Un lutin … et trois bras

– Du Collège à la TS spécialité maths –

Henri Bareil[(*)]

Un énoncé qui m'a accroché[(1)] *:*

Le parchemin :

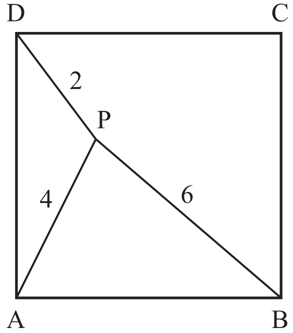

Figure 1

Sur ce parchemin ne figurent qu'un carré, trois segments et trois indications de longueur. Déterminer l'angle $\widehat{\mathrm{APD}}$.
On pourra construire l'image de cette figure par la rotation de centre A *d'angle 90° qui transforme le point* B *en point* D.

Un tel énoncé suppose l'existence d'un point P intérieur au carré ABCD et tel que ses distances à A, B, D soient connues, avec on ne sait quelle unité.
(Comme de toutes façons, les dessins sont toujours « à l'échelle », ce qui conserve les angles, l'absence d'unité n'a aucune importance pour la question posée. De même pourrait-on remplacer 2 ; 4 ; 6 par des nombres proportionnels, ainsi 1 ; 2 ; 3).

JE VAIS REPRENDRE CE PROBLÈME SOUS D'AUTRES ASPECTS :

***Étant donné un triangle* ABD, *existe-t-il des points* P *de son plan tels que* PA, PB, PD *soient des mesures imposées* ?**

Je traiterai d'abord le cas* ABD *rectangle isocèle, comme à Créteil, avec les mêmes mesures. Puis je tenterai des généralisations.

Que se passe-t-il si on part de [AD] arbitraire ?

(*) Institut du Lauragais.
(1) Exercice n° 3, de l'Académie de Créteil, des Olympiades Académiques de Première en mathématiques 2006 (Brochure APMEP n° 177, page 83). Voir aussi le site APMEP.

Il faut, d'abord, des unités *ad hoc* pour que les cercles (A, PA) et (D, PD) se coupent ! Dès lors ces cercles proposent une infinité de points P. Mais aurons-nous alors pour PB la longueur imposée ?

D'où trois démarches :

I. À partir d'un point P, construire, si possible, un triangle ABD répondant aux conditions.
II. À partir d'un triangle ABD, construire P.
III. Chercher d'emblée, par le calcul, une relation entre le triangle ABD et les distances PA, PB, PD.

I. Du point P vers ABD rectangle isocèle

ÉTUDE AVEC PD = 2, PA = 4, PB = 6.

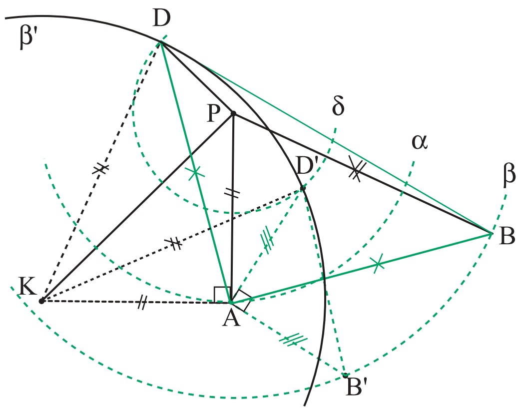

Figure 2

CLÉ : A, D, B sont sur des cercles connus. De plus, ils se correspondent dans des transformations…

DÉVELOPPEMENT : D, A, B sont sur les cercles respectifs δ(P ; 2), α(P ; 4), β(P ; 6). Or je peux associer D et B par une rotation de centre A et d'angle 90°.

D'où une construction :
Je choisis arbitrairement A sur le cercle α.
J'applique la rotation $\mathcal{R}$(A ; B → D).
Dès lors le cercle β a pour image un cercle β' (de centre K image de P) auquel appartient l'image de B, c'est-à-dire D.
D est donc à l'intersection, si elle existe, des cercles δ et β'.
Une figure correcte témoigne de l'existence, en dépit des approximations du dessin (sinon : la distance des centres étant PK égale à $4\sqrt{2}$, on a bien la relation d'inégalité triangulaire).

Soit D *et* D′ *les deux points* D *obtenus.*
Il leur correspond B et B′ par la rotation de centre A et d'angle 90°, dans le sens différent de celle qui envoyait B sur D.

Il apparaît ainsi deux triangles rectangles isocèles ABD *et* AB′D′ *tels que* P *est intérieur au premier et extérieur au second.*

Et la valeur de $\widehat{\mathrm{APD}}$?

