Cet extrait du numéro d'août 2008 du magazine scientifique *Pour la Science* met en évidence les effets surprenants d'un rabattement des grandeurs sur leurs mesures. Ainsi, une même grandeur serait proportionnelle à une autre avec un choix d'unités, et non proportionnelle à cette grandeur avec un autre choix ! En fait le changement d'unités en question montre que l'on remplace l'une des grandeurs par son inverse (et qu'on est alors en présence de deux grandeurs inversement proportionnelles), mais ce dernier fait n'est pas mis en avant, l'accent étant mis sur le changement d'unités. Le passage d'une grandeur à son inverse est silencieux, le nom de la grandeur étant conservé.

Considérons maintenant cette note en marge de l'ouvrage classique de « Chimie analytique » : Skoog-West-Holler dans sa « Traduction et révision scientifique de la 7e édition américaine »(6) :

> Le nombre de moles d'une espèce X est donné par :
>
> $$\text{quantité de X} = \frac{\text{g de X}}{\text{g de X/mol de X}}$$
> $$= \text{g de X} \times \frac{\text{mol de X}}{\text{g de X}}$$
>
> Lorsque vous effectuez des conversions de ce type, n'omettez pas de faire figurer toutes les unités, comme nous le faisons tout au long de ce chapitre. Cette méthode permet de déceler d'éventuelles erreurs dans la formulation des équations.

L'objet de cette note est annoncé dès la préface de l'ouvrage qui s'adresse à des étudiants en médecine ou pharmacie:

> Exemples numériques :
> Le grand nombre d'exemples numériques sert à illustrer concrètement les notions de base de chimie analytique. Comme dans la sixième édition, les unités sont spécifiées dans les calculs et l'analyse dimensionnelle est utilisée pour vérifier leur cohérence. […].

Ainsi, le fait de diviser une masse par une masse molaire pour obtenir le nombre de moles est accompagné d'un calcul où figurent les unités, afin d'exercer un contrôle sur la formulation des relations utilisées et sur la dimension du résultat final. Une telle pratique peut paraître singulière à un tel niveau d'enseignement, et pose la question de son usage dans des niveaux plus bas (collège, lycée) : relève-t-elle seulement de l'enseignement de la chimie ? quelle place le professeur de mathématiques peut-il (doit-il) lui donner ?

Afin d'éclairer l'articulation entre les opérations sur les grandeurs et celles sur les nombres dans les questions mettant en jeu des multiplications et des divisions, le paragraphe suivant s'intéresse à la difficile élaboration dans l'histoire des notions de « raison », « rapport », « quotient ».

3.2. Grandeurs, nombres et opérations : quelques grandes étapes de leur histoire

3.2.1 Les grandeurs chez Euclide

Les extraits suivants de l'ouvrage « Mathématiques au fil des âges » (Gauthier - Villars, 1987) reprennent les commentaires des auteurs sur les Éléments d'Euclide : ils permettent de pointer les aspects saillants de la théorie euclidienne des grandeurs.

> « Euclide ne définit pas précisément ce qu'il entend par grandeur. La théorie construite ne dépend pas du genre particulier des grandeurs considérées, qui peuvent être des longueurs, des surfaces, des poids, etc., et c'est ce qui en assure l'universalité. Des grandeurs homogènes, c'est-à-dire du même genre, peuvent s'ajouter et se comparer. Les “ notions communes ” fixent les règles opératoires : si A = C et B = C, alors A = B ; si A = B, alors A + C = B + C ; si

(*) Skoog-West-Holler, *Chimie analytique*, Traduction par Claudine Buess-Herman, Josette Dauchot-Weymeers et Freddy Dumont, Éditions De Boeck, 2002.

A = B, alors 2A = 2B, etc. En outre, au livre V, Euclide admet implicitement que l'on peut diviser toute grandeur par un entier. […] La définition 5 restreint encore les grandeurs auxquelles s'attachent ce livre. Il s'agit de grandeurs vérifiant la propriété connue sous le nom d'Eudoxe - Archimède. […] Vient la célèbre définition 6. Elle ne définit pas une raison de grandeurs, mais l'égalité de deux raisons, c'est-à-dire une classe d'équivalence entre deux couples de grandeurs. C'est la relation d'égalité, dirions-nous aujourd'hui, qui définit les classes d'équivalence des raisons égales.

En langage moderne, étant données quatre grandeurs A, B et C, D rangées par couples, la définition 6 stipule qu'il y a égalité de raison, ou proportion, si et seulement si, pour tout couple (m, n) d'entiers naturels non nuls, on a, selon les trois cas possibles :

$$n\mathrm{A} > m\mathrm{B} \text{ et } n\mathrm{C} > m\mathrm{D}$$
$$\text{ou bien } n\mathrm{A} = m\mathrm{B} \text{ et } n\mathrm{C} = m\mathrm{D}$$
$$\text{ou bien } n\mathrm{A} < m\mathrm{B} \text{ et } n\mathrm{C} < m\mathrm{D}.$$

Si on utilise la notation $\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{B}}$ (totalement absente dans le livre V), on traduit ceci en disant que : $\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{B}} = \frac{\mathrm{C}}{\mathrm{D}}$ si, pour tout couple (m, n) de nombres entiers naturels non nuls,

$$\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{B}} > \frac{m}{n} \text{ implique } \frac{\mathrm{C}}{\mathrm{D}} > \frac{m}{n}$$
$$\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{B}} = \frac{m}{n} \text{ implique } \frac{\mathrm{C}}{\mathrm{D}} = \frac{m}{n}$$
$$\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{B}} < \frac{m}{n} \text{ implique } \frac{\mathrm{C}}{\mathrm{D}} < \frac{m}{n}$$

[…] Une raison est alors un rapport . L'idée remarquable est donc de définir toutes les raisons $\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{B}}$, qui ne sont pas nécessairement des rapports d'entiers, par séparation au moyen des seuls quotients d'entiers naturels de la forme $\frac{m}{n}$. »

La notation $\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{B}}$, absente du livre V en ce qui concerne les raisons entre grandeurs, l'est également au livre VII pour les quotients $\frac{m}{n}$ d'entiers. Mais il existe une grande différence entre raison et quotient, comme le met en évidence le commentaire suivant, tiré du même ouvrage que précédemment, et rédigé en langage moderne.

