Mathématiques constructives

Henri Lombardi(*)

Résumé.
Au tournant du 20e siècle les mathématiques sont devenues « ensemblistes » (à la Cantor) et non constructives, notamment sous l'impulsion de Hilbert. Elles ont connu un développement extraordinaire dans ce cadre, au prix de perdre une partie de leur substance. Le programme de Hilbert et celui de Poincaré pour remédier à cette perte de sens sont un peu tombés dans l'oubli. On a même pensé un moment que le théorème d'incomplétude de Gödel vidait le programme de Hilbert de sa pertinence, alors qu'il en déplaçait seulement la perspective. La critique du Principe du Tiers Exclu par Brouwer n'a été pleinement appréciée à sa juste valeur que récemment. Le livre d'Erret Bishop, *Foundations of constructive analysis* paru en 1967, a montré quelles merveilles on pouvait obtenir par la prise en compte systématique de la critique de Brouwer. Aujourd'hui mathématiques classiques et constructives sont presque réconciliées, comme le montre le livre de Gilles Dowek *Les métamorphoses du calcul* (2007). L'objet de la conférence est de développer ce survol historique et d'expliquer le renouveau actuel du point de vue constructif.

Un article abordant les mêmes thèmes que cette conférence a été publié dans la revue Repères-IREM en janvier 2003 ([Programme de Hilbert]). Un site web intéressant sur le sujet est le site du groupe MAP (Mathematics, Algorithms and Proofs) http://www.disi.unige.it/map/

Le principe de base et le point de rupture

Le principe de base des mathématiques constructives peut être énoncé comme suit :

Quand on affirme l'existence d'un objet mathématique satisfaisant certaines propriétés, la démonstration de cette existence devrait donner le moyen de construire l'objet en question.

Un exemple classique pour lequel cette requête n'est pas respectée est le suivant : on demande de trouver deux nombres irrationnels α et β tels que α^β soit un nombre rationnel.

La réponse au problème posé est donnée sous cette forme. Si $\alpha = \sqrt{3}$ et $\beta = \sqrt{2}$ conviennent, c'est-à-dire si $\sqrt{3}^{\sqrt{2}}$ est un nombre rationnel, alors on a la réponse au problème. Dans le cas contraire, on peut prendre $\alpha = \sqrt{3}^{\sqrt{2}}$ et $\beta = \sqrt{2}$. En effet, par hypothèse $\sqrt{3}^{\sqrt{2}}$ est irrationnel et $\alpha^\beta = \left(\sqrt{3}^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}} = \sqrt{3}^2 = 3.$

Bien que cette réponse puisse paraître élégante, elle sera jugée comme peu honnête par toute personne sensée qui n'a pas subi la déformation professionnelle usuelle des

(*) Henri.Lombardi@univ-fcomte.fr, http://hlombardi.free.fr mathématicien(ne)s à l'université. En effet, on n'a pas donné une réponse vraiment précise au problème posé : on a seulement suggéré qu'une réponse précise pouvait être donnée dès que l'on est capable de savoir si $\sqrt{3}^{\sqrt{2}}$ est rationnel ou non.

Naturellement cet exemple semble un peu tiré par les cheveux et n'est pas le pain quotidien du(de la) mathématicien(ne). Cependant il s'avère que des exemples qui sont fondamentalement de même nature apparaissent dès les premiers théorèmes que l'on démontre en analyse réelle : le théorème de la valeur intermédiaire, le théorème de Bolzano-Weierstrass ou l'affirmation selon laquelle toute suite croissante majorée de nombres réels admet une limite.

Lorsque l'on analyse en détail les démonstrations de ces résultats, on s'aperçoit que l'on a affaire à des raisonnements de même nature : une alternative est posée, que l'on ne sait aucunement résoudre de manière explicite, et selon que l'une ou l'autre branche de l'alternative est satisfaite, on est capable de poursuivre la démonstration. Mais il n'existe aucun moyen raisonnable a priori pour savoir dans quelle branche de l'alternative on se trouve réellement.

La raison profonde pour laquelle aucun moyen raisonnable n'existe, c'est que l'alternative demande pour être décidée, a priori, une infinité de calculs. Sur le tout premier exemple il est clair que $\alpha = \sqrt{3}^{\sqrt{2}}$ est un nombre réel tout à fait honorable, dont on peut calculer des valeurs approchées avec n'importe quelle précision. Par contre, pour montrer son irrationalité, il faudra, pour chaque rationnel r, calculer α avec une précision suffisante pour certifier que $\alpha \neq r$. Cette infinité de calculs n'est pas à la portée de l'homme, ni d'aucune machine.

Le point de rupture entre les mathématiques constructives et les mathématiques usuellement pratiquées aujourd'hui se trouve donc sur le problème de l'infini mathématique, sa nature, sur les précautions que l'on doit prendre lorsque l'on raisonne avec l'infini.

La rupture introduite par Cantor repose sur une différence d'attitude à l'égard de l'infini. Le point de vue antérieur, ainsi que le point de vue constructif contemporain, tient l'infini mathématique pour une abstraction de caractère « négatif » : l'ensemble des nombres entiers n'est jamais épuisé. Si l'on peut parler de tous les nombres entiers sans restriction, cela ne signifie pas qu'ils soient immédiatement disponibles dans leur totalité. On qualifiera donc l'infinité des entiers comme une simple possibilité, comme un *infini potentiel*, à la manière des Grecs.

La question de l'infini mathématique chez les Grecs

Chez Euclide, une droite n'existe jamais « en entier ». Il y a seulement des segments de droites, que l'on peut prolonger « à volonté ». Le mot « droite » chez Euclide signifie pour nous « segment de droite ». De manière générale aucun infini mathématique (au sens moderne) n'est jamais nommé. Et un segment de droite est un objet à lui tout seul, qui ne peut certainement pas être considéré comme un ensemble infini de points.

La totalité des nombres entiers ne peut pas être nommée, car on admet le principe de base « le tout est plus grand que la partie » qui est contredit par les totalités infimes. Beaucoup plus tard Galilée reprendra l'argument en faisant remarquer qu'il y a autant d'entiers pairs que de nombres entiers, et même autant de carrés que d'entiers. Pourtant il y a manifestement deux fois moins d'entiers pairs que d'entiers, et les carrés sont encore nettement plus rares. Il est impossible de mesurer ces différences, et la raison est qu'il ne faut pas envisager les entiers comme une totalité existante, comme un *infini actuel*, mais seulement comme un infini potentiel.

Un paradoxe de Zenon

Le paradoxe de Zenon, sur la flèche qui ne peut atteindre son but car il lui faut toujours parcourir « la moitié du chemin qui lui reste à parcourir » avant d'arriver au but, nous parle aussi de l'infini.

Il peut être interprété comme une réfutation de la possibilité d'existence de l'infini actuel.

