# Problèmes et équations de premier degré en quatrième

## IREM d'Aquitaine-INRP-AMPÈRES Groupe Didactique des mathématiques(*)

Les équations et inéquations servent à résoudre une grande variété de problèmes dans lesquels plusieurs conditions données sont exprimées par des relations entre des nombres ou quantités connus et inconnus. Il s'agit de répondre à la question suivante : y-a-t-il des valeurs qui conviennent pour les inconnues, une seule ou plusieurs, et comment fait-on pour les trouver quand c'est possible ?

La question se présente en cinquième, puis en quatrième et au delà avec les problèmes relevant d'une équation à une inconnue et se poursuivra en troisième et au delà avec les problèmes relevant d'inéquations à une inconnue, des systèmes d'équations et d'inéquations. Dans ce texte nous limitons notre étude aux équations de premier degré en quatrième.

## I. Deux types de problèmes pour les élèves

La façon dont sont données les conditions est une variable didactique très importante.

**Type 1 : Les conditions sont données par des égalités entre des « programmes de calcul ».**

Deux variantes :

– soit directement avec le langage de l'algèbre,
– soit par des phrases formant un problème où deux programmes de calcul sont décrits.

Exemple 1 :

– *Existe-t-il un nombre x tel que* $2x + 14 = 4x - 18$ *?*
– *Y a t-il un nombre qui donne le même résultat si je le multiplie par 2 et que j'ajoute 14 ou si je le multiplie par 4 et que je retranche 18 ?*

Exemple 2 :

– *Trouver x et y tels que* $x + y = 10$ *et* $x + 3y = 15$.
– *Existe-t-il deux nombres inconnus tels que leur somme soit 10 et que l'un ajouté au triple de l'autre donne 15 ?*

**Type 2 : Les conditions sont dans le texte d'un problème où les égalités ne sont pas données.**

*Exemple 3 : Avec la somme dont je dispose, si j'achète 2 CD il me restera 14 €, mais si je veux acheter 4 CD il me manque 18 €. Quel est le prix d'un CD et quelle*

(*) A. Berté, F. Delpérié, C. Desnavres, L. Foulquier, J. Lafourcade, M.-C. Mauratille.

*est la somme dont je dispose ?*

On pourrait dire que c'est le même problème que celui de l'exemple 1 car la solution algébrique consiste à résoudre la même équation : $2x + 14 = 4x - 18$.

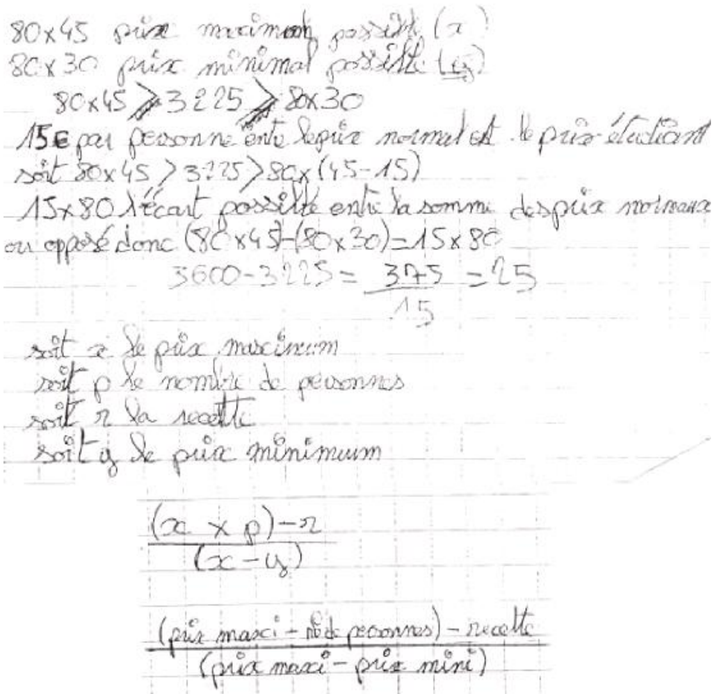
Exemple 4 : *J'ai 10 litres de lait, mais je soupçonne que de l'eau a été mélangée à ce lait. En le pesant je trouve que la masse de ce liquide est 10,240 kg. Sachant qu'un litre de lait a une masse de 1,03 kg, y a-t-il de l'eau dans le liquide et si oui combien ?*(1)

On pourrait dire que c'est le même problème que celui de l'exemple 2 car la solution algébrique consiste à trouver $x$ et $y$ tels que $x + y = 10$ et $x + 1{,}03\,y = 10{,}24$.

Mais l'apprentissage de la résolution des problèmes de type 1 ne suffira pas à rendre les élèves capables de résoudre les problèmes de type 2.

Or, dans les nouveaux programmes de collège, la notion d'équation ne fait pas partie du socle commun mais la résolution des problèmes de premier degré en fait partie. En effet utiliser l'algèbre n'est pas nécessaire pour résoudre les problèmes de premier degré. Nos élèves nous en donnent bien souvent la preuve. Par exemple voici un problème et la solution que nous en donne un élève de quatrième :

Problème : *Pour un étudiant, une place de concert coûte 30 €, alors que le prix normal est de 45 €. La recette pour 80 personnes a été de 3 225 €. Combien d'étudiants ont assisté à cette séance ?*


80x45 prix maximal possible (x)
80x30 prix minimal possible (y)
80x45 ⩾ 3225 ⩾ 80x30
15€ par personne entre le prix normal et le prix étudiant
soit 80x45 > 3225 > 80x(45-15)
15x80 l'écart possible entre la somme des prix normaux
ou opposé donc (80x45)-(80x30)=15x80
3600-3225 = $\frac{375}{15}$ = 25

soit x le prix maximum
soit p le nombre de personnes
soit r la recette
soit y le prix minimum

$\frac{(x \times p)-r}{(x-y)}$

$\frac{(\text{prix maxi} \times \text{nb de personnes}) - \text{recette}}{(\text{prix maxi} - \text{prix mini})}$

(*) Ce problème est donné dans l'article intitulé « Palimpseste » de Philippe Lombard, Bulletin de l'APMEP, n° 466.