« Au Livre VII consacré à l'arithmétique, Euclide montre que l'égalité de deux quotients d'entiers m/n et p/q se vérifie par l'égalité des produits des extrêmes et des moyens : $mq = np$. […]. Une telle procédure est inutilisable dès le Livre V, pour des grandeurs continues quelconques, d'autant plus qu'Euclide n'envisage pas le produit de deux grandeurs. Comme les entiers ne sont pas toujours divisibles, le calcul développé au livre VII est indépendant du livre V […].

Avec la construction eudoxienne, les raisons, c'est-à-dire les rapports de grandeurs de même genre, mais a priori quelconques, remplaçaient en les étendant les seuls rapports d'entiers. Du coup, on peut distinguer les raisons commensurables et incommensurables. Les raisons commensurables A/B sont celles pour lesquelles il existe une grandeur C (quelconque) et deux entiers naturels m et n tels que A, B, nC, mC forment une proportion. La raison définie par nC et mC ne dépend pas de cette grandeur C. ».

Même si les raisons sous certains aspects étendent les rapports d'entiers, elles n'ont pas chez Euclide la même puissance calculatoire :

« Bien qu'Euclide compare les raisons, il ne leur donne pourtant pas le statut d'objets mathématiques indépendants sur lesquels on connaît deux opérations. Il n'est donc pas question de les faire entrer dans un cadre analogue à celui des nombres entiers ou des fractions. On ne trouve pas définies chez Euclide en toute généralité des opérations comme l'addition ou la multiplication des raisons. ».

Le calcul sur les raisons est remplacé par un calcul sur les égalités de raisons, c'est-à-dire sur les proportions, comme en témoigne ce commentaire, lui aussi rédigé en langage moderne :

« En revanche, d'autres opérations sont mises en évidence : ce sont les règles de manipulation des proportions. Par exemple, $\frac{A}{B}=\frac{C}{D}$ implique $\frac{A+C}{B+D}=\frac{C}{D}$. Ces règles font l'objet des propositions finales du livre V et seront retenues par cœur dans toute la tradition médiévale, sans utilisation de l'écriture avec barre de fraction, mais avec le balancement rythmique : A est à B ce que C est à D. […] Le traitement séparé des rapports de grandeurs (des raisons) et des rapports d'entiers (fractions) est tout à fait conforme à la pensée grecque. »,

pensée que ce dernier extrait permet de mieux appréhender :

« Pour mieux comprendre ce qui a tant retenu les mathématiciens de considérer les raisons comme des nombres susceptibles d'addition et de multiplication, [on peut noter que] les rapports irrationnels paraissaient fondamentalement liés à des considérations sur l'infini. […] Or l'infini avait fait l'objet de paradoxes éclatants, les paradoxes de Zénon. ».

3.2.2 Les grandeurs chez Viète

Les commentaires qui suivent sont traduits de l'ouvrage de I. Bashmakova et G. Smirnova intitulé « The beginnings & evolution of algebra ».

Viète adopte le principe de base des géomètres grecs selon lequel on ne peut additionner, soustraire et prendre le rapport que pour des grandeurs homogènes (de même espèce). En cohérence avec ce principe, il divise les grandeurs en « espèces » : la première espèce est constituée par les « longueurs », c'est-à-dire des grandeurs à une dimension. Le produit de deux grandeurs de première espèce appartient aux grandeurs de deuxième espèce, constitué des « grandeurs planes » ou « carrés », et ainsi de suite. En termes modernes, le domaine V des grandeurs considéré par Viète pourrait être décrit comme suit :

$$\mathrm{V} = \mathrm{R}_+^{(1)} \cup \mathrm{R}_+^{(2)} \cup \ldots \cup \mathrm{R}_+^{(k)} \cup \ldots$$

où $\mathrm{R}_+^{(k)}$ est le domaine des grandeurs de dimension k (k entier naturel non nul). Dans chaque domaine $\mathrm{R}_+^{(k)}$ on peut effectuer l'addition de deux grandeurs, la soustraction à une grandeur d'une grandeur plus petite, et le rapport de deux grandeurs.

• Si α appartient à $\mathrm{R}_+^{(k)}$ et si β appartient à $\mathrm{R}_+^{(l)}$, alors il existe une grandeur γ égale au produit $\alpha\beta$ et γ appartient à $\mathrm{R}_+^{(k+l)}$.

• Si $k > l$, il existe une grandeur δ égale au quotient de α par β et δ appartient à $\mathrm{R}_+^{(k-l)}$.

Après avoir construit cette échelle de grandeurs, Viète propose de désigner les grandeurs inconnues par les voyelles A, E, I, O, … et les grandeurs connues par les consonnes B, C, D, … De plus, à la droite de la lettre désignant une grandeur, il place un symbole désignant son espèce. Ainsi, si B appartient à $\mathrm{R}_+^{(2)}$, il écrit Bplano, et si une inconnue A appartient à $\mathrm{R}_+^{(2)}$, il écrit Aquad. De même, les grandeurs de $\mathrm{R}_+^{(3)}$ sont accompagnées des symboles solidus ou cubus, et celles de $\mathrm{R}_+^{(4)}$ de plano-planum ou quadrato-quadratum, et ainsi de suite. Ainsi l'équation que nous notons aujourd'hui : $x^3 + 3bx = 2c^3$ était notée par Viète : Acubus + Bplano3inA æquari Csolido2.