Sans doute ce questionnement se situe-t-il (au moins pour nous aujourd'hui) plutôt du coté de la nature du continu en physique. Nous pourrions par exemple interpréter le paradoxe en posant la question :

Y a-t-il vraiment une infinité d'instants en acte qui adviennent durant le parcours de la flèche ?

La réponse n'est pas claire à la lumière des théories physiques contemporaines. Mais il semble qu'il soit impossible d'envisager une expérience de pensée qui permettrait de donner une réponse positive à la question, car une telle « expérience » est censée consommer une énergie infinie dans un intervalle de temps et dans un espace limité : il faut bien au moins un photon pour manifester chacun des instants. Cette expérience détruirait le dispositif expérimental avant de s'achever.

Pour la plupart des mathématicien(ne)s aujourd'hui, la question de savoir si l'infinité des nombres envisagés par Zenon dans ce paradoxe, à savoir

$$1/2,\ 3/4,\ 7/8,\ \ldots,\ (2^n - 1)/2^n,\ \ldots$$

existe bel et bien, disponible pour nous, ne se pose pas tant la réponse semble évidemment positive. Et le paradoxe semble facile à réfuter, puisque :

$$1/2 + 1/4 + 1/8 + \ldots + 1/2^n + \ldots = 1.$$

Donc l'infinité des petits laps de temps donne une somme finie : le moment où la flèche atteint son but. Dans cette réfutation du paradoxe, le(a) mathématicien(ne) n'a pas l'air de se rendre compte qu'il croit résoudre un problème sur la nature de l'infini simplement en posant une définition : celle de la somme d'une série convergente. Mais une définition ne constitue pas un argument décisif dans un débat. Tout juste permet-elle de l'éclairer. Poser la définition est certes légitime, et fort utile. Justement parce que la somme infinie ne sera jamais écrite en entier, mais seulement pensée.

Une réponse plus acceptable serait donc la suivante.

La question posée par Zenon ne nous concerne pas vraiment, car nous savons comment la contourner. Peu importe que les termes de la somme infinie soient immédiatement disponibles ou pas, puisque nous savons donner un sens, par une définition judicieuse, à l'égalité qui pose a priori problème. Les trois petits points qui terminent la somme n'ont pas besoin de représenter des nombres effectivement présents pour que l’on puisse définir la somme, et raisonner avec cela de manière relativement sûre.

Ajoutons que la définition elle-même n’utilise qu’une infinité potentielle d’objets, et que tout calcul mis en œuvre lorsque l’on utilise cette définition reste un calcul fini.

Naturellement, cette esquive, raisonnable pour le(la) mathématicien(ne), ne résout en aucun cas l’interrogation sur la nature du continu physique.

La diagonale du carré

Il semble utile de rappeler que chez Euclide, ce que nous appelons l’algorithme d’Euclide est avant tout une méthode géométrique pour trouver une plus grande commune mesure, si elle existe, à deux grandeurs de même nature.

Considérons par exemple deux segments de droites, AB et CD, qui admettent pour commune mesure un segment EF, ce qui signifie que l’unité EF est contenue un nombre entier de fois dans AB et CD. Supposant AB > CD, on commence par retrancher autant de fois qu’il est possible le segment CD du segment AB. S’il ne reste rien, c’est que CD était une commune mesure, et c’est manifestement la plus grande possible. S’il reste quelque chose, que nous notons GH, alors toute commune mesure à AB et CD est aussi une commune mesure à CD et GH. On peut donc continuer le processus. Comme GH est strictement plus petit que CD, le nombre de fois que EF est contenu dans GH est inférieur au nombre de fois qu’il est contenu dans CD. Ainsi le processus s’arrête après un nombre fini d’étapes et fournit une commune mesure, nécessairement multiple entier de EF.

Voici donc un résultat qui n’était pas a priori évident : la commune mesure trouvée, qui est la plus grande possible, est multiple de toute autre commune mesure.

Si maintenant on raisonne avec les nombres entiers a et b qui mesurent AB et CD par rapport à l’unité EF, le processus devient un calcul avec des entiers positifs qui fournit un commun diviseur g de a et b, et tout autre diviseur commun de a et b divise g, donc est plus petit que g. Ceci démontre que le plus grand commun diviseur de a et b est multiple de tout autre diviseur commun.

Ce processus de soustractions alternées (on retranche autant de fois que l’on peut CD de AB, puis autant de fois que l’on peut GH de CD, puis …) s’appelle l’*anthyphérèse* dans les textes anciens.

Plus que pour chercher une commune mesure quand il en existe une, ce procédé était surtout utilisé pour montrer l’impossibilité d’une commune mesure entre deux grandeurs données, lorsque l’on montre que l’anthyphérèse ne peut aboutir en un nombre fini d’étapes.

Voyons ceci sur l’exemple du côté et de la diagonale du carré (figure 1).

On démarre avec le côté et la diagonale d’un carré ABCD. Le cercle de centre A passant par B coupe la diagonale AC en E, de sorte que AB = AE. On retranche le côté AB de la diagonale AC et l’on obtient EC. On considère alors le carré EFGC. On a FB = FE = EC, la première égalité parce que FB et FE sont les deux tangentes au cercle menées depuis le point F. Ainsi une commune mesure à AB et AC est aussi une commune mesure à AB et EF, donc à BC et BF = EF, donc à FC et EF : la diagonale et le côté du carré EFGC. Le processus qui consiste à remplacer le carré ABCD par le carré EFGC va se répéter à l'identique. Comme le côté EF est moindre que la moitié du côté AB, les côtés des carrés successifs deviendront moindres que tout segment donné par avance (axiome d'Archimède), et ceci montre qu'une commune mesure à AB et AC est impossible.

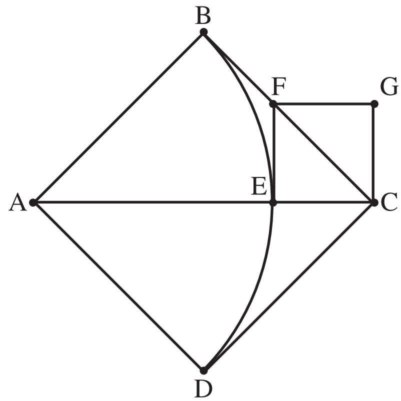

FIG. 1 - L'anthyphérèse de la diagonale et du coté du carré

La théorie des rapports de grandeurs

Pour les Grecs, le nombre $\sqrt{2}$ ne peut pas être *nommé*, il n'a pas le statut d'un nombre parce qu'il ne possède pas de description arithmétique finie (ce n'est pas une fraction).