Cet élève a utilisé le raisonnement suivant :

Il remarque que la différence entre la recette maximale obtenue avec 0 étudiant (80 × 45) et la recette minimale obtenue avec 80 étudiants (80 × 30) est égale à 80 × (45 − 30) = 80 × 15.

Il en déduit que la différence entre la recette maximale pour 0 étudiant et la recette 3 225 pour un nombre inconnu d'étudiants est le produit de ce nombre inconnu par 15.

Le quotient de cette différence 375 par 15 est donc le nombre d'étudiants cherché.

Cette solution lui a demandé tant d'efforts qu'il a jugé utile d'établir une formule générale en désignant les données par des paramètres nommés $x$, $y$, $p$, $r$. L'inconnue n'est pas désignée.

La solution de cet élève se transpose au problème de la laitière de même type.

Si on n'avait que du lait, soit 0 litre d'eau, la masse serait 1,03 × 10 = 10,3 (le maximum, comme la recette maximale 3 600). Donc il y a de l'eau.

La différence est 10,3 − 10,24 donc de 0,06 kg. Dans le cas du concert c'était 3 600 − 3 225 donc de 375 €.

Cette différence est égale au produit du nombre de litres d'eau cherché par 0,03 (1,03 − 1). Pour le concert c'était le nombre d'étudiants cherché multiplié par 15 soit (45 − 30).

D'où le nombre de litres d'eau est 0,06/0,03 = 6/3 = 2 litres. De même le nombre d'étudiants était 375/15 = 25.

La mise en équation des deux problèmes conduit à un système du type :

$$\begin{cases} x + y = p \\ bx + ay = r \end{cases}$$

La résolution de ce système par combinaison linéaire des équations donne $ax + ay = ap$ donc $(a - b)\ x = ap - r$ qui correspond au calcul de l'élève, mais pas à sa méthode.

La résolution par substitution conduit à l'équation unique $bx + a\,(p - x) = r$ qu'un expert écrira du premier coup, avec une seule inconnue, sans passer par le système.

Tous les problèmes de premier degré peuvent se résoudre par des raisonnements de proportionnalité. C'est le fondement de la seule méthode institutionnalisée pour résoudre des problèmes du premier degré sans l'algèbre, dite méthode de « fausse position », enseignée en France jusque vers 1900 environ.

**Méthode de fausse position pour le problème du concert :**

| | | |
|---|---|---|
| $x_1$ = 10 étudiants, | recette 3 450, | erreur $e_1$ = 3 450 − 3225 = 225, |
| $x_2$ = 20 étudiants, | recette 3 300, | erreur $e_2$ = 3 300 − 3225 = 75. |

Le nombre d'étudiants cherché est $x = \dfrac{x_2 e_1 - x_1 e_2}{e_1 - e_2}$, soit

$$\frac{20 \times 225 - 10 \times 75}{225 - 75} = \frac{3\,750}{150} = 25.$$

Cette méthode était enseignée sans justification. On donnait seulement aux élèves la formule à appliquer, non sous sa forme algébrique comme ici, mais avec des phrases.

**Une justification avec nos notations actuelles :**

Dans l'équation $f(x) = g(x)$, $f$ et $g$ sont des fonctions de premier degré. On utilise la proportionnalité des accroissements pour la fonction $f - g$ nulle pour la valeur $x$ cherchée

$$\frac{\left[f(x_1)-g(x_1)\right]-\left[f(x_2)-g(x_2)\right]}{x_1-x_2}=\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2},$$

soit

$$\frac{e_1-e_2}{x_1-x_2}=\frac{e_1}{x_1-x_2},$$

d'où

$$x_1e_1-x_2e_2=x_1e_1-x_1e_2-x(e_1-e_2),$$

d'où la formule.

Il est exclu d'asséner cette formule aux élèves de quatrième sans justification. Or une justification claire nécessite des connaissances qu'ils n'ont pas en quatrième, notamment une bonne maîtrise des notations algébriques.

**Sans formule les élèves peuvent :**

– continuer les essais (par exemple essayer 30, puis 25 qui convient).
– raisonner avec les deux essais 10 et 20 : si le nombre d'étudiants passe de 10 à 20, on réduit l'écart de 225 à 75 soit de 150. Il faut encore réduire l'écart de 75 donc il faut encore augmenter de la moitié soit de 5, d'où la solution 20 + 5. Selon les valeurs essayées, les calculs seront plus ou moins faciles.
– trouver le raisonnement de l'élève précédemment cité, en l'explicitant plus ou moins.
– trouver un autre raisonnement (par exemple dire que la recette diminue de 15 chaque fois que le nombre d'étudiants augmente de une unité, d'où la proportionnalité qui donne la solution).

Le problème du concert et celui de la laitière sont de même type. Il y a bien d'autres sortes de problèmes que les élèves peuvent résoudre par des méthodes arithmétique ou pré-algébriques, sans écrire d'équation ! Par exemple, pour le problème des CD, les élèves vont :
– soit utiliser le raisonnement par « les écarts » : la différence entre les deux projets d'achat est 2 CD (4 − 2), ce qui provoque une différence de 32 € (14 + 18), donc un CD vaut la moitié, soit 16 €. C'est ce que nous appelons un raisonnement pré-algébrique.
– soit utiliser une méthode par essais plus ou moins élaborée pour arriver plus vite au résultat. Les élèves connaissant à peu près le prix d'un CD risquent de faire un premier essai entre 10 et 20 €. S'ils essaient 15, la correction sera assez rapide pour trouver le résultat sans même de raisonnement.

Ces méthodes sont pour eux plus simples qu'une mise en équation suivie de sa résolution.

## II. Nos choix didactiques

### Choix 1 relatif aux problèmes

Tous les élèves de collège doivent arriver à résoudre les problèmes de premier degré par n'importe quelle méthode, pour satisfaire à une évaluation minimale. Les méthodes arithmétiques seront donc acceptées. Mais peut-on les laisser chercher des méthodes multiples pour chaque problème avec l'incertitude sur la possibilité d'arriver au résultat ?