Roger Cuppens a immédiatement remarqué qu'en isolant sur ma figure 2, la configuration PAKD, on trouve celle (figure 3), très vite exploitable, (à laquelle conduit d'ailleurs le conseil de Créteil).

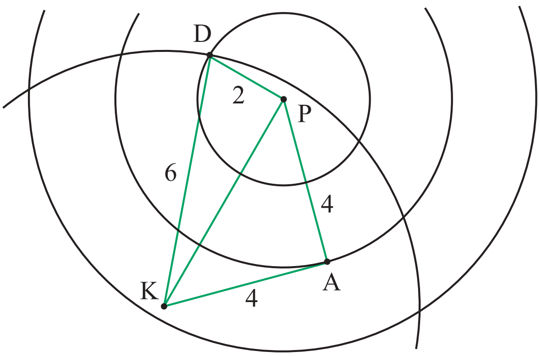

Figure 3

Le triangle PDK vérifie la relation de Pythagore $\left(6^2 = 2^2 + \left(4\sqrt{2}\right)^2\right)$. D'où

$\widehat{DPK} = 90°$ et, comme $\widehat{KPA} = 45°$, la disposition des angles conduit à :

$$\widehat{APD} = 135°.$$

Isolons de même (figure 4) la configuration AD'PK.

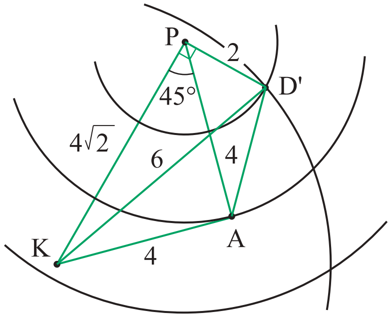

Figure 4

PKD′ est rectangle, mais, cette fois, la disposition des angles fait que

$$\widehat{APD'} = 90° - 45° = 45°.$$

Remarque : P est le milieu de [DD′], puisque $\widehat{KPD} = \widehat{KPD'} = 90°$, DP = D′P…

II. De ABD rectangle isocèle vers P

ÉTUDE AVEC PD = 2, PA = 4, PB = 6.

1. Détermination de P

CLÉS

① L'ignorance des unités entraîne celle des longueurs PA, PB, PD. Par contre, **leurs rapports sont connus**.
② *Profitons-en pour construire* P, *à partir de* A, B, D, *grâce au théorème* :
« *Le lieu des points* M *tels que* MA/MB = k, *est (*dans le plan considéré ! !, avec A et B fixes, et k constant, $k \neq 1$*) le cercle de diamètre* [EF], E *et* F *divisant* [AB] *dans le rapport k, l'un intérieurement, l'autre extérieurement* ».

N.B. ① Si nous avons fait un peu de géométrie…, la division (A, B, E, F) est harmonique, le faisceau (M ; A, B, E, F) aussi, (ME) et (MF) sont les bissectrices de $\widehat{\mathrm{AMB}}$. C'est même la clé d'une démonstration du théorème (sans utiliser, comme actuellement, barycentre et produit scalaire).
② Dans la brochure, André Guillemot ne cite pas le théorème mais l'utilise implicitement par sa démonstration (qu'il reprend) avec barycentre et produit scalaire.

DÉVELOPPEMENT

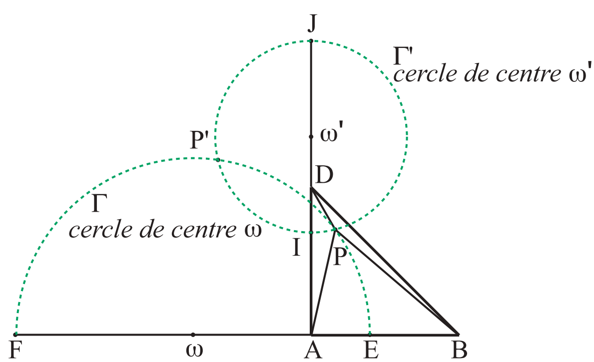

Figure 5

– La condition $\dfrac{\mathrm{PB}}{\mathrm{PA}} = \dfrac{3}{2}$ donne un lieu de P : le cercle Γ de diamètre [EF] … avec $\dfrac{\mathrm{EB}}{\mathrm{EA}} = \dfrac{\mathrm{FB}}{\mathrm{FA}} = \dfrac{3}{2}$.

– La condition $\dfrac{\mathrm{PA}}{\mathrm{PD}} = 2$ donne un autre lieu de P : le cercle Γ′ de diamètre [IJ] … avec $\dfrac{\mathrm{IA}}{\mathrm{ID}} = \dfrac{\mathrm{JA}}{\mathrm{JD}} = 2$.

Pour que PA, PB, PD *remplissent les conditions requises, il faut et il suffit que* P *soit à l'intersection des deux cercles …* si tant est qu'elle ne soit pas « imaginaire ».