Pour contourner la difficulté Eudoxe invente une théorie de la comparaison des rapports de grandeurs (reprise chez Euclide) qui permet de parler de ce que nous appelons aujourd'hui les nombres réels sans jamais les nommer comme « infinis actuels » : si A et B sont des grandeurs de même nature (par exemple deux segments) et C et D sont deux autres grandeurs de même nature (par exemple deux surfaces), on dira que A est à B comme C est à D lorsque, pour n'importe quel couple d'entiers m et n, on a :

$$\begin{aligned} m\mathrm{A} > n\mathrm{B} &\Rightarrow m\mathrm{C} > n\mathrm{D}, \\ m\mathrm{A} = n\mathrm{B} &\Rightarrow m\mathrm{C} = n\mathrm{D}, \\ m\mathrm{A} < n\mathrm{B} &\Rightarrow m\mathrm{C} < n\mathrm{D}. \end{aligned} \quad (1)$$

Il s'ensuit que l'égalité de deux rapports non rationnels ne peut pas se faire par un processus direct simple (il faut a priori envisager « n'importe quel couple d'entiers m et n »). D'où la technique de double réduction à l'absurde, qui peut être vue comme une paraphrase de la nécessité de montrer les deux implications extrêmes dans (1).

C'est Brouwer qui élucidera d'un point de vue constructif cette question en établissant une nette distinction entre énoncés de caractère positif, qui peuvent être testés par un simple calcul, et énoncés de caractère négatif, qui nécessitent une preuve, parce que l'approche naïve nécessiterait une infinité de calculs. Le fait qu'un rapport de grandeurs est strictement plus grand qu'un autre est un énoncé de caractère positif (il correspond à une constatation du type $m\mathrm{A} > n\mathrm{B}$ et $m\mathrm{C} < n\mathrm{D}$) tandis que l'égalité de deux rapports est un énoncé de caractère négatif (au moins quand le rapport n'est pas rationnel) car il nécessiterait une infinité de calculs et ne peut donc être atteint que par une démonstration.

Les Grecs ont qualifié de « double réduction à l'absurde » les preuves usuelles d'égalités entre rapports. En fait le contrat à remplir, pour démontrer une telle égalité, est de nature infinie, donc négative. Et toute preuve remplissant ce contrat(1) peut être vue comme la preuve de deux absurdités : pour n'importe quels entiers m et n il est absurde que $m\mathrm{A} > n\mathrm{B}$ et $m\mathrm{C} < n\mathrm{D}$, comme il est absurde que $m\mathrm{A} < n\mathrm{B}$ et $m\mathrm{C} > n\mathrm{D}$.

Si nous revenons à l'exemple cité au départ qui utilisait le nombre $\alpha = \sqrt{3}^{\sqrt{2}}$, nous nous rappelons que le caractère non effectif du résultat tenait au caractère non effectif de la disjonction « α est rationnel ou n'est pas rationnel ». Cette disjonction semble pouvoir être démontrée par l'absurde : il est absurde qu'elle soit fausse car α serait à la fois rationnel et non rationnel. Mais une telle démonstration par l'absurde ne remplit pas le contrat nécessaire pour prouver la disjonction : dire quelle branche de l'alternative est vraie. Il s'agit donc d'une démonstration par l'absurde illégitime, contrairement à la double réduction à l'absurde utilisée pour montrer l'égalité de deux rapports.

La grande controverse

La tradition grecque concernant l'interdiction de l'infini actuel en mathématiques a perduré jusqu'au 19e siècle. Par exemple Gauss s'oppose à l'usage de l'infini actuel dans une lettre à Schumacher en 1831 :

> *Je m'élève contre l'usage de la grandeur infinie en tant qu'objet complet, ce qui en mathématiques n'est jamais acceptable. « Infini » n'est rien d'autre qu'*une façon de parler(2)*, la vraie signification étant une limite que certaines grandeurs approchent indéfiniment, tandis que d'autres sont autorisées à croître sans restriction.*

Peut-être l'un des événements les plus significatifs dans le développement du concept d'infini fut-il la publication en 1840 des *Paradoxes de l'infini* de Bernard Bolzano. Il y écrit que l'infini mathématique existe réellement, et son argument utilise la notion d'ensemble, définie pour la toute première fois : *J'appelle ensemble une collection dont l'ordre des parties est sans influence, et où rien d'essentiel n'est changé si seulement l'ordre est changé.*

Néanmoins c'est à Cantor que l'on doit réellement l'introduction de l'infini mathématique comme outil de travail conduisant à des résultats spectaculaires. On a du mal à imaginer à quel point Cantor heurtait de front les conceptions établies en introduisant la théorie des ensembles « infinis actuels ». C'était à l'époque un

(1) Sauf exceptionnellement dans certains cas où les rapports sont l'un et l'autre évidemment rationnels.
(2) En français dans le texte.

véritable acte de foi. Des affirmations telles que « l'ensemble $\mathbb{N}$ est strictement plus petit que l'ensemble $\mathbb{R}$ » semblaient relever de la folie. Et Cantor lui-même avait du mal à admettre que $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}^2$ ont le même cardinal.

Cependant, les infinis actuels de Cantor ont permis de donner les premières « constructions » en toute généralité des nombres réels.

Dedekind par exemple prétend être le premier à donner une démonstration rigoureuse de l'égalité $\sqrt{2}\sqrt{3} = \sqrt{6}$ dans la mesure où il donne « enfin » un statut « objectif » aux rapports de grandeurs des Grecs en définissant un nombre réel comme un objet infini actuel : deux parties de $\mathbb{Q}$ qui constituent une « coupure ».

Naturellement Dedekind exagère et commet une sorte de péché d'orgueil car les Grecs savaient très bien démontrer que le rectangle ayant pour cotés $\sqrt{2}$ et $\sqrt{3}$ est égal (i.e., a la même aire, en termes modernes) à celui dont les cotés sont 1 et $\sqrt{6}$. Une double réduction à l'absurde, dans leur langage, fait exactement le même travail que la soi-disant « nouvelle et rigoureuse » démonstration de Dedekind avec ses coupures.

Admettre que les nombres réels formaient un ensemble parmi d'autres, une totalité objective et actuelle, suffisait à décoincer une situation délicate. Que le continu (en mathématiques) soit un ensemble de points nous paraît aujourd'hui une idée naturelle, tellement toute question sur la nature du continu est désormais évacuée du champ même de la réflexion par la simple logique du discours : $\mathbb{R}$ est un ensemble de points, circulez il n'y a rien à voir.

La définition générale de la notion de fonction a semblé elle aussi grandement facilitée par la liberté que l'on se donnait de manipuler des ensembles infinis. Plutôt que se poser des questions à n'en plus finir sur ce que l'on fait exactement avec le calcul différentiel, il suffit de définir une fonction réelle par son graphe, qui n'est rien d'autre qu'un ensemble de points dans $\mathbb{R}^2$.

Et Cantor a eu rapidement des adeptes enthousiastes parmi les plus grand(e)s mathématicien(ne)s. En particulier Hilbert, qui fut sans doute le plus influent dans la première moitié du 20^{e} siècle, fit la déclaration suivante : *personne ne nous chassera du paradis que Cantor a créé pour nous*.

Cantor et les paradoxes

La définition la plus fondamentale dans la théorie des ensembles de Cantor est naturellement celle d'ensemble.