Comme le remarquent les auteurs de l'ouvrage « Une histoire des mathématiques. Routes et dédales »,Viète oppose la *logistica speciosa* (calcul sur les espèces, c'est-à-dire les grandeurs) à la *logistica numerosa* antérieure. Seule la première est l'algèbre, méthode pour opérer sur des espèces, des classes de choses. Ainsi l'algèbre pour Viète est essentiellement une algèbre des grandeurs, ce que la vulgarisation de son œuvre met fort mal en évidence.

3.2.4 Stevin, puis Descartes : la numérisation des raisons

Comme précédemment, les extraits suivants de l'ouvrage « Mathématiques au fil des âges » (Gauthier - Villars, 1987) reprennent les commentaires des auteurs sur les apports essentiels des deux mathématiciens en question.

> « Tout le Moyen Âge arabe ou européen cherchera à apprivoiser une numérisation des raisons. […] Mais dans la mesure où l'on ne savait pas rendre compte d'une telle numérisation par une procédure théorique ayant la netteté de celle d'Euclide, il restait dans la pratique des mathématiciens exigeants, une profonde différence de nature opératoire entre des quantités comme 1, 3, 5/3, $\sqrt{2}$ ou π. Cette différence est balayée d'un coup par Simon Stevin à la fin du XVI^{e} siècle. Chez Stevin, il n'y a guère de fondement théorique, ou plutôt la justification est viciée. ».

> « René Descartes garde la même pratique des nombres que Simon Stevin et identifie nombres (avec leurs propriétés opératoires) et raisons ; il considère que la justification de cette équivalence repose sur la géométrie. En effet, d'une part, on obtient toutes les raisons en se contentant d'étudier les seuls rapports de longueurs géométriques […]. En outre, cette lecture identifie un nombre à un rapport de longueurs, la seconde longueur pouvant être prise comme unité. D'autre part, toutes les opérations sur les raisons et les propriétés de celles-ci sont démontrables grâce aux constructions géométriques, en particulier pour la multiplication. »

> « L'explication géométrique, reposant sur le théorème de Thalès, est très simple. On porte l'unité en A sur une droite Δ à partir d'une origine O ; on a deux raisons x et y, disons les rapports de deux longueurs à l'unité. Il s'agit de définir le produit $x\,y$. On construit B de façon à ce que $\dfrac{\mathrm{OB}}{\mathrm{OA}} = y$. On construit de même C sur une autre droite Δ' passant par O, en ayant choisi une unité sur Δ'. Le produit $x\,y$ se lit à l'intersection de Δ' et de la parallèle menée de B à la droite joignant A et C. Nombres et raisons sont identifiés (moyennant le choix d'unités). ».

Cette identification si productive ne va pas de soi dans l'enseignement, comme en témoignent les difficultés de nombreux élèves avec la « droite numérique » : ils ont du mal à concevoir l'abscisse d'un point M comme le rapport de la longueur du segment [OM] à la longueur du segment « unité » [OI], autrement dit comme la mesure de la longueur du segment [OM] quand on prend la longueur du segment [OI] comme unité. Cette formulation en termes de mesure (considérée souvent comme plus accessible aux élèves) masque le rapport de longueurs qu'elle convoque implicitement.

Ce rôle prédominant accordée aux longueurs et donc à la géométrie va se maintenir longtemps :

> « En se restreignant ainsi aux longueurs, et à leurs rapports pour numériser les raisons, Descartes abolit l'universalité algébrique du Livre V d'Euclide, indépendante de la nature des grandeurs, et instaure une organisation des mathématiques fondée sur la géométrie. Ce n'est qu'à partir de Gauss que l'on remettra cette architecture en question. ».

Whitney (1968) remarque que la pratique commune consistant à prendre $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{R}^+$ comme modèle pour le mesurage d'une grandeur a un désavantage : ce modèle contient un nombre spécifique, le nombre 1, et il n'y a aucun moyen naturel de mettre ce nombre en correspondance avec une grandeur précise. Il construit un modèle L plus naturel (appelé « ray » sur lequel $\mathbb{R}^+$ opère) dont les éléments sont eux-mêmes des longueurs. Si on choisit une longueur l_0 dans L, et si on compare d'autres longueurs avec elle, on peut appeler l_0 notre « unité » : cela sert seulement à nous rappeler que l_0 est considérée comme fixée pendant un certain temps. Par exemple, on peut considérer les longueurs $5l_0$, $7l_0$. Si on veut raccourcir nos notations, et appeler ces longueurs 5, 7, alors on remplace L par $\mathbb{R}^+$. On peut alors dire « la longueur 5 signifie en réalité la longueur $5l_0$ ». Si on veut « changer d'unité », par exemple passer de pied (ft) à pouce (in), alors pour tout a de $\mathbb{R}^+$, a ft = $12a$ in, on remplace « la longueur a » par « la longueur $12a$ ». Si un quelconque problème se pose avec les unités, ils sont aussitôt résolus en retournant à la phrase explicite « a ft ».

Les difficultés signalées par Whitney concernant le rôle spécifique du nombre 1 ont été traitées par Descartes dans sa Géométrie (1637) :

> « Il est aussi à remarquer que toutes les parties d'une même ligne se doivent ordinairement exprimer par autant de dimensions l'une que l'autre, lorsque l'unité n'est point déterminée en la question, comme ici a^3 en contient autant qu'abb ou b^3 dont se compose la ligne que j'ai nommée $\sqrt[3]{a^3 - b^3 + abb}$: mais que ce n'est pas de même lorsque l'unité est déterminée, à cause qu'elle peut être sous-entendue partout où il y a trop ou trop peu de dimensions : comme s'il faut tirer la racine cubique de $aabb - b$, il faut penser que la quantité $aabb$ est divisée une fois par l'unité, et que l'autre quantité b est multipliée 2 fois par la même. »

Descartes règle l'élimination des grandeurs … par des interventions pensées d'unités masquées.