La mise en équation et la résolution des problèmes du premier degré par l'algèbre est au programme des classes de quatrième et de troisième donc nous devons l'enseigner à tous, sans exigence en revanche de réussite pour tous. Pour cette raison nous avons décidé de ne pas enseigner la technique de résolution des équations en soi. Nous l'introduisons comme une méthode efficace de résolution des problèmes de premier degré.

L'entrée par les problèmes n'est pas un choix facile à assumer pour l'enseignant car nous avons vu que si le professeur pose un problème relativement classique et même assez difficile comme celui des CD ou celui du concert, les élèves vont chercher, voire trouver une méthode arithmétique, ce qui ne les motivera guère à apprendre la technique algébrique.

Nous avons donc choisi de commencer par un vrai problème différent de ceux cités plus haut, et qui permette d'introduire cette technique progressivement en même temps que les élèves vont avancer dans la mise en équation de problèmes.

Ainsi les élèves

– n'apprendront pas une technique sans en avoir compris l'utilité pour résoudre des problèmes.
– ne seront pas rebutés par une accumulation rapide de difficultés techniques.

Pour cela, nous graduons les difficultés, de sorte que la méthode algébrique soit pour eux de plus en plus sûre et plus simple. Ainsi même s'ils tentent une méthode arithmétique sans succès, ils savent que la méthode algébrique peut leur donner la solution et n'ont pas peur de s'y lancer.

### Choix 2 relatif à la technique de résolution

Jusqu'en fin de cinquième,pour résoudre des équations du type $ax + b = c$ nous avons utilisé les définitions de la différence et du quotient.

Ce n'est plus possible pour des équations de la forme $ax + b = cx + d$. Pour résoudre cette équation il y a deux techniques :

– avec les propriétés de l'égalité, on retranche $cx$ et $b$ aux deux membres ce qui donne $ax - cx = d - b$, soit $a'x = b'$ équation que l'on résout en divisant par $a'$ ou en raisonnant sur le quotient.
– avec la différence nulle, on obtient $ax + b = cx + d \Leftrightarrow ax + b - (cx + d) = 0 \Leftrightarrow a'x + b' = 0$.

Nous avons décidé d'enseigner la technique de résolution des équations en utilisant les propriétés de l'égalité vis à vis de l'addition et de la multiplication et non la technique de la différence nulle.

En effet ces propriétés de l'égalité sont nécessaires dans la résolution des systèmes de premier degré par la méthode de combinaisons linéaires des équations. En troisième ou en seconde nous n'excluons pas l'enseignement de la technique par différence nulle qui est employée dès que le degré de l'équation est supérieur à 1. Pour les inégalités et inéquations les deux techniques sont utiles dès la troisième.

**Choix 3 relatif à l'utilisation de la balance**

Nous utilisons l'analogie entre une égalité et l'équilibre d'une balance à plateaux que l'on retrouve dans l'histoire des mathématiques à deux moments :
– Nous avons vu que la méthode de fausse position consiste à repérer les écarts entre deux quantités qui ne sont pas égales pour les valeurs choisies mais qui devraient l'être (« méthode des plateaux » Ibn al Banna- 1256-1321- Marrakech).
– Quand Al Kwarizmi (780-850-Bagdad) s'attaque aux équations de degré 2, il les classe en six types.
Par exemple $ax^2 + c = bx$ est un de ces types qu'il sait résoudre. Pour cela il doit changer les termes de membres dans l'équation initiale par exemple quand il part de $2x^2 - 13\,x + 8 = x^2 + 3$. Il faut garder à l'esprit qu'il ne s'agit pas d'une équation au sens actuel, l'expression de ses « membres » se fait par des phrases, et il n'y a pas de signe =. Al Kwarizmi utilise alors la métaphore de l'équilibre de la balance pour transformer cette équation.(2)

Pour nos élèves la balance peut être utile
– pour la résolution arithmétique des problèmes quand ils optent pour une méthode avec des essais,
– pour la mise en équation d'un problème.
Dans les deux cas il faut comprendre que deux quantités doivent être égales et trouver comment les calculer en fonction d'une inconnue.
– enfin pour la technique de résolution des équations avec la méthode des propriétés de l'égalité.

Nous avons décidé de faire conjecturer par les élèves de quatrième les propriétés de l'égalité pour résoudre un vrai problème mis en scène avec une balance. Ainsi la balance n'est pas une simple illustration ou une « métaphore ». Elle est un élément du « milieu » qui permet de transmettre le problème aux élèves.

Nous sommes conscients des reproches qui sont faits à l'encontre de la balance utilisée comme une image :

(2) Elle devient: $x^2 + 5 = 13x$ par deux rééquilibrages qui sont :
– al-jgàbr ou restauration : si le premier membre $2x^2 - 13x + 8$ doit se transformer en $2x^2 + 8$ , il faut restaurer l'équilibre en rajoutant $13x$ au second,
– muqàbalah ou confrontation qui consiste à enlever 3 des deux côtés.
La distinction vient du fait qu'enlever $-13x$ pose des difficultés de représentation concrète car Al Kwarizmi ne dispose pas des nombres négatifs.

1- Les élèves ne seraient plus familiarisés avec l'utilisation de ce type de balance. En fait depuis leur jeune âge ils utilisent, dans les jardins publics, la balançoire où un enfant est assis à chaque extrémité d'une planche. Ils voient la balance à plateaux à l'école primaire puis en physique. Les chimistes « équilibrent » leurs « équations », sans compter avec le symbole de la justice expliqué en instruction civique…

2- Cette représentation atteint rapidement ses limites avec l'utilisation des nombres négatifs. Certes, mais les élèves peuvent ainsi utiliser les propriétés de l'égalité avec les positifs et démontrer ensuite qu'elles sont vraies pour tous les nombres y compris les négatifs.

De plus la balance n'est pas l'unique approche que nous utilisons.