Si je fais les tracés, il est évident que les cercles sont sécants.
Aucune imprécision « normale » de dessin ne peut l'empêcher. À mon sens, ce serait alors donner une mauvaise image des maths que d'exiger et même de conseiller des calculs.
(Cependant, si, pour le plaisir … on s'y livre, je donne les résultats pour les rayons et pour la distance des centres, en désignant par c la longueur AB : rayons $\frac{6c}{5}$ et $\frac{2c}{3}$, distance des centres $\frac{4c}{15}\sqrt{34}$. D'où…)
Nous obtenons deux points P *et* P′, P *intérieur au triangle* ADB *et* P′ *extérieur.*

2. Valeurs numériques de $\widehat{APD}$ et $\widehat{AP'D}$.

• Pour $\widehat{APD}$:

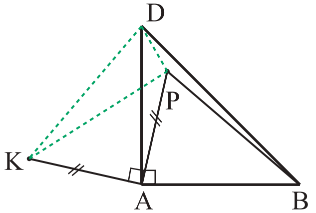

Figure 6

Abandonnons la figure générale. Pour obtenir la valeur de $\widehat{APD}$, j'utilise le « conseil » de Créteil, c'est-à-dire la rotation $\mathcal{R}$(A ; B $\to$ D), ce qui me ramène à la configuration de la figure 3 reproduite ici en figure 6.

• Pour $\widehat{AP'D}$:
Avec le même objectif, j'utilise encore la rotation $\mathcal{R}$(A ; B $\to$ D).
Alors P′ $\to$ K′ et, le triangle AP′K′ étant rectangle isocèle, $\widehat{AP'K'} = 45°$, cependant que K′P′ = $4\sqrt{2}$.
Comme K′D = P′B, ainsi que pour la figure 6 le triangle P′DK′ est rectangle en P′.
Donc

$$\widehat{AP'D} = \widehat{K'P'D} - \widehat{K'P'A}$$
$$= 90° - 45° = 45°.$$

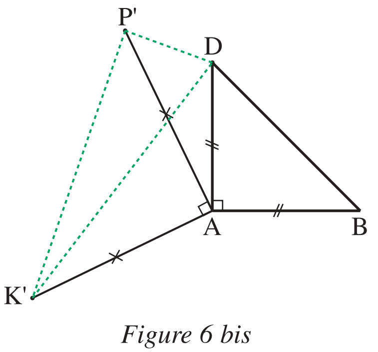

Figure 6 bis

On peut en déduire que, figure 5, les points A, P, D, P′ sont cocycliques.

Remarque : Les deux triangles DPK et DP′K′, qui ont les mêmes mesures des côtés (pas avec la même unité !), sont semblables (au collège on pourra dire : « à l'échelle l'un de l'autre » ou « l'un est un agrandissement de l'autre »).

REMARQUES :

① Sans construire les triangles KPD ou KP′D, on peut les *découvrir rectangles en leur appliquant la formule d'Al-Kashi* pour trouver cos $\widehat{\text{KPD}}$ ou cos $\widehat{\text{KP'D}}$. Le cosinus est zéro. D'où…

② Avec la rotation (A, D → B) la démonstration se déroule évidemment de même.

③ Et avec les similitudes (D, A → B) ou (D, B → A) ? Nous y reviendrons. Mais, ici, ce serait « Pourquoi faire simple quand on peut faire compliqué ! »

④ *Pour la recherche de la valeur de* $\widehat{\text{APD}}$, André Guillemot a développé, dans la brochure, une méthode intrinsèque à la figure générale. En voici la trame :

– la figure, bien faite, permet de conjecturer que $\widehat{\text{APB}}$ est voisin de 135°, et un logiciel de géométrie dynamique donnerait 135°.

– pour le démontrer, André Guillemot suppose que PA = 4, PD = 2 et $\widehat{\text{APD}}$ = 135°. Il en déduit que, dès lors (et avec des calculs qui montrent qu'il en irait autrement avec $\widehat{\text{APD}} \neq 135°$), PB = 6. D'où…

III. Liens par le calcul

… *entre le côté x* (= AB = AD) *du triangle rectangle isocèle* ADB *et les longueurs* PA, PD, PB.

Je traduis, ici, dans le plan ADB, une étude, avec une pyramide, de Bruno ALAPLANTIVE, chaleureusement remercié pour cet apport.
Soit la longueur AB (ou AD) exprimée avec la même unité (inconnue !) que PA…

CLÉ : Évaluer HA et KA en fonction de x, puis déterminer x par $\text{AH}^2 + \text{AK}^2 = \text{AP}^2$.