3.2.5 Décadence des grandeurs : le passage à l'axiomatisation à la fin du XIX^{e} siècle et à la notion de structure

Cette étape est difficile à résumer, car elle concerne ce qu'il est convenu d'appeler l'arithmétisation de l'analyse, à travers la question de la construction de l'ensemble des nombres réels.

Les commentaires tirés de « Mathématiques au fil des âges » éclairent les raisons de ce changement d'orientation :

> « La numérisation des raisons opérée par Descartes passe nécessairement par la géométrie et elle paraîtra paradoxale, une fois le primat de la géométrie remis en cause au début du XIX^{e} siècle. Une autre démarche passe par l'algèbre ; elle est nécessairement embarrassée, puisque le tour de passe-passe consiste à identifier une raison de deux grandeurs A et B à une fraction, notée sans remords A/B, comme si A et B étaient deux nombres entiers. […] Avant la seconde moitié du XIX^{e} siècle, il n'y aura pas de clarification du statut des raisons ou des nombres dits réels permettant de repérer les points d'une droite. C'est alors que, simultanément, plusieurs mathématiciens, principalement Cantor et Dedekind, proposent quelque chose de nouveau, à savoir la construction des nombres réels à partir des seuls nombres entiers. Et, du coup, ils indiquent une propriété limite, essentielle, des nombres réels : si l'on prend une infinité de segments non vides, emboîtés les uns dans les autres, leur intersection contient au moins un point. C'est une propriété nécessaire pour la bonne marche de la méthode de dichotomie à l'œuvre dès les mathématiques grecques, mais elle a été passée sous silence tant elle paraissait évidente sous cette forme géométrique. […] La propriété des segments emboîtés est remplacée par une propriété des coupures, qui lui est d'ailleurs équivalente. ».

Les travaux de Dedekind évoqués ci-dessus datent de 1858, et dans sa préface de son ouvrage intitulé « Continuité et nombres irrationnels", publié en 1872, il précise[(7)] :

(*) Voir « Mathématiques au fil des âges », page 145.

> « Les considérations qui font l'objet de ce court essai datent de l'automne 1858. Je me trouvais alors, en tant que professeur à l'École polytechnique fédérale de Zurich, obligé pour la première fois d'exposer les éléments du calcul différentiel et je ressentis à cette occasion, plus vivement encore qu'auparavant, combien l'arithmétique manque d'un fondement véritablement scientifique. À propos du concept de grandeur variable qui tend vers une valeur limite fixe et notamment pour prouver le théorème que toute grandeur qui croît constamment, mais non au-delà de toute limite, doit nécessairement tendre vers une valeur limite, je cherchai refuge dans les évidences géométriques. Maintenant encore, admettre ainsi l'intuition géométrique dans le premier enseignement du calcul différentiel me semble, du point de vue didactique, extraordinairement utile, indispensable même, si l'on ne veut pas perdre trop de temps. Mais, personne ne le niera, cette façon d'introduire au calcul différentiel ne peut aucunement prétendre avoir un caractère scientifique. Mon sentiment d'insatisfaction était alors si puissant que je pris la ferme décision de réfléchir jusqu'à ce que j'aie trouvé un fondement purement arithmétique et parfaitement rigoureux des principes de l'analyse infinitésimale. »

Dedekind suppose connu le développement de l'arithmétique des nombres rationnels. Ce travail a déjà été réalisé, comme en témoignent les « Éléments d'histoire des mathématiques » de Bourbaki (Masson, 1984) :

> « Les premiers efforts pour rapprocher l'Arithmétique de l'Analyse portèrent d'abord sur les nombres rationnels et sont dus à Martin Ohm (1822) ; ils furent repris par plusieurs auteurs, notamment Grassmann, Hankel et Weierstrass (dans ses cours non publiés) ; c'est à ce dernier que paraît due l'idée d'obtenir un “ modèle ” des nombres rationnels positifs ou des nombres entiers négatifs en considérant des classes de couples d'entiers naturels. »

qui précisent plus loin :

> « Mais le pas le plus important reste à faire, à savoir trouver un “ modèle ” des nombres irrationnels dans la théorie des nombres rationnels ; vers 1870, c'était devenu un problème urgent, vu la nécessité, après la découverte des phénomènes “ pathologiques ” en Analyse, d'éliminer toute trace d'intuition géométrique et de la notion vague de “ grandeur ” dans la définition des nombres réels. »

Le rôle de la mise à distance des grandeurs ne se limite pas à la question des nombres réels et accompagne le mouvement de l'axiomatisation et des structures :

> « Hankel (en 1867), inaugurant l'axiomatisation de l'algèbre, défend une mathématique “ purement intellectuelle, une pure théorie des formes, qui a pour objet, non la combinaison des grandeurs, ou de leurs images, les nombres, mais des choses de la pensée auxquelles il peut correspondre des objets ou des relations effectives, bien qu'une telle correspondance ne soit pas nécessaire. ” ».

Revenons aux travaux de Dedekind et Cantor, à travers les commentaires qui les concernent dans « Mathématiques au fil des âges », pour terminer par la définition axiomatique des nombres réels proposée par Hilbert en 1899.

> « Dedekind montre alors que, sur l'ensemble des nombres réels, la construction analogue à celle qu'il vient d'opérer sur les nombres rationnels, c'est-à-dire la construction des coupures, redonne l'ensemble des nombres réels : c'est le caractère complet de l'ensemble des nombres réels, équivalent à la propriété des segments emboîtés. […] De même, indépendamment de tout recours à la géométrie, sans le support intuitif de celle-ci, Cantor fournit une autre construction, équivalente, des nombres réels [reposant sur les suites fondamentales, notion proche de celle de suite de Cauchy]. C'est l'aboutissement du long cheminement lancé par Eudoxe vers 350 avant J.-C.
>
> En 1899, David Hilbert se contentera de définir $\mathbb{R}$ comme corps totalement ordonné, divisible, archimédien et maximal. Cette maximalité signifie que l'ajout d'éléments fait perdre l'une des propriétés. C'est une façon élégante de marquer le caractère " complet " de l'ensemble des nombres réels. Mais ce point de vue axiomatique, bien commode à certains égards, masque la genèse historique et efface l'aspect constructif. ».