## III. Déroulement en classe

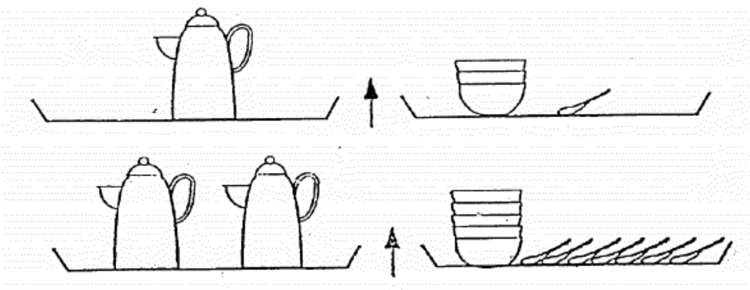
### Situation 1 : Les propriétés de l'égalité

L'objectif de cette situation 1 en trois étapes est de conjecturer les propriétés de l'égalité vis-à-vis des opérations.

Dans les trois étapes les élèves utilisent en acte toutes les propriétés de l'égalité vis-à-vis de l'addition et de la multiplication, avec des nombres entiers positifs. Ils les formulent comme des conjectures pour tous les nombres.

**Étape 1 :** Dans le problème suivant les propriétés de l'égalité vont se révéler utiles car il pourrait se traduire par un système de deux équations à trois inconnues[3].

*Sur les plateaux de ces deux balances il y a des pots, des bols et des petites cuillères. Ces balances sont en équilibre.*



*Combien faut-il mettre de petites cuillères sur le plateau de droite pour que la balance soit en équilibre ?*


*Rédiger la façon dont vous avez raisonné.*

(3) Ce problème est extrait de « Activités mathématiques au collège ». Hors série Petit x, 1992-1993.

<u>Stratégies des élèves :</u>

Lors de cette première activité, les élèves trouvent principalement deux méthodes :

Première méthode : Ils déduisent de la première balance que deux pots ont la même masse que six bols et deux cuillères, ils concluent alors grâce à la deuxième balance que cinq bols et sept cuillères ont la même masse que six bols et deux cuillères et donc qu'un bol a la même masse que cinq cuillères.

Deuxième méthode : Ils déduisent par différence entre les deux équilibres qu'un pot a la même masse que deux bols et six cuillères. Deux bols et six cuillères ont alors la même masse que trois bols et une cuillère et donc un bol a la même masse que cinq cuillères.

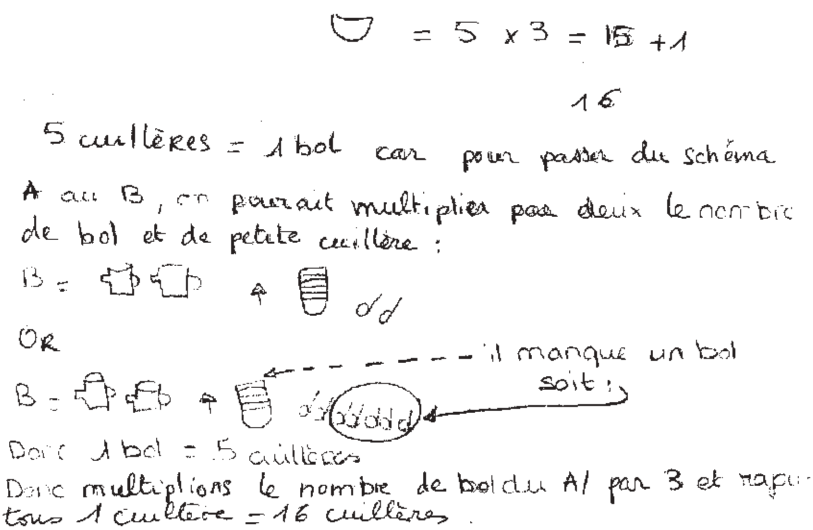
Une fois arrivés à ce résultat, les élèves n'ont plus beaucoup de difficultés pour donner la réponse : un pot a la même masse que seize cuillères.

Quelques élèves affectent au hasard des masses aux objets mais le système essai - erreur qu'ils mettent ensuite en place ne leur permet pas d'aboutir à la solution.

La rédaction de la justification n'est pas aisée. Certains élèves font des phrases comme nous venons de le faire, d'autres font des dessins, d'autres encore utilisent des égalités et écrivent : 1 pot = 3 bols + 1 cuillère pour décrire le premier équilibre. Des élèves écrivent même $1p = 3b + 1c$. On pourrait alors conclure que ceux là ont intégré l'usage de la lettre dans la mise en équation. Cependant, pour la plupart d'entre eux, la lettre « $p$ » ne désigne pas la masse du pot mais simplement l'abréviation du mot « pot » et donc $3b$ est loin de signifier pour eux $3 \times b$ soit « trois fois la masse d'un bol » !

<u>Productions d'élèves :</u>

Production 1 :


= 5 x 3 = 15 +1
16
5 cuillères = 1 bol car pour passer du schéma A au B, on pourrait multiplier par deux le nombre de bol et de petite cuillère :
B = + d/d
Or
il manque un bol soit :
B = + d/d d/d/d/d
Donc 1 bol = 5 cuillères
Donc multiplions le nombre de bol du A/ par 3 et rajoutons 1 cuillère = 16 cuillères.

Cet élève annonce d'abord son résultat (avec une erreur de dessin) : un pot égale

16 cuillères en expliquant 16 par le calcul $5 \times 3 + 1$. Il justifie ensuite pourquoi un bol égale 5 cuillères en utilisant la première méthode et en raisonnant sur les écarts. Il rédige sa solution en utilisant uniquement des dessins.

Production 2 :
Ce deuxième élève utilise des opérations et des égalités pour rédiger sa solution. Il utilise lui aussi la première méthode pour débuter puis il termine en exprimant la valeur de 2 pots en cuillères et il divise par deux.

1 pot = 3 bols + 1 cuillère

2 pots = 6 bols + 2 cuillères = 5 bols + 7 cuillères donc 1 bol = 5 cuillère

donc 2 pots = 5 bols + 7 cuillères = (5×5) + 7 = 25 + 7 = 32

2 pots = 32 cuillères = donc 1 pot = 16 cuillères.