Celle que proposait Cantor était de considérer qu'on pouvait prendre n'importe quelle propriété concernant des objets mathématiques, et que cela permettait ipso facto de définir l'ensemble des objets vérifiant cette propriété.

La définition extrêmement laxiste des « ensembles » par Cantor autorise au moins l'ensemble de tous les nombres entiers, en considérant la propriété, pour un objet mathématique, d'être un entier. Cela autorise donc des ensembles « infinis en acte ».

C'était là le principal coup de force contre la tradition grecque qui interdisait la considération de tels infinis. Pour justifier l'existence des ensembles infinis en acte, Cantor et ses supporters ont donné des arguments qui semblent aujourd'hui extrêmement étranges. Dedekind disait par exemple que l'ensemble des pensées est infini parce que si A est une pensée, la pensée que A est une pensée est une pensée distincte de A, ce qui enclenche un processus infini. Sous une forme un peu plus convaincante il aurait pu dire que l'ensemble des nombres entiers susceptibles d'être pensés est a priori non borné. Mais on voit alors qu'on revient ainsi à l'infini « potentiel » des Grecs, lui même basé sur le pari d'un futur infini.

Le coup de force de l'« ensemble infini en acte de tous les entiers naturels » semble a posteriori relativement acceptable. En effet on pourra sans doute systématiquement prendre l'expression $n \in \mathbb{N}$ comme un raccourci de « n est un entier naturel », et l'ensemble $\mathbb{N}$ n'interviendra dans la pratique mathématique qu'à travers le prédicat $n \in \mathbb{N}$. C'est ce qui se passe avec la version constructive de la théorie des ensembles développée par Bishop dans *Foundations of Constructive Analysis*.

Le coup de force de « l'ensemble des parties d'un ensemble » est nettement plus problématique. Ce nouveau coup de force est caché dans la définition extrêmement générale de Cantor pour les ensembles. Cette définition autorise en effet « l'ensemble des parties d'un ensemble ». L'ensemble $\mathfrak{P}(\mathrm{E})$ correspond à la propriété suivante de l'objet X : X est un ensemble dont tout élément est un élément de E.

Un des premiers paradoxes qui apparut dans l'Univers ensembliste de Cantor était le suivant. Si l'Univers de tous les ensembles mathématiques est un ensemble U, alors, toute partie de U est aussi un ensemble, donc un élément de U. Cela signifie que $\mathfrak{P}(\mathrm{U}) \subseteq \mathrm{U}$, mais c'est impossible parce que cela impliquerait $\mathrm{Card}(\mathfrak{P}(\mathrm{U})) \leq \mathrm{Card}(\mathrm{U})$, contrairement à un théorème célèbre de Cantor. Cette découverte est due à Cantor lui-même, en 1899.

En analysant de près la preuve de cette contradiction, on aboutit directement au paradoxe de Russell publié en 1903 (mais il semble que Zermelo avait indépendamment abouti à la même conclusion).

LE PARADOXE DE RUSSELL : *Si l'Univers de tous les ensembles mathématiques est un ensemble* U, *alors considérons la partie*

$$\mathrm{X} = \{\mathrm{Y} \in \mathrm{U} \mid \mathrm{Y} \notin \mathrm{Y}\}.$$

On obtient l'équivalence $\mathrm{X} \in \mathrm{X} \Leftrightarrow \mathrm{X} \notin \mathrm{X}$, *ce qui est absurde*.

En effet de manière générale, d'une implication $\mathrm{A} \Rightarrow \neg\mathrm{A}$ on déduit $\neg\mathrm{A}$, car supposer A conduit à une absurdité. Donc de l'équivalence ci-dessus on déduit $\mathrm{X} \notin \mathrm{X}$ et $\neg(\mathrm{X} \notin \mathrm{X})$. On vient donc de démontrer deux choses contradictoires.

Après l'apparition du paradoxe de Russell, l'impérieuse nécessité d'un éclaircissement conduit les mathématicien(ne)s et logicien(ne)s à tenter de définir un cadre axiomatique pour la théorie des ensembles, dans lequel l'univers de tous les ensembles ne puisse pas avoir droit de cité.

Ce sera l'œuvre de Zermelo (1908). Dans le système d'axiomes qu'il propose, des limites sont imposées aux ensembles pour les empêcher d'être « trop infinis ».

En particulier si on note α_n la suite strictement croissante des cardinaux définie par $\alpha_0 = \mathrm{Card}(\mathbb{N})$ et $\alpha_{n+1} = \mathrm{Card}(\mathfrak{P}(\alpha_n))$ pour tout n, le système de Zermelo ne permet pas de démontrer l'existence d'un ensemble dont le cardinal dépasse celui de tous les α_n.

Certains se sont sentis frustrés par cette limitation, et Skolem et Fraenkel (1922) ont proposé des axiomes supplémentaires pour pouvoir aller beaucoup plus loin dans l'échelle des infinis.

On note **ZF** le système d'axiomes ainsi mis au point. Depuis son invention, il tient bon, et personne n'a trouvé de paradoxe logique. La plupart des mathématicien(ne)s professionnel(le)s sont satisfait(e)s de cette situation : en fait la définition de l'intégrale de Lebesgue et la théorie de la mesure qui se développent au début du 20$^{\mathrm{e}}$ siècle semblent au premier abord nécessiter une théorie comme **ZF**, et l'intégrale de Lebesgue est un outil trop précieux.

Le programme de Poincaré

> *Quant à moi je proposerais de s'en tenir aux règles suivantes :*
> *1. Ne jamais envisager que des objets susceptibles d'être définis en un nombre fini de mots ;*
> *2. Ne jamais perdre de vue que toute proposition sur l'infini doit être la traduction, l'énoncé abrégé de propositions sur le fini ;*
> *3. Éviter les classifications et les définitions non prédicatives.*
> Poincaré. La logique de l'infini [Poincaré 3, 1909]

Poincaré était non seulement un très grand mathématicien (le plus grand de son époque sans doute), mais il a contribué aussi de manière très importante à la philosophie des mathématiques. On peut citer notamment les trois textes [Poincaré 1, Poincaré 2, Poincaré 3] consacrés à l'analyse de la nature de l'infini mathématique.

Les citations en exergue de ce paragraphe constituent en quelque sorte son testament philosophique mathématique et définissent ce que nous appelons le « programme de Poincaré ».

La nécessité de réduire l'infini au fini ainsi que le refus des définitions non prédicatives qu'il énonce ici forment le noyau dur du point de vue constructif en mathématique.

Poincaré développe notamment dans [Poincaré 3] une critique en règle de la théorie formelle de Zermelo. En voici un bref extrait.