L'approche axiomatique d'Hilbert reposant sur les structures ordonnées (groupe archimédien et corps totalement ordonné) va permettre d'élaborer d'autres caractérisations de $\mathbb{R}$, permettant de justifier le problème jusqu'alors non résolu de l'analogie numérique de toutes les grandeurs scalaires. Le résultat essentiel est le suivant :

> Soit G un groupe (additif) archimédien. Pour tout élément a de G tel que $a > 0_G$, il existe un unique homomorphisme strictement croissant h_a de G dans $(\mathbb{R},+)$ tel que $h_a(a)=1$.

Il permet d'établir des caractérisations axiomatiques de $\mathbb{R}$ parmi les groupes additifs ordonnés, et parmi les corps ordonnés archimédiens : $(\mathbb{R}, +)$ est, à un isomorphisme (non unique) près, le plus grand groupe archimédien ; tout corps ordonné archimédien vérifiant l'axiome de la borne supérieure est isomorphe à $\mathbb{R}$ (et l'isomorphisme est unique).

3.2.6 Un retour progressif des grandeurs, en liaison avec l'algèbre linéaire

Dans ce paragraphe, sont pointées différentes contributions favorisant un retour des grandeurs dans le champ des mathématiques du XX^{e} siècle.

• En physique (et ailleurs), les lois ne dépendent pas des unités choisies pour les grandeurs. Les principes qui gouvernent les relations entre grandeurs font l'objet de l'analyse dimensionnelle, discipline fondée par Joseph Fourier[8], pour redonner à chaque genre de grandeur sa spécificité. Le théorème le plus important de l'analyse dimensionnelle (Théorème de Vaschy - Buckingham) est énoncé en 1894 par le français Vaschy puis par l'américain Buckingham en 1920[9] : sa démonstration fait intervenir la notion de rang d'une matrice.

(8) Voir Dhombres 1997.

(9) Voir les travaux de Jean Sivardière, et en particulier son ouvrage *La symétrie en mathématiques, physique et chimie*, 1995, Presses Universitaires de Grenoble, qui contient de nombreuses références sur ce sujet.

• En 1933, Alex Véronnet (astronome à Strasbourg) publie un cours d'Algèbre contenant un chapitre intitulé « Nombres vectoriels », objets mathématiques dans lesquels sont intégrés les nombres et les unités de grandeurs (de manière formelle).

• On interprète (en mécanique, surtout) les calculs avec unités en termes d'algèbre linéaire : dual, produit tensoriel.

• En 1968, le mathématicien américain Hassler Whitney publie dans *The American Mathematical Monthly*, deux articles : le premier propose une théorie dans laquelle la notion de grandeur est construite en parallèle avec la construction des rationnels et des réels ; le deuxième propose une théorie de l'algèbre des grandeurs, modélisant mathématiquement d'une nouvelle manière « l'analyse dimensionnelle ». Il justifie mathématiquement les pratiques de calculs sur les grandeurs : calcul avec unités, et calcul en « oubliant » les unités, les inconvénients de ce dernier étant soulignés. Les articles de Chevallard et Bosch sur les grandeurs dans les numéros 55 et 59 de Petit x (2000 et 2002) ont rendu accessibles à un large public les étapes essentielles du travail de Whitney.

• En 1985, dans son ouvrage intitulé *Les fondements de la géométrie*, J. Lelong-Ferrand marque la filiation entre les caractérisations axiomatiques de $\mathbb{R}$ d'une part et la question de la mesure des grandeurs d'autre part, ce qui la conduit à faire le lien entre grandeurs et groupes additifs. Mais la question de la multiplication et division des grandeurs d'espèces différentes n'y est pas abordée.

• En 1997, dans l'ouvrage publié aux éditions de la Maison des Sciences de l'Homme à Paris, intitulé *Le nombre, une hydre à n visages, entre nombres complexes et vecteurs*, la contribution de J. Lavau intitulée *Vecteurs ? 151 ans de déloyaux services* propose de réintroduire les grandeurs. Il pointe l'intérêt didactique d'une telle réintroduction pour enseigner des techniques de conversions d'unités que ses élèves apprécient.

3.3. Aspects didactiques

Les éléments d'histoire évoqués au 3.2 montrent bien la difficulté à passer d'une raison (ou d'un ratio) à un nombre rationnel, dont les difficultés de certains élèves à considérer une « fraction » comme un vrai nombre témoignent encore aujourd'hui.

L'objet de cette partie 3 est de traiter les questions de rapports de deux grandeurs de même espèce mais surtout des rapports de deux grandeurs d'espèces différentes dans des questions où l'on est conduit à multiplier ou diviser par de tels rapports, notamment dans situations de proportionnalité entre deux grandeurs.

Afin de cerner les différents « sens » de la multiplication, Henri Lebesgue(10) en signale deux, de la manière suivante :

> Toute question qui conduit à une multiplication est un problème de changement d'unité, ou d'objet : 5 sacs de 300 pommes ; 2 m.75 d'étoffe à 28 fr. 45 le mètre.