Au cours de la mise en commun, on peut décider de la meilleure présentation et l'usage des lettres obtient l'adhésion de tous ! Voici un exemple de rédaction de la solution, utilisant la première méthode, à laquelle la mise en commun peut aboutir :

On désigne par $p$ la masse d'un pot, par $b$ celle d'un bol et par $c$ celle d'une cuillère.

$1p = 3b + 1c$

$2p = 6b + 2c$ on a doublé la masse de chaque plateau

or $2p = 5b + 7c$ donc $5b + 7c = 6b + 2c$

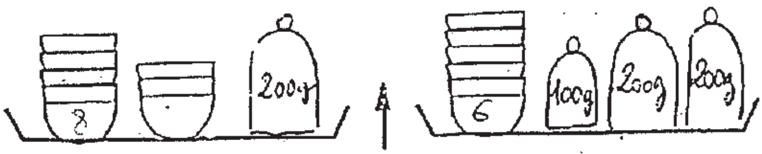
$7c = 1b + 2c$ on a enlevé $5b$ à chaque plateau

$5c = 1b$ on a enlevé $2c$ à chaque plateau

donc $1p = 3 \times 5c + 1c = 16c$ 1 pot est donc en équilibre avec 16 cuillères.

## Étape 2 :

*Cette balance est en équilibre. Quelle est la masse d'un bol ?*




Le nombre de bols est marqué par le professeur pour éviter les erreurs de comptage.

Cette étape permet de retravailler les propriétés de l'égalité déjà vues à l'étape 1, elle permet de poursuivre la formalisation jusqu'à arriver à la technique des équations.

Pour résoudre ce problème, les élèves enlèvent 6 bols et 200g sur chaque plateau. Ils arrivent alors au fait que deux bols et 300g ont la même masse.

Productions d'élèves.

Production 1 :

$8b + 200g \qquad 6b + 100g + 200g + 200g$

1er balance = $8b + 200g$

2ème balance = $6b + 100g + 200g + 200g$

$-200g \quad 8b + 200g = 6b + 100g + 200g + 200g \quad -200g$

$8b = 6b + 100g + 200g$

$-6b \quad 2b = 100g + 200g \quad -6b$

$\div 2 \quad 1b = 150g \quad \div 2$

Production 2 :

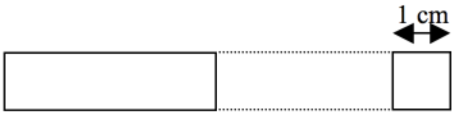
~~A~~ Sa On soustrait 8 Bd par 6 sa fait 2 Bd Comme Dans la 2ème Balance il y a 300g en trop ~~et~~ Ses 300g font 2 Bd alors je divise 300g par 2. Sa fait 150g. 1 Bd ~~est~~ fait 150g

Ainsi, certains élèves ont bien amorcé le travail sur les équations (production 1) et vont encore le parfaire à l'étape suivante. D'autres, cependant, ne sont pas passés à la formalisation (production 2).

Pour consolider l'utilisation des propriétés des égalités, nous proposons l'étape 3 où les élèves sont amenés à utiliser une autre représentation mentale que celle de la balance. La grandeur en jeu sera la longueur et non plus la masse. L'égalité se vérifie par juxtaposition des deux bandes et non par l'équilibre des plateaux d'une balance. Cela donne une autre image mentale de l'égalité aux élèves.

**Étape 3 :**

*On possède un stock de rectangles identiques et de carrés identiques qui ont été découpés dans une baguette de 1 cm de largeur. On constate que si l'on met bout à bout 2 rectangles et 8 carrés cela fait la même longueur que si l'on met 7 rectangles et 2 carrés. Quelle est la longueur d'un rectangle ?*



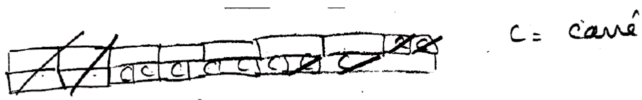

Stratégies des élèves :

On voit apparaître dans la classe plusieurs méthodes, certains écrivent une équation, mais rares sont ceux qui vont au bout de la résolution. Parmi ceux-là, il y en a qui utilisent même deux inconnues pour désigner le carré et le rectangle (voir production 2) : certains aboutissent à : 5 rectangles = 6 carrés. Il y a là encore confusion entre la longueur du rectangle et l'abréviation du mot rectangle.

D'autres font des schémas, et ils sont confrontés au problème de l'égalité des longueurs des deux alignements car ils ont pris une mesure quelconque pour le côté du rectangle. Ils prennent alors conscience qu'une seule mesure doit être solution. Ils mettent alors en place plusieurs stratégies :
– soit ils raisonnent avec deux longueurs différentes des alignements en faisant comme si elles étaient égales,
– soit ils « s'arrangent » pour avoir des alignements de même longueur (voir production 1).

D'autres encore utilisent les propriétés de l'égalité en faisant des phrases (voir production 3).

Production 1 :




5 rectangle = 6 carrée

6 : 5 = 1,2

Une réctangle fait 1,2 cm de long.

Cet élève rédige sa solution en faisant un dessin. Il supprime deux rectangles et deux carrés à chaque ligne. Le dessin est difficile à faire car pour une longueur de rectangle quelconque, les deux assemblages n'ont pas la même longueur. C'est pourquoi il a étiré le dernier « carré ». Cette difficulté va conduire les élèves à se passer du dessin pour aller vers plus de formalisation mathématique.

Production 2 :

carré = x
rectangle : y

2y + 8x = 7y + 2x

6x = 5y

6 ÷ 5 = 1,2

1,2×1 = 1,2cm

La longueur du rectangle est de 1,2cm

On enlève deux carré partout et deux rectangles partout donc 6 carrés est égal à 5 rectangles.
6 ÷ 5 = 1,2 ; 1,2×1 = 1,2 cm
donc la longueur du rectangle est de 1,2cm

Cet élève utilise des lettres pour rédiger sa solution, il a même choisi $x$ et $y$ et non $c$ et $r$, initiales des mots « carré » et « rectangle ». Dans la deuxième colonne, il explique son calcul par une phrase. Il a bien utilisé les propriétés de l'égalité.