« M. Zermelo a voulu construire un système impeccable d'axiomes ; mais ces axiomes ne peuvent être regardés comme des décrets arbitraires, puisqu'il faudrait montrer que ces décrets ne sont pas contradictoires, et qu'ayant fait entièrement table rase on n'a plus rien sur quoi l'on puisse appuyer une semblable démonstration. Il faut donc que ces axiomes soient évidents par eux-mêmes. Or quel est le mécanisme par lequel on les a construits ? On a pris des axiomes qui sont vrais des collections finies ; on ne pouvait les étendre tous aux collections infinies, on n'a fait cette extension que pour un certain nombre d'entre eux, choisis plus ou moins arbitrairement. À mon sens d'ailleurs [...] aucune proposition concernant les collections infinies ne peut être évidente par définition.
[...]

Quant à moi je proposerais de s'en tenir aux règles suivantes :
1. Ne jamais envisager que des objets susceptibles d'être définis en un nombre fini de mots ;
2. Ne jamais perdre de vue que toute proposition sur l'infini doit être la traduction, l'énoncé abrégé de propositions sur le fini ;
3. Éviter les classifications et les définitions non prédicatives.
[...]
On se propose d'enseigner les mathématiques à un élève qui ne sait pas encore la différence qu'il y a entre l'infini et le fini ; on ne se hâte pas de lui apprendre en quoi consiste cette différence ; on commence par lui montrer tout ce que l'on peut savoir de l'infini sans se préoccuper de cette distinction ; puis dans une région écartée du champ qu'on lui a fait parcourir, on lui découvre un petit coin où se cachent les nombres finis. Cela me paraît psychologiquement faux. »

Brouwer et le Principe du Tiers Exclu

On pense souvent que le principe litigieux le plus important en mathématiques classiques est l'axiome du choix.

Certes l'axiome du choix conduit à des constructions fort peu crédibles, comme une base de $\mathbb{R}$ en tant que $\mathbb{Q}$-espace vectoriel, ou la multiplication des boules de $\mathbb{R}^3$ non pas selon les miracles de l'Évangile, mais selon le théorème de Banach-Tarski (voir l'encadré sur ce sujet).

Le théorème de Banach-Tarski

Dans le système axiomatique **ZFC** (théorie formelle de Zermelo-Fraenkel, avec axiome du choix) qui se veut une description de l'Univers cantorien ensembliste, le théorème de Banach-Tarski est l'énoncé suivant :

On peut décomposer la boule unité dans $\mathbb{R}^3$ en une partition finie, de telle sorte que les morceaux de cette partition, réarrangés spatialement via des isométries *de* $\mathbb{R}^3$ *forment maintenant les partitions de deux boules unités l'une à coté de l'autre.*

L'espoir de voir se réaliser la duplication des lingots d'or en application de ce théorème n'a pas encouragé la plupart des mathématicien(ne)s classiques, qui se contentent d'oublier le théorème dans la minute qui suit son énoncé.

En fait, le mal est plus profond que l'axiome du choix, et la plupart des « constructions » à l'œuvre dans la théorie de Cantor ont une signification très obscure, à commencer par la considération de l'ensemble des parties d'un ensemble. Poincaré pensait que de telles méthodes présentent inévitablement des cercles vicieux car elles autorisent des définitions non prédicatives.

En fait comme l'a découvert Brouwer, qui était le principal contestataire de Hilbert au début du 20e siècle, c'est dans le principe du tiers exclu, appliqué sans discernement à des situations par essence infinies, que se situe le principal obstacle quand on essaie d'attribuer une signification claire aux preuves et aux énoncés des mathématiques cantoriennes.

On appelle *principe d'omniscience* un principe qui, bien qu'accepté comme une évidence en mathématiques classiques, pose manifestement problème, car il suppose une connaissance a priori de ce qui se passe dans une situation essentiellement infinie. Le mot omniscience vaut donc ici pour « préscience de l'infini ».

Soit $\alpha = (\alpha_n)$ une *suite binaire*, c'est-à-dire une construction qui pour chaque entier naturel (pris en entrée) donne en sortie un élément de $\{0,1\}$.
Considérons les assertions suivantes :

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{P}(\alpha) & : & \alpha_n = 1 \text{ pour un } n, \\ \neg\mathrm{P}(\alpha) & : & \alpha_n = 0 \text{ pour tout } n, \\ \mathrm{P}(\alpha) \vee \neg\mathrm{P}(\alpha) & : & \mathrm{P}(\alpha) \text{ ou } \neg\mathrm{P}(\alpha), \\ \forall\alpha\big(\mathrm{P}(\alpha) \vee \neg\mathrm{P}(\alpha)\big) & : & \text{pour toute suite binaire } \alpha,\ \mathrm{P}(\alpha) \text{ ou } \neg\mathrm{P}(\alpha). \end{array}$$

Une preuve constructive de $\mathrm{P}(\alpha) \vee \neg\mathrm{P}(\alpha)$, c'est-à-dire une preuve qui rend parfaitement claire l'affirmation correspondante, doit fonctionner avec la signification du « ou » et du « il existe » sous leur forme explicite. En conséquence, un sous-produit de cette preuve serait un algorithme qui décide si $\alpha_n = 0$ pour tout n, et dans le cas contraire calcule un entier naturel n tel que $\alpha_n = 1$. Cet algorithme serait un algorithme général qui s'appliquerait à n'importe quelle suite binaire bien définie d'un point de vue constructif.

Un tel algorithme est beaucoup trop performant, car il permettrait de résoudre de manière automatique, sans effort d'imagination, la plupart des conjectures mathématiques importantes.

En fait nous savons que si un tel algorithme existe, il n'est certainement pas « mécaniquement calculable ». Un programme qui tourne sur machine ne peut sûrement pas accomplir un tel travail même lorsque l'on impose une limitation sévère sur l'entrée α : qu'elle soit une suite binaire primitive récursive(3).

C'est un théorème fondamental de la théorie du calcul mécanisable, que l'on peut exprimer comme suit :

Théorème de la halte des programmes : on ne peut pas tout savoir
Sous trois formes immédiatement équivalentes :

- *Le débuggage ne peut pas être automatisé*(4) *: il n'existe pas de programme* T *qui puisse tester si un programme arbitraire* P *finira par aboutir à l'instruction Stop.*
- *Il n'existe pas de programme qui puisse tester si une suite primitive récursive*

(3) Une suite est primitive récursive si elle se laisse calculer par un programme de nature élémentaire, dont les seules boucles sont des boucles du type

Pour *i* de 1 à *n* faire … finpour.

éventuellement emboîtées les unes dans les autres.

(4) En particulier, l'ex-ministre de l'Éducation Nationale C. Allègre se trompait dans ses déclarations sur le remplacement des mathématicien(ne)s par des machines : celles-ci ne remplaceront jamais l'intelligence humaine pour ce qui concerne nos besoins de connaissance abstraite mathématique, et notamment pour obtenir un fonctionnement correct des machines elles-mêmes.

arbitraire est identiquement nulle.

– *Il n'existe pas de programme* U *qui prenne en entrée deux entiers, donne en sortie un booléen, et qui énumère toutes les suites binaires programmables (la suite* $n \mapsto \mathrm{U}(m,n)$ *est la m-ème suite énumérée par* U).