Ainsi, il illustre les deux multiplications 5×300 et $2{,}75 \times 28{,}45$ par des

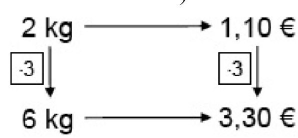
(10) Henri Lebesgue, *La mesure des grandeurs*, Librairie Blanchard, 1975. La citation est une note en bas de la page 13.

expressions dans la langue naturelle convoquant des grandeurs, expressions sur l'on peut écrire plus symboliquement sous la forme :

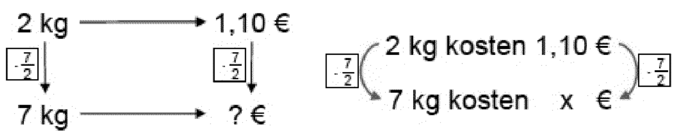
$$5 \text{ sacs} = 5 \times 300 \text{ p.} = 1500 \text{ p. et } 2{,}75 \text{ m} \times 28{,}45 \text{ F/m} \approx 78{,}24 \text{ F.}$$

Le changement d'objet est visible dans la notation F/m, qui témoigne du fait que l'on va changer une longueur en un prix en décidant de faire cette multiplication. On pourrait ici s'en passer. En effet : 2,75 m = 2,75 × 1 m. Or 1 m coûte 28,45 F. Donc, 2,75 m coûtent 2,75 fois plus : 2,75 × 28,45 F. Le lecteur aura reconnu un traitement de la situation employant une procédure scalaire selon la terminologie de G. Vergnaud.
Mais comment justifier l'emploi de la procédure qu'il qualifie de « procédure-fonction » et qui est mieux connue sous le nom de « méthode du coefficient de proportionnalité » en prenant en compte les grandeurs en jeu ? Le recours à une grandeur-quotient (prix au mètre ou longueur par franc) est alors incontournable. Précisons que l'affichage du « prix au mètre » est imposé par la loi, et que savoir l'utiliser fait partie des compétences de base du citoyen que l'école est chargée de faire acquérir à tous les élèves. Un aspect essentiel réside dans le fait qu'une telle grandeur n'est en général pas constante d'un commerce à un autre, contrairement à ce qui se passe dans toute situation de proportionnalité. On ne peut comprendre la conservation d'une grandeur sans avoir rencontré des situations où elle varie. De plus, il existe deux grandeurs-quotients constantes dans toute situation de proportionnalité entre deux grandeurs d'espèces différentes, et elles sont inverses l'une de l'autre, comme on l'a vu dans l'anecdote du 3.1.

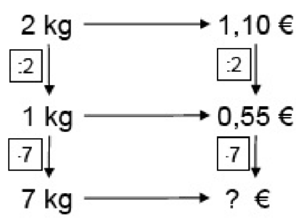
Le document « Ressources pour la classe » consacré aux grandeurs et mesures détaille les manières dont on peut mettre en place des techniques de résolution en harmonie avec ce qui précède. Les illustrations suivantes sont tirées de manuels scolaires allemands (dans les « Realschule ») :



Procédure « scalaire »



Procédure "scalaire" avec scalaire "fractionnaire"



Procédure "Passage par l'unité"

$$\frac{1{,}10\text{ €}}{2\text{ kg}} = 0{,}55\text{ €/kg}$$

Procédure "Calcul d'une des grandeurs-quotients"

Cette dernière procédure est en phase avec la formulation du contexte de la situation, qui est faite en convoquant des grandeurs. L'étape dans laquelle le quotient des deux grandeurs est écrit permet d'identifier le quotient de nombres à considérer (le fameux « coefficient de proportionnalité »).

L'emploi du cadre des grandeurs ne se limite pas aux procédures de résolution de problèmes de proportionnalité. On le retrouve également dans l'étude des fonctions linéaires et affines. Dans les citations suivantes, les fonctions linéaires sont appelées « fonctions proportionnelles » et les fonctions affines sont appelées « fonctions linéaires ». Elles sont tirées d'un ouvrage destiné à la formation des professeurs de mathématiques dans le land de Bavière :

> Eine Abbildung $f : G_1 \to G_2$ zwischen zwei Größenbereichen G_1 und G_2 heißt **proportionale Funktion**, wenn folgende Gleichung fur alle $x, y \in G_1$ erfüllt ist (« Summeneigenschaft ») : $f(x + y) = f(x) + f(y)$.
>
> Eine Abbildung $f : G_1 \to G_2$ zwischen zwei bürgerlichen Größenbereichen G_1 und G_2 heißt **proportionale Funktion** (oder **direkte Proportionalität**), wenn folgende Gleichung für alle $x \in G_1$ und alle $q = \frac{m}{n} \in \mathbb{Q}^+$ erfüllt ist (« Vervielfachungseigenschaft ») :
>
> $$f(q \times x) = q \times f(x) \text{ (bzw. } f\left(\frac{m}{n} \times x\right) = \frac{m}{n} \times f(x)\text{)}.$$
>
> Eine Abbildung $f : G_1 \to G_2$ zwischen zwei Größenbereichen G_1 und G_2 heißt **lineare Funktion**, wenn eine proportionale Funktion $p : G_1 \to G_2$ existiert, so dass für alle $x \in G_1$ gilt :
>
> $f(x) = p(x)$ oder $f(x) = g + p(x)$ für ein $g \in G_2$.

Le deuxième paragraphe peut être traduit ainsi:

Une application (ou fonction) $f : G_1 \to G_2$ entre deux grandeurs G_1 et G_2 de la vie sociale (littéralement deux « domaines civils de grandeurs ») s'appelle **fonction proportionnelle** (ou **proportionnalité directe**) si l'égalité (littéralement « équation ») suivante est vérifiée pour tout $x \in G_1$ et tout $q = \frac{m}{n} \in \mathbb{Q}^+$ (« homogénéité ») : $f(q \times x) = q \times f(x)$ (ou $f\left(\frac{m}{n} \times x\right) = \frac{m}{n} \times f(x)$).