Production 3 :

si l'on enlève 2 rectangles et 2 carrés il reste
5 rectangles et 6 carrés
6 ÷ 1.2 = 5 et 5 × 1.2 = 6 ÷ 5 = 1.2
Donc la largeur d'un rectangle est ~~de~~ 1.2 cm

Cet élève utilise uniquement des phrases pour rédiger sa solution.

Lors de la mise en commun, la classe se met d'accord sur la présentation de la solution, en appelant par exemple $x$ la longueur du rectangle et en écrivant l'équation. Le professeur indique la résolution classique, en faisant le lien avec la production des élèves.

À la fin de cette étape, le professeur incite les élèves à formuler les propriétés de l'égalité :
« Quand on a une égalité, on obtient une autre égalité
– en ajoutant (ou en soustrayant) le même nombre aux deux membres de l'égalité,
– en multipliant (ou en divisant) chaque membre par un même nombre (non nul). »

Jusqu'ici les élèves n'ont utilisé ces propriétés qu'avec des nombres positifs. Il faut maintenant les généraliser avec tout type de nombre, voire avec une expression algébrique. Le professeur peut les justifier de la façon suivante pour les institutionnaliser :
Comme $a = b$, si on ajoute $c$ à $a$ , cela donne : $a + c$. Il suffit de substituer $a$ à $b$ dans cette somme et on obtient $a + c = b + c$.
On peut procéder de même pour la multiplication. Mais on pourrait se passer de cette propriété, car quand on s'est ramené à une équation du type $ax = b$ en utilisant seulement la transformation des membres par addition, la définition du quotient est suffisante.

Certains manuels proposent la démonstration suivante : $a = b$ donc $a - b = 0$. Calculons $(a + c) - (b + c) = a - b = 0$, donc $a + c = b + c$.
Nous préférons utiliser la substitution qui nous semble intuitivement plus immédiate.

**Situation 2 : Trois problèmes où le passage à l'algèbre est relativement simple(4).**

Problème 1 : *Deux élèves Alice et Bertrand ont chacun une calculette. Ils affichent le même nombre sur leur calculette. Alice multiplie le nombre affiché par 3 puis ajoute 4 au résultat obtenu. Bertrand multiplie le nombre affiché par 2 puis ajoute 10 au résultat obtenu. Quand ils ont terminé ils s'aperçoivent que leurs calculettes affichent le même résultat. Quel nombre ont-ils affiché au départ ?*

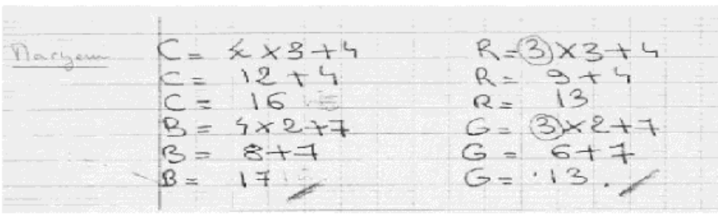
(4) Ces problèmes sont extraits de l'ouvrage «Les débuts de l'algèbre au collège », Éditions INRP. Ils sont repris dans les commentaires de programmes « Du numérique au littéral ».

Problème 2 : *Deux élèves Alice et Bertrand ont chacun une calculette. Ils affichent le même nombre sur leur calculette. Alice multiplie le nombre affiché par 6 puis ajoute 7 au résultat obtenu. Bertrand multiplie le nombre affiché par 2 puis ajoute 10 au résultat obtenu. Quand ils ont terminé ils s'aperçoivent que leurs calculettes affichent le même résultat. Quel nombre ont-ils affiché au départ ?*

Ces problèmes nous ont parus intéressants à double titre :
– Ils permettent d'éviter autant que faire se peut le recours à l'arithmétique. Le contexte très abstrait, diffère de celui du problème suivant : « *le prix de 6 sucettes et de 7 bonbons est le même que celui de 2 sucettes et 10 bonbons ; sachant qu'un bonbon coûte 1€, quel est le prix d'une sucette ?* ». Dans ce cas, l'équation serait la même que celle du problème 1 mais une grande majorité d'élèves résout ce problème comme ils l'auraient fait à l'école élémentaire, en disant que 4 sucettes coûtent le même prix que 3 bonbons et donc qu'une sucette coûte 0,75€.
– Le contexte abstrait entraîne une mise en équation plus facile que dans un problème dit « concret ».

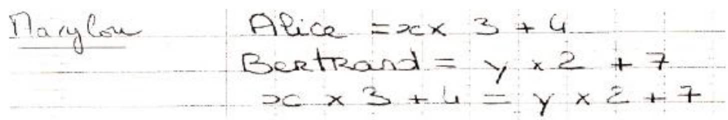
Le professeur commence avec le problème 1. Certains élèves trouvent rapidement la solution qui est 3, en faisant des essais. Le professeur leur donne alors aussitôt le problème 2 dont la solution est 0,75.

Voici la production d'une élève qui a fait des essais :


Maryam
C = 4 × 3 + 4
C = 12 + 4
C = 16
B = 4 × 2 + 7
B = 8 + 7
B = 17
R = 3 × 3 + 4
R = 9 + 4
R = 13
G = 3 × 2 + 7
G = 6 + 7
G = 13

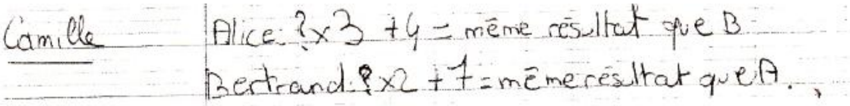
Quand les élèves font des essais, la lettre a pour eux le statut de variable. Ce statut de variable leur fait oublier le statut d'inconnue, d'autant plus que les deux membres de l'équation sont des programmes de calcul abstraits.

Par exemple cette élève désigne la variable de chaque programme de calcul par deux lettres différentes et s'arrête en oubliant qu'il s'agit de la même inconnue.