Non seulement ce théorème, sous sa dernière formulation, ressemble au théorème de Cantor qui affirme que l'on ne peut pas énumérer l'ensemble des suites binaires, mais la preuve, très simple, est essentiellement la même.

Bien que le théorème précédent n'interdise pas a priori l'existence d'une procédure effective mais non mécanisable pour résoudre de manière systématique ce type de problèmes, il confirme l'idée intuitive selon laquelle il faudra toujours faire preuve de nouvelle inventivité pour progresser dans notre connaissance du monde mathématique.

Aussi, d'un point de vue constructif, il faut rejeter le *Petit Principe d'Omniscience (Limited Principle of Omniscience)* :

LPO. Si $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite binaire, alors ou bien il existe un n tel que $\alpha_n = 1$, ou bien $\alpha_n = 0$ pour tout n.

Ce refus semble souvent exagéré : l'interlocuteur a tendance à exiger sur le champ un contre-exemple précis, une suite α qui refuse absolument de se plier au tiers exclu. Ce que ne fournit pas le théorème de la halte des programmes.

En fait, sans prendre parti sur la possibilité qu'existe ou non un tel contre-exemple, ce qui à notre avis ne peut être tranché ni dans un sens ni dans l'autre de manière « objective », il faut plutôt considérer que le refus de **LPO** est indispensable si l'on veut que les preuves d'existence en mathématiques soient des preuves d'existence effective.

Toute personne qui a essayé un jour de programmer le calcul du rang d'une matrice réelle sait qu'il n'y a pas de solution raisonnable. La réponse à la question est fondamentalement instable (sauf au voisinage des matrices de rang maximum), et aucun algorithme sérieux ne sera jamais produit en analyse numérique pour résoudre ce problème. Ce problème est tout simplement mal posé, car il dépend de manière incontournable du test d'égalité à 0 pour les nombres réels, ce qui est une des formes équivalentes de **LPO**.

Si l'on veut donc éviter d'avoir des théorèmes mathématiques d'existence (ici l'existence du rang d'une matrice) sans aucun espoir d'existence explicite, c'est-à-dire sans aucun espoir d'une signification claire du mot « exister », il faut se passer de **LPO**.

Cela peut sembler bien douloureux, mais c'est surtout un problème de culture. Quand on acquiert une culture constructive, l'acceptation de **LPO** semble un acte de surdité ou d'ignorance.

Hilbert et la métamathématique

Hilbert tient les critiques de Poincaré et Brouwer pour sérieuses. Mais ce qui lui importe, c'est avant tout de faire des mathématiques. Or les mathématiques sont plus faciles à faire dans le paradis de Cantor que dans ce qu'il estime être l'enfer de Brouwer.

Hilbert tient le langage suivant : finalement peu nous importe de savoir si les infinis actuels existent ou non, si l'hypothèse du continu(5) a un sens ou si elle n'en a pas ; ce qui nous importe, c'est de savoir si, en utilisant la théorie des ensembles infinis, on est assuré de ne jamais démontrer des énoncés qui ont du sens mais qui seraient faux. C'est exactement la même attitude que vis-à-vis des nombres imaginaires qui servent à trouver la racine réelle d'une équation du troisième degré : l'important est avant tout que, une fois le calcul terminé, et les nombres imaginaires évaporés, le résultat soit juste. Autrement dit, si l'on pouvait réduire l'infini mathématique à n'être qu'une manière de parler (comme le réclamaient Gauss et Poincaré), on serait pleinement satisfait.

À défaut de pouvoir élucider « la sémantique » des ensembles infinis (quelle peut bien être leur signification objective ?), essayons au moins de comprendre « leur syntaxe » : comprendre ce que l'on fait exactement quand on les utilise en mathématiques.

Pour cela, il faut considérer une théorie purement formelle, dans laquelle on puisse librement utiliser les infinis de Cantor d'une part, et dans laquelle on puisse écrire les énoncés mathématiques qui « ont sûrement du sens », d'autre part.

Ensuite, il faut, par des méthodes convaincantes, démontrer que tout énoncé « ayant du sens » et démontré comme vrai dans la théorie formelle, est vrai dans la réalité. C'est ainsi qu'Hilbert invente la *métamathématique*, c'est-à-dire l'étude par des méthodes mathématiques « élémentaires » des systèmes formels qui ont pour ambition de décrire l'activité des mathématicien(ne)s en termes aussi précis et objectifs que possible.

Mais l'activité mathématique, décrite objectivement, ressemble diablement à une encyclopédie de mathématiques, et elle a alors un caractère fini et discret, donc elle est par nature opposée à l'intuition que nous avons du continu. Ainsi le système formel **ZF** (axiomatique de Zermelo-Frankel) ne décrit aucunement l'univers de la théorie des ensembles de Cantor mais seulement une activité mécanisable des mathématicien(ne)s au sujet de cet univers hypothétique.

La théorie *formelle* **ZF** est structurellement analogue à $\mathbb{N}$ mais pas à $\mathbb{R}$, et encore moins à l'univers cantorien de la théorie des ensembles. Cette contradiction entre l'objet supposé de l'étude mathématique et les moyens bien limités dont dispose tout procédé de démonstration automatique s'est résolue dans un flop retentissant du programme de Hilbert initial : il est d'ailleurs fort heureux que le théorème d'incomplétude de Gödel qui produit ce flop interdise par la même occasion à n'importe quelle machine de simuler convenablement les capacités inventives d'Homo Sapiens.

Cela peut sembler après coup comme une évidence bien simple. Soit que l'on croie à l'univers cantorien, mais alors il faut se résigner à une profonde ignorance de la nature réelle de cet univers. Soit que l'on n'y croie pas, et l'échec était prévisible comme l'éclatement de la grenouille qui veut se faire plus grosse qu'un boeuf.

Ce qui n'était sans doute pas prévisible, c'est l'endroit où ça a fait flop, qui est relativement bas dans le degré d'abstraction : c'est l'arithmétique elle-même, et plus

(5) L'hypothèse du continu est l'affirmation selon laquelle toute partie infinie de $\mathbb{R}$ peut être mise en bijection, soit avec $\mathbb{N}$, soit avec $\mathbb{R}$.

précisément n'importe quel système formel ayant pour ambition de décrire de manière suffisamment précise les entiers naturels, qui ne peut pas être prouvé cohérent par des moyens élémentaires.

En ce qui concerne les méthodes convaincantes élémentaires auxquelles il vient d'être fait allusion, Hilbert les voulait vraiment très élémentaires (finitistes, dans sa terminologie). En particulier, elles devaient être plus simples que les méthodes de preuves formalisées dans la théorie de Peano.

Gödel

Gödel apportera deux réponses contradictoires(6) au problème posé par le programme de Hilbert.