Le lecteur notera que les lettres x et y désignent des grandeurs et non pas des nombres. En effet, les ensembles de départ et d'arrivée des fonctions sont des « domaines de grandeurs », autrement dit des grandeurs d'espèces données. La modélisation mathématique est faite en termes de grandeurs, et non pas comme en France directement en termes de mesures de grandeurs. Cette étape est considérée comme importante en Allemagne pour des populations d'élèves qui se destinent à des études courtes. (Dans les ouvrages de niveau « Gymnasium », les formulations sont les mêmes qu'en France). Elle est également repérée comme difficile dans les classes de la filière ES en France, où le vocabulaire usuel relatif aux fonctions ne peut se cantonner à la terminologie usuelle, comme l'indique le « dictionnaire » ci-dessous tiré d'un ancien document d'accompagnement (1997). On notera que seuls des nombres réels sont considérés. L'importance du fait que $f(b) - f(a)$ et $b - a$ soient des différences de mesures de deux grandeurs de même espèce ou d'espèces différentes n'est pas soulignée : pourtant, l'emploi de l'expression usuelle « taux de variation de f entre a et b » n'est justifié dans certaines disciplines que lorsque les grandeurs sont de même espèce (un taux est « sans dimension »)(11). De même, le fait que $f(b) - f(a)$ et $f(a)$ soient des mesures de grandeurs de même espèce n'est pas explicitement pointé (dans certaines disciplines, leur quotient est donc un taux, ici un taux d'accroissement).

	Expressions courantes	Nom usuel en mathématique
$f(b)-f(a)$	Accroissement absolu de f entre a et b	
$\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$	Accroissement moyen de f entre a et b	Taux de variation de f entre a et b
$\dfrac{f(b)-f(a)}{f(a)}$	Accroissement relatif de f entre a et b	

La définition des grandeurs au niveau du collège-lycée fait en Allemagne l'objet d'articles récents, comme le montre la citation suivante, tirée de la revue « ZDM »(12), plus précisément d'un article de Heinz Griesel intitulé « Reform of the construction of the number system with reference to G. Frege », paru en 2007 :

> Definition of a quantity
>
> A mapping with the domain T and the range V is a quantity (ratio-scale) iff additionally an operation / with values in the set of real numbers ($\neq 0$) is defined in the range, which fulfils the following conditions:
>
> $$(x/y)\ .\ (y/z) = (x/z) \text{ for all } x\ ;\ y\ ;\ z \in \mathrm{V}\ (1)$$
> $$(x/y) = 1 \Rightarrow x = y \text{ for all } x\ ;\ y \in \mathrm{V}\ (2).$$

L'auteur explique ensuite :

> The elements of the set T are called the objects of the quantity. They are embedded in reality. The elements of the set V are called the values of the quantity. The operation / is called measuring or measuring quotient. It is defined by a measuring procedure. $x/y = \lambda$ (read : x measured with y equals λ) means descriptively that y is contained in x lambda times. In this measurement x is compared multiplicatively with y. The result is the real number $\lambda\ (\neq 0)$. The exact definition of the measuring procedure must use the objects of the quantity. Because the objects are interpreted as embedded in reality measuring is ontologically committed.

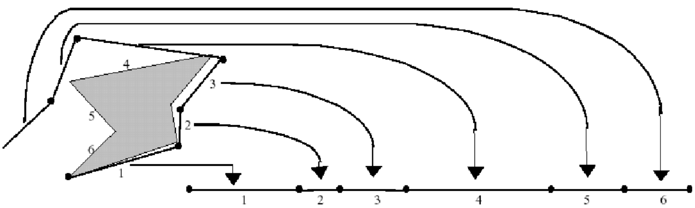
(11) En revanche, la présence du qualificatif « moyen » mériterait une explication, même si l'exemple de la « vitesse moyenne » est assez parlant.
(12) Zentralblatt für Didaktik der Mathematik (nouveau nom : ZDM - The International Journal on Mathematics Education) Springer.

Un traitement analogue (mais plus délicat) est proposé pour définir l'addition en partant des grandeurs. Ces travaux se situent dans le courant de recherches RME (Realistic Mathematics Education)(13).

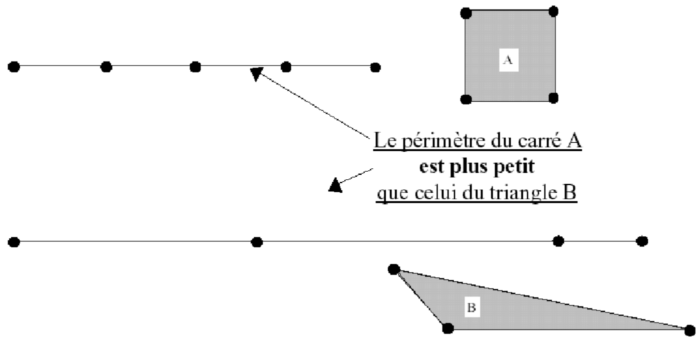
4. La grandeur « Longueur »

Qu'est-ce qu'une longueur ? Comment expliquer à un élève (à l'école, mais également au collège) ce qu'est une longueur sans faire appel à la mesure ? La question est délicate pour un professeur pour qui une longueur est un nombre réel positif. De même qu'on définit ce que sont deux figures de même aire à l'aide d'une relation d'équivalence (équidécomposabilité ou équicomplémentarité), on définit ce que sont deux segments de même longueur avec une relation d'équivalence qui, dans les « petites » classes, est la superposabilité (mise en œuvre avec du papier calque, des gabarits, …). L'addition des longueurs repose sur la concaténation de segments, en langage usuel, leur « mise bout-à-bout ». Plus précisément, la somme des segments [AB] et [CD] est le segment obtenu en mettant « bout à bout » deux segments équivalents à [AB] et [CD]. Cette opération n'est pas nommée dans les programmes de l'école, et ceci depuis longtemps. Cette pratique de « mise bout-à-bout » existait dans certaines pratiques sociales : mesurage avec un décamètre d'une longueur donnée dans la cour, … Aujourd'hui, ces pratiques n'existent presque plus. On peut la travailler à l'école à propos de la notion de périmètre, comme l'illustrent les documents suivants.