Marylou
Alice = x × 3 + 4
Bertrand = y × 2 + 7
x × 3 + 4 = y × 2 + 7

Nous avons trouvé des productions du genre : Alice 3 × 5 + 4 = 19 et Bertrand 2 × 6 + 7 = 19. Ces élèves ont la même difficulté que Marylou, ils prennent deux nombres différents au départ et pensent avoir résolu le problème car ils ont trouvé le même résultat. Ils disent qu'il y a égalité, mais ne peuvent pas conclure. Envisager la lettre comme une variable devient un obstacle à la compréhension de ce qu'est une équation.

Il y a d'autres difficultés aussi bien pour le problème 1 que pour le 2, qui viennent de la transitivité de l'égalité.

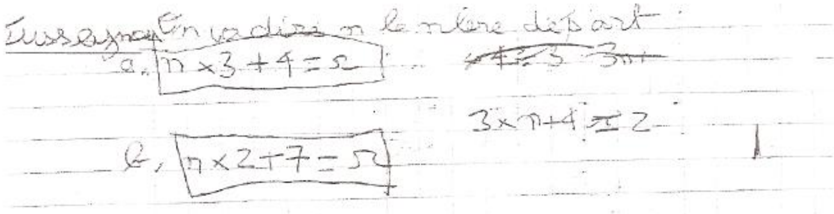

Camille

Alice: ?x3 +4 = même résultat que B

Bertrand: ?x2 +7 = même résultat que A.

Cet élève a bien désigné l'inconnue par un point d'interrogation, mais il a oublié qu'il peut la trouver en écrivant une égalité. Rappeler la balance ou les bandes de même longueur lui sera utile. De plus avec la notation « ? », on ne sait pas si l'élève a bien compris qu'il s'agit du même nombre dans les deux calculs.

D'autres désignent le résultat commun d'Alice et Bertrand par une lettre et ils n'arrivent pas à écrire l'équation, car pour eux il y a deux inconnues.


~~Essayons~~ En va dire on le même départ

a. $\boxed{n \times 3 + 4 = z}$

$3 \times n + 4 = z$

b. $\boxed{n \times 2 + 7 = z}$

D'autres écrivent, Alice : $x \times 6 + 7$, Bertrand : $x \times 6 + 7$ et

$$x \times 6 + 7 = x \times 2 + 10$$

Ils ont écrit l'égalité mais ne savent pas continuer en utilisant ses propriétés car ils ne reconnaissent pas la situation rencontrée dans les problèmes précédents de masses ou de longueurs égales.

Ils confondaient jusque là, les objets, les grandeurs et les mesures associées à cause de l'écriture $6x$ qui peut se lire comme une multiplication externe (6 objets aussi bien que 6 fois une mesure). Ceci a facilité implicitement la construction du sens dans leur travail. Ici, la mise en équation étant facile, ils écrivent $x \times 6$ qui ne peut être qu'une multiplication interne car ici x ne peut être autre chose qu'un nombre.

La rencontre à ce moment de la progression avec ces problèmes abstraits est donc indispensable pour franchir cet obstacle que les élèves rencontrent toujours dans les mises en équation pour résoudre des problèmes, quel que soit le mode d'introduction des équations adopté par l'enseignant.

Certains élèves, après avoir écrit l'équation, raisonnent sur les écarts pour la résoudre. L'écart $6x - 2x$ vaut $4x$ et l'écart $10 - 7$ vaut 3. Ils en déduisent facilement que : $4x = 3$

Ceux qui raisonnent ainsi sur les écarts vont plus vite que les autres, ils sont donc persuadés d'avoir trouvé une méthode plus efficace. Cela les empêche de comprendre la méthode générale si on ne remet pas leur méthode en cause avec le problème suivant :

Problème 3 : *Alice et Bertrand ont chacun une calculette. Ils affichent le même nombre sur leur calculette. Alice multiplie le nombre affiché par 5 puis ajoute 4 au résultat obtenu. Bertrand multiplie le nombre affiché par 10 puis ajoute 7 au résultat obtenu. Quand ils ont terminé ils s'aperçoivent que leurs calculettes affichent le même résultat. Quel nombre ont-ils affiché au départ ?*

Les élèves sont conduits à écrire $5x + 4 = 10x + 7$.

Celui qui raisonne avec les écarts pour résoudre cette équation va trouver $5x = 3$, d'où une solution positive qui se révèlera fausse au moment de la vérification car la solution est négative.

D'autres pensent que c'est impossible car $10x > 5x$ et $7 > 4$ donc $10x + 7$ est forcément supérieur à $5x + 4$.

À la suite de cet enchaînement de situations, le professeur pourra mettre en place la méthode de résolution des problèmes à l'aide d'une mise en équation.

**Situation 3 : Suite ordonnée de problèmes à résoudre en classe**

Chaque exercice permet d'aborder des difficultés de plus en plus grandes pour la mise en équation, et/ou une difficulté différente au niveau des calculs algébriques nécessaires pour résoudre l'équation.

Parallèlement à ces problèmes traités en classe, le professeur fait résoudre des exercices techniques en rapport avec les difficultés rencontrées dans les problèmes.

Toutes les solutions arithmétiques de ces problèmes proposées par les élèves sont acceptées. Ils en trouvent toujours quelques unes assez astucieuses. Mais, à la fin de cette progression, ils ont compris que le recours à l'algèbre leur permet de trouver toujours la solution, et ils n'hésitent plus à l'utiliser.

**Problème 1 :** *Un nombre est tel que son double augmenté de 16 est égal à son triple diminué de 21. Quel est ce nombre ?*

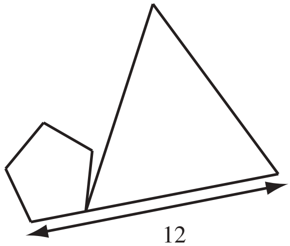
Pour la première fois ici, il est nécessaire d'ajouter le même nombre aux deux membres de l'égalité. La confrontation des différentes méthodes est l'occasion de rappeler que soustraire −21 c'est ajouter 21.