La *première réponse* (dans l'ordre chronologique) est que, pour toute théorie formelle qui prétend décrire au moins $\mathbb{N}$, certains énoncés vrais dans la réalité sont indémontrables dans la théorie formelle (premier théorème d'incomplétude). Pire encore la cohérence de la théorie ne peut pas être démontrée avec les seuls moyens formalisés dans la théorie (deuxième théorème d'incomplétude).

A fortiori, la théorie des ensembles semble bien ne jamais pouvoir être prouvée consistante dans la mesure où l'on a incorporé dans son formalisme toutes les méthodes de démonstrations connues, mêmes celles qui sont les plus douteuses.

En fait, le théorème d'incomplétude de Gödel dit qu'il est impossible de capturer la complexité de $\mathbb{N}$, le plus simple des infinis, à l'intérieur d'une théorie formelle à la Hilbert. Ceci semble ruiner définitivement le programme de Hilbert : sauver la théorie des ensembles infinis actuels via le formalisme.

La *deuxième réponse* est que, pour ce qui concerne la théorie de Peano, la logique *avec tiers exclu* n'introduit aucune contradiction. Autrement dit, si l'on pense que la théorie de Peano sans tiers exclu (l'arithmétique de Heyting) est consistante, on est assuré que la théorie de Peano l'est également.

Gödel donnera plusieurs interprétations constructives pour les théorèmes et pour les preuves de la théorie de Peano. Ces résultats, affinés depuis, constituent une réalisation partielle du programme de Hilbert : si l'on admet comme pleinement convaincantes les méthodes constructives (et pas seulement les méthodes finitistes), on s'accorde sur le fait que l'arithmétique de Heyting est une bonne formalisation de méthodes constructives appliquées à l'arithmétique, et donc Gödel a démontré que l'utilisation du principe du tiers exclu limité aux énoncés de la théorie de Peano est sans danger, exactement dans l'esprit du programme de Hilbert.

Cependant la théorie de Peano est un peu trop pauvre pour pouvoir être prise comme base du travail mathématique ordinaire. Un obstacle notable est que de très nombreux énoncés mathématiques usuels, bien qu'équivalents à des énoncés d'arithmétique que l'on peut exprimer dans le langage du système formel de Peano, demandent trop d'efforts pour une telle traduction. Signalons néanmoins deux ouvrages remarquables de Goodstein écrits dans le cadre de l'arithmétique « primitive récursive » [Goodstein, 1, 1957] et [Goodstein. 2, 1961] (un contexte plus simple encore que l'arithmétique de Peano).

(6) Contradictoires seulement au premier regard, naturellement.

On a naturellement cherché à faire un travail analogue pour des théories formelles, plus sophistiquées que celle de Peano, qui rendent mieux compte de l'activité mathématique courante dans le cadre cantorien. Il semble que l'on a établi une sorte de limite au delà de laquelle ce travail n'est plus possible. On est par exemple capable de rendre compte (en termes constructifs) de la théorie des sous-ensembles boréliens de $\mathbb{R}$, mais pas de la théorie de toutes les parties « Lebesgue-mesurables ».

La nouvelle donne

Le combat d'idées entre Brouwer et Hilbert (Poincaré meurt trop tôt, en 1912) se termine à l'avantage de Hilbert, même si le programme de Hilbert semble mis à mort par le théorème d'incomplétude de Gödel.

Et le 20e siècle est le triomphe incontestable des méthodes abstraites non constructives cantoriennes, c'est-à-dire du « paradis » dont Hilbert ne voulait pas être chassé.

Cependant le caractère irrationnel de ce paradis en lequel il est bien difficile de croire, conjugué au développement des méthodes de calcul explicite sur machine produit un retournement de tendance.

Bishop

> *Le point de vue constructif ne signifie pas que les mathématiques classiques sont « sans valeur ». Ce serait aussi stupide que de dire que d'un point de vue « classique » les mathématiques « non rigoureuses » seraient « sans valeur ». Tout théorème de mathématiques classiques pose un défi au(à la) mathématicien(ne) constructif(ve) :*
> *– soit en trouver une démonstration constructive*
> *– soit en donner une version constructive.*
>
> Erret Bishop
> Foundations of Constructive Analysis, 1967.

Une réponse d'une toute autre nature que celle donnée par Gödel est apportée par Bishop avec son livre, *Foundations of Constructive Analysis* [Bishop, 1967] (voir aussi [Bishop & Bridges, 1985]). Les deux traits marquants de ce nouveau style d'écriture mathématique sont d'une part sa totale compatibilité aussi bien avec les mathématiques classiques qu'avec les diverses approches possibles du constructivisme (voir [Bridges & Richman, 1987]), et d'autre part le fait que tous les théorèmes qui sont démontrés ont un contenu algorithmique. Cantor n'est pas le paradis, et Brouwer n'est pas l'enfer. Le programme de Poincaré est viable, ainsi que celui de Hilbert si l'on remplace l'exigence finitiste (trop ambitieuse) par l'exigence constructive.

En ne mettant en œuvre que les idées les plus incontestables de Brouwer, on fait une mathématique, parfois un peu plus difficile[7], mais où tous les énoncés ont du sens (leur signification en dernier ressort est toujours qu'un certain calcul fini aboutit à un certain résultat), où tous les théorèmes sont incontestables, et où, simplement, on regarde un peu plus en détail quelle signification algorithmique réelle se cache dans les énoncés classiques.

(7) Mais ceci est sans doute pour l'essentiel dû au dépaysement.

Dans le livre de Bishop tous les théorèmes d'analyse ont la signification d'algorithmes qui calculent des objets concrets à partir d'autres objets concrets, conformément à certaines spécifications requises, et ces algorithmes sont *prouvés par des méthodes sûres* : en particulier personne ne conteste qu'ils aboutissent certainement en un temps fini au résultat souhaité. Ainsi les bases de l'analyse sont ramenées à un degré de certitude comparable à ce qui règne en théorie élémentaire des entiers naturels.

Bishop va bien au delà de ce qu'avait pu faire auparavant Goodstein dans [Goodstein, 2] : non seulement sont traités une quantité incomparablement plus grande de résultats, mais surtout, le style d'exposition est direct, sans autre différence sensible avec le style mathématique usuel qu'une attention scrupuleuse accordée aux aspects effectifs.

On pourra lire à ce sujet l'article de D. Knuth [Knuth, 1985] dans lequel il analyse quelques « page nº 100 » dans différents livres de mathématiques, dont celui de Bishop, du point de vue de la pensée algorithmique.

Non seulement, le programme de Hilbert (revisité) n'est pas utopique, mais il a de bonnes chances de pouvoir être développé sur une grande ampleur après un tel coup de maître.

En algèbre, le point de vue algorithmique a toujours eu des défenseurs. Il y a de quoi, puisque le mot *algèbre* est tiré de *Al Djabr*, extrait du titre d'un livre écrit il y a fort longtemps par un auteur perse qui s'appelait *M. Algorithme* (Al Kwarismi). Il faut bien évidemment souligner la tradition de Gauss et Kronecker, entièrement dans le style algorithmique. Bien que les méthodes abstraites soient ensuite devenues quelque peu hégémoniques sous l'influence de Hilbert puis de Bourbaki, il est encore permis d'enseigner et de publier des algorithmes. En 1985 le merveilleux petit livre de Mines, Richman et Ruitenburg [Mines, Richman & Ruitenburg, 1988] a fait pour les bases de l'algèbre moderne ce qu'avait fait le livre de Bishop pour celles de l'analyse.