Principe du déroulement

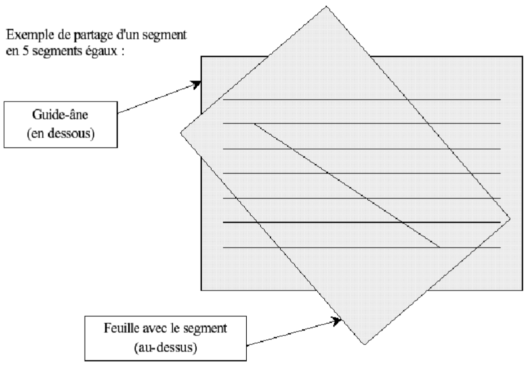


Exemples :



(*) Le lecteur pourra s'en faire une idée dans la brochure de l'IREM de Paris 7 intitulée « Du monde réel au monde mathématique, un parcours bibliographique et didactique », coordonnée par A. Kuzniak, B. Parzysz et L. Vivier, Cahier de DIDIREM, Septembre 2008.

Le seul moment dans la scolarité où une « mise bout-à-bout » est évoquée est la définition de l'addition des vecteurs … en faisant remarquer que la longueur du vecteur somme n'est pas toujours la somme des longueurs des deux vecteurs ! Mais souvent « longueur » est ici synonyme de « mesure ». Pourtant, la définition de la mesure d'une longueur nécessite la mise en place de nombreuses connaissances sur les longueurs. Ainsi, l'addition des longueurs permet de définir, par itération, la multiplication d'une longueur par un nombre entier. La division d'une longueur par un nombre entier est facile par pliage si le nombre est une puissance de 2. Sinon, l'emploi du guide-âne est un moyen permettant de la réaliser matériellement :



[1] Ce nom fait référence à l'âne qui tirait les barges le long des bords parallèles des rivières.

Les difficultés des élèves dans des tâches convoquant la division d'une longueur en parties égales ont été mises en évidence dans les évaluations Sixième. Un segment tracé sur du papier quadrillé est donné, sa longueur étant de 12 « carreaux ». Il s'agit de tracer, également sur papier quadrillé un segment dont la longueur est 1/4, puis 1/6 (ou 1/3) et enfin 5/4 de la longueur du segment donné. Les scores de réussite (en 2004 et 2005) sont respectivement de l'ordre de 55%, 40% et 35%. Un travail sur les aires (des parties égales d'une bande rectangulaire sont colorées ; on demande d'écrire les fractions selon leurs couleurs) : les taux de réussite sont situés entre 70 et 80%.

La grandeur « Longueur », privilégiée par Descartes, à laquelle toutes les grandeurs sont ramenées dans les représentations graphiques, joue un rôle fondamental. La volonté d'utiliser très vite les mesures (en particulier en liaison avec les nombres décimaux) pousse parfois à passer sous silence les opérations sur les longueurs (addition, soustraction, multiplication et division par un entier), opérations sur cette grandeur que l'enseignement des opérations correspondantes sur les mesures (qui supposent le choix d'une unité) ne saurait faire suffire pour les faire exister.

Bibliographie

A.P.M.E.P, (1982) Grandeur, mesure, collection Mots, brochure nº 46.

BASHMAKOVA I. et SMIRNOVA G., 2000, *The beginnings & evolution of algebra*, The

Mathematical Association of America.

BOLTIANSKII, V. (1978) *Hilbert's third problem*, New York : John Wiley & Sons.

CHEVALLARD, Y. (1999) L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique, *Recherches en didactiques des mathématiques*, 19/2, 221-266.

CHEVALLARD, Y., BOSCH, M. (1999-2000) Les grandeurs en mathématiques au collège. Partie I. Une Atlantide oubliée, *Petit x* n° 55, 5-32.

CHEVALLARD, Y., BOSCH, M., 2002, Les grandeurs en mathématiques au collège. Partie II : Mathématisations, *Petit x* n° 59, pp. 43-76, IREM de Grenoble.

DAHAN-DALMEDICO A., PEIFFER J., 1986, *Une histoire des mathématiques, Routes et dédales*, collection Points Sciences, Seuil, Paris.

DHOMBRES J., *Article Réels (Nombres)* de l'Encyclopædia Universalis.

DHOMBRES J., Les grandeurs : évolution d'un concept flexible, in DHOMBRES J., REIGNIER J, ROUCHE N., 1997, Grandeurs physiques et grandeurs mathématiques, CREM A.S.B.L.

DHOMBRES J., DAHAN-DALMEDICO A., BKOUCHE R., HOUZEL C., GUILLEMOT M., 1987, *Mathématiques au fil des âges*, Paris : Gauthier - Villars.

Document ressources pour les mathématiques au collège : Grandeurs et mesures. http://eduscol.education.fr/D0015/doc_acc_clg_grandeurs.pdf

EUCLIDE (1994) *Les Éléments*, volume 2, Livres V à IX, traduction et commentaires de Bernard Vitrac, Paris : Presses Universitaires de France (PUF).

HARTSHORNE, R. (2000) *Geometry: Euclid and beyond, New York*, Berlin, Heidelberg : Springer.

HILBERT, D. (1971) *Les fondements de la géométrie*, édition critique préparée par Paul Rossier, Paris : Dunod.

LEBESGUE, H. (1975) *La mesure des grandeurs*, Paris : Librairie Albert Blanchard.

LELONG-FERRAND J., 1985, *Les fondements de la géométrie*, PUF, Paris.

PRESSIAT A., 2002, Grandeurs et mesures : évolution des organisations mathématiques de référence et problèmes de transposition, in DORIER J.-L., ARTAUD M., ARTIGUE M., BERTHELOT R., FLORIS R., *Actes de la 11e École d'Été de Didactique des Mathématiques*, Corps - 21-30 Août 2001, p. 283-297, La Pensée Sauvage éditions, Grenoble.

ROGALSKI M., avec ROBERT A., POUYANNE N. (2001), *Carrefours entre analyse, algèbre, géométrie*, Paris : Ellipses.