**Problème 2 :** *Je pense à un nombre, j'enlève son double de 20, je trouve le même résultat que si j'ajoute 15 à son triple. Quel est ce nombre ?*

Dans ce problème, l'un des coefficients de $x$ est négatif, il va falloir ajouter $2x$ aux deux membres de l'égalité. C'est plus difficile que d'ajouter un nombre connu comme au problème précédent.

**Problème 3 :** *Je pense à un nombre, je lui ajoute 20, puis je double le résultat obtenu. Curieusement, je trouve 10 fois le nombre de départ. À quel nombre ai-je pensé au départ ?*

Il faut d'abord utiliser la distributivité, pour réduire l'expression, avant de résoudre l'équation. La mise ne équation donne $2(x + 20) = 10x$.




**Problème 4 :** *Calculer le côté x du pentagone régulier pour que son périmètre soit égal à celui du triangle équilatéral.*

La mise en équation donne $5x = 3(12 - x)$.Cet exercice nécessite l'utilisation de la distributivité de la multiplication par rapport à la soustraction.

**Problème 5 :** *Un père a 42 ans. Il a trois enfants de 11, 9 et 4 ans. Dans combien d'années l'âge du père sera-t-il égal à la somme des âges de ses trois enfants ?*

La mise en équation devient difficile car il ne s'agit plus de programmes de calcul. Les élèves doivent se représenter la situation en imaginant les années qui passent. Le choix de la variable « nombre d'enfants » est important. Avec deux enfants seulement (par exemple 11 ans et 9 ans) la mise en équation présente exactement la même difficulté qu'avec trois enfants. Elle conduit à : $42 + x = 11 + x + 9 + x$. Mais, dans ce cas, pas mal d'élèves évitent l'algèbre en raisonnant sur l'écart entre l'âge du père et la somme des âges des deux enfants qui diminue d'une année par an. Ils suivent l'évolution de la différence à mesure que la variable nombre d'années augmente. Cela se fait mentalement, ce qui donne la solution par simple différence sans équation. $42 - (11 + 9) = 22$ et la réponse est 2 ans. C'est un peu plus difficile avec trois enfants car l'écart diminue de 2 ans chaque année, donc il faut diviser par 2 la différence, d'où notre choix de trois d'enfants.

Après ce problème 5, un élève nous a demandé s'il était possible qu'un tel problème « concret » ait des solutions négatives. Le problème 6 est la réponse à sa question.

**Problème 6 :** *Un père a 38 ans. Ses quatre enfants ont 18, 12, 8 et 6 ans. L'âge du père a-t-il été égal ou sera-t-il égal à la somme des âges de ses quatre enfants ?*

La mise en équation est plus difficile car la question ne porte pas sur l'inconnue à désigner par $x$.La solution est $-2$ : il y a deux ans l'âge du père était la somme des âges de ses quatre enfants.

**Problème 7 :** *Un nombre est tel que son tiers augmenté de son cinquième est égal à 110. Quel est ce nombre ?*

La résolution nécessite ici un travail sur la somme de deux écritures fractionnaires.

**Problème 8 :** *On a trois sacs de bonbons. Le premier contient 30 bonbons de plus que le troisième, le deuxième contient 6 bonbons de moins que le troisième. En tout il y a 150 bonbons. Quel est le nombre de bonbons dans chaque sac ?*

Même si le problème comporte trois inconnues il n'est pas difficile d'écrire deux inconnues en fonction de la troisième. Si on pose ce même problème en début d'apprentissage, les élèves proposent des solutions qui n'utilisent pas d'équations, c'est rarement le cas lorsqu'il vient à la fin d'une série de problèmes comme celle-ci.

## Conclusion

Nous avons vu des problèmes où les relations entre les nombres concernent un seul nombre inconnu et fournissent une seule égalité entre deux programmes de calcul. Mais, au lieu d'une égalité, les conditions données peuvent conduire à une inégalité. Il y a aussi des relations qui concernent plusieurs inconnues et les élèves ont commencé à comprendre qu'elles peuvent conduire à plusieurs égalités.

Lors de la résolution d'un problème par la méthode algébrique, les élèves manipulent trois des statuts de la lettre en algèbre : inconnue, variable quand ils font des essais, indéterminée quand ils remplacent l'expression d'un des membres par une expression réduite. Nous avons remarqué que parfois les élèves privilégient le statut de variable dans les équations en centrant leur attention sur l'expression de chacun des membres vus comme deux fonctions de cette variable, comme cela est nécessaire dans les méthodes arithmétiques de fausse position. Parfois même certains élèves ne voient plus alors que deux programmes de calcul indépendants, au détriment de l'écriture d'une égalité. Le statut de variable est devenu un obstacle, mais il ne peut être évité, il fait partie de l'apprentissage. Nous avons néanmoins décidé de ne pas démarrer cet apprentissage en mettant en scène la méthode des essais pour résoudre un problème ou une équation de premier degré choisis de sorte que la solution non entière ne puisse être trouvée par un petit nombre d'encadrements avec des essais. Ceci renforce de prime abord le statut de variable de la lettre. Or les élèves font d'eux-mêmes des essais, ce qui suffit pour rencontrer puis franchir l'obstacle. De plus, il en ressort implicitement que la technique algébrique de résolution des équations permet seule de trouver la solution, d'où la nécessité de l'apprendre. Ce n'est pas le cas pour le premier degré puisqu'un raisonnement par proportionnalité sur ces essais y conduit.

Le professeur ne doit pas hésiter cependant à introduire ce statut de variable en troisième en passant dans le cadre graphique pour résoudre des équations ou des systèmes d'équations. Dans les problèmes relevant de la résolution d'inéquations, le statut de variable de la lettre est indispensable pour comprendre que l'ensemble des solutions est un intervalle ou une réunion d'intervalles dans lesquels l'inconnue peut prendre tout un ensemble ordonné de valeurs.

Une réflexion sur les différents statuts des lettres peut guider le professeur dans la préparation des prochaines leçons, pour construire des situations d'enseignement jusqu'en seconde.