La nouvelle discipline du Calcul Formel (calculs symboliques et algébriques sur machine [Cox, Little & O'Shea, 1998], [von zur Gathen & Gerhard, 2003]) se rattache de facto à cette tradition.

Vers la réconciliation

Le fait que les mathématiques constructives modernes réalisent une variante raisonnable du programme de Hilbert (variante constructive au lieu d'être finitiste) montre que les points de vue se sont rapprochés.

Alors que Hilbert menait une guerre à outrance contre Brouwer, allant jusqu'à le chasser du comité éditorial de la revue Math. Annalen, et ne voyait de salut que dans le formalisme, les héritiers de Brouwer sauvent la mise au programme de Hilbert, sans même utiliser le formalisme.

Les mathématicien(ne)s constructif(ve)s ne mettent guère en doute les résultats concrets obtenus par les méthodes cantoriennes, ils (elles) veulent surtout en donner des démonstrations pleinement convaincantes et donner des algorithmes pour tous les théorèmes d'existence. Les démonstrations classiques de ce genre de résultat ne sont pas des tours de magie. Il y a toujours quelques calculs plus ou moins cachés dans ces preuves. Dans ce travail d'élucidation, des méthodes générales de décryptage automatique des preuves classiques sont mises à jour. Elles réalisent le programme de Poincaré : les affirmations concernant l'infini ne sont jamais que des raccourcis pour des affirmations concernant le fini.

Les logicien(ne)s travaillent eux(elles) aussi très activement sur ce terrain. D'une part ils(elles) développent des méthodes automatiques pour extraire de démonstrations abstraites classiques des algorithmes (cachés dans la démonstration classique) qui réalisent concrètement les affirmations contenues dans les théorèmes.

D'autre part ils(elles) mettent au point des systèmes formels qui rendent compte de traités fondateurs des mathématiques constructives comme [Bishop, 1967] ou [Mines. Richman & Ruitenburg, 1988]. Ceci rejoint les préoccupations formalistes de Hilbert (contrôler en détail ce qui est en jeu quand on écrit des démonstrations) et permet d'établir des comparaisons fines entre mathématiques classiques et mathématiques constructives. Il est par exemple frappant que dans un système formel comme la Théorie Constructive des Types de Martin-Löf (**TCT**), entièrement prédicative conformément aux souhaits de Poincaré, il suffit de rajouter le principe du tiers exclu pour retomber sur **ZFC**. Pourtant alors qu'on a une confiance quasi absolue dans **TCT** on a le plus grand mal à accorder quelque crédit que ce soit à **ZFC**, qui n'a aucune sémantique claire.

Ceci confirme la puissance des analyses de Poincaré et Brouwer.

Conclusion

Les mathématicien(ne)s constructif(ve)s prennent bien souvent comme base de travail les textes classiques pour en extraire la substantifique moelle, tandis que les mathématicien(ne)s classiques sont de plus en plus intéressés à contrôler de manière précise les résultats de nature concrète lorsqu'ils les obtiennent par des preuves d'apparence un peu magique.

D'un point de vue des fondations l'intérêt s'est déplacé depuis longtemps de la théorie des ensembles vers la théorie des catégories, mieux à même de décrire les aspects structurels profonds des mathématiques. Ce n'est sûrement pas un hasard si la théorie des topos cohérents mise au point par Grothendieck pour répondre à des préoccupations structurelles très abstraites se trouve être en même temps un cadre adéquat pour le décryptage constructif de démonstrations classiques (voir par exemple [Dynamical method in algebra, 2001]).

Il semble acquis que les mathématiques vont se réunifier dans une conception générale qui sera capable d'englober les apports des abstractions cantoriennes et ceux des mathématiques constructives modernes. À ce sujet on ne peut que recommander chaudement la lecture du livre de Gilles Dowek [Dowek, 2007], *Les métamorphoses du calcul*, et celle de l'article, plus difficile, de Per Martin-Löf [Hilbert-Brouwer, 2008], *The Hilbert-Brouwer controversy resolved ?*.

Références

[Bishop] Bishop E. *Foundations of Constructive Analysis*. McGraw Hill, (1967).

[Bishop & Bridges] Bishop E., Bridges D. *Constructive Analysis*. Springer-Verlag, (1985).

[Bridges & Richman] Bridges D., Richman F. *Varieties of Constructive Mathematics*. London Math. Soc. LNS 97. Cambridge University Press, (1987).

[Cox, Little & O'Shea] Cox Q., Little J, O'Shea D. Ideals, *Varieties, and Algorithms*, (2nd édition) Springer Verlag UTM, (1998).

[Dowek] Dowek G. *Les métamorphoses du calcul. Une étonnante histoire de mathématiques*, Le Pommier, (2007).

[Dynamical method in algebra] Coste M., Lombardi H., Roy M.-F. *Dynamical method in algebra : Effective Nullstellensätze*. Annals of Pure and Applied Logic, **111**, (2001), 203-256.

[von zur Gathen & Gerhard] von zur Gathen J., Gerhard J. *Modern computer algebra*. Cambridge University Press, Cambridge, (2003).

[Goodstein, 1] Goodstein R. *Recursive number theory*. Amsterdam, North-Holland, (1957).

[Goodstein, 2] Goodstein R. *Recursive Analysis*. Amsterdam, North-Holland, (1961).

[Knuth] Knuth D. *Algorithmic thinking and mathematical thinking*. American Math. Monthly **92**, nº 3 (1985), 170-181.

[Programme de Hilbert] Lombardi H. Le programme de Hilbert et les mathématiques constructives. Revue Repères IREM nº 50 (janvier 03), p. 85-103.

[Hilbert-Brouwer] Martin-Löf P. *The Hilbert-Brouwer controversy resolved ?* dans : One hundred years of intuitionism, Cerisy (1907-2007), eds : Mark Van Atten & al. Publication des Archives Henri Poincaré. Springer (2008).

[Mines, Richman & Ruitenburg] Mines R., Richman F., Ruitenburg W. *A Course in Constructive Algebra*. Universitext. Springer-Verlag, (1988).

[Poincaré 1] Poincaré H. *Le nombre et la grandeur*. Réédité dans « La Science et l'hypothèse ».

[Poincaré 2] Poincaré H. *Les mathématiques et la logique*, Revue de Métaphysique et de Morale, (1905). Réédité dans « Science et Méthode ».

[Poincaré 3] Poincaré H. *La logique de l'infini*, Revue de Métaphysique et de Morale **17**, 461-482, (1909). Réédité dans « Dernières pensées ».