OUTIL : La relation de Pythagore ou, si l'on connaît, le théorème (dérivé) d'invariance de $\text{PA}^2 - \text{PB}^2$ lorsque P se déplace sur une perpendiculaire à (AB). Pour éviter les cas de figure j'utiliserai les mesures algébriques (à défaut, envisager P dans les divers quadrants formés par (AB) et (AD)) en orientant de A vers B et de A vers D.

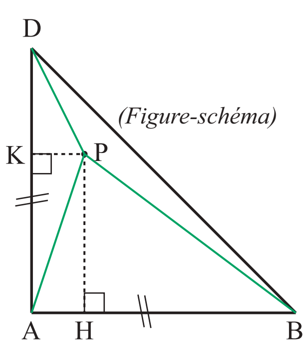

Figure 7

DÉVELOPPEMENT :
Si P existe, soit H et K ses projetés respectifs sur (AB) et (AD).

$$\text{PB}^2 - \text{PA}^2 = \text{HB}^2 - \text{HA}^2$$
$$= \left(\overline{\text{AB}} - \overline{\text{AH}}\right)^2 - \text{HA}^2$$

soit

$$36 - 16 = x^2 - 2x\overline{\text{AH}}$$

ou encore

$$2x\overline{\text{AH}} = x^2 - 20$$

soit

$$\overline{\mathrm{AH}} = \frac{x^2-20}{2x}.$$

De même

$$\overline{\mathrm{AK}} = \frac{x^2+12}{2x}.$$

Or $\mathrm{AH}^2 + \mathrm{AK}^2 = \mathrm{KH}^2 = \mathrm{AP}^2$.
Dès lors

$$\left(\frac{x^2-20}{2x}\right)^2 + \left(\frac{x^2+12}{2x}\right)^2 = 16.$$

D'où, après réductions, l'équation bicarrée :

$$x^4 - 40x^2 + 272 = 0.$$

qui se résout en posant $x^2 = y$:

$$\Delta' = 400 - 272 = 128 = 64 \times 2.$$

$$y = 20 \pm 8\sqrt{2}.$$

Donc deux valeurs pour y.

D'où deux valeurs pour x (positif) : $x_1 = \sqrt{20+8\sqrt{2}}$ et $x_2 = \sqrt{20-8\sqrt{2}}$, soit :

$$x_1 = 2\sqrt{5+2\sqrt{2}} \text{ et } x_2 = 2\sqrt{5-2\sqrt{2}}.$$

De là une construction possible des triangles APD *et* AP′D *correspondants*.

On notera, de plus, que $\overline{\mathrm{AK}}$ est toujours positif tandis que $\overline{\mathrm{AH}}$ est positif pour x_1 et négatif pour x_2.
D'où les positions de P *par rapport au triangle* ADB.

Valeurs de $\widehat{\mathrm{APD}}$ *?* (P_1 pour $\overline{\mathrm{AH}} > 0$ et P_2 pour $\overline{\mathrm{AH}} < 0$)

La relation d'Al-Kashi donne, pour $\widehat{\mathrm{APD}}$:

$$20 \pm 8\sqrt{2} = 4 + 16 - 16\cos\widehat{\mathrm{APD}}.$$

D'où $\cos\widehat{\mathrm{APD}} = \pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, soit $\widehat{\mathrm{AP_1D}} = 135°$ et $\widehat{\mathrm{AP_2D}} = 45°$.

Remarque : La connaissance des coordonnées de $\mathrm{P}\left(\overline{\mathrm{AH}} \text{ et } \overline{\mathrm{AK}}\right)$ permet de situer P par rapport à la droite (DB).
On retrouvera ainsi les positions des deux méthodes précédentes.

IV. Compatibilité des PA, PB, PD, toujours avec ABD isocèle rectangle

Soit PA = a, PD = d, PB = b.

MÉTHODE DU I

L'existence des triangles ADB ou AD′B′ est liée à l'existence des points D et D′ communs aux cercles δ et β'.
D'où, puisque leurs rayons respectifs sont d et b, et que la distance de leurs centres est $a\sqrt{2}$, la double condition nécessaire et suffisante :

$$|b-d| \leq a\sqrt{2} \leq b+d.$$

La figure 2 présente le cas où D et D′ sont diamétralement opposés sur le cercle δ, ce qui induit que $\widehat{\mathrm{APD}}$ et $\widehat{\mathrm{APD'}}$ sont supplémentaires. Ceci a lieu si et seulement si les triangles KPD et KD′P sont rectangles en P, c'est-à-dire $b^2 = d^2 + \left(a\sqrt{2}\right)^2$.

Hors de là $\widehat{\mathrm{KPD}}$ *peut toujours être calculé par son cosinus donné par la formule d'Al-Kashi.*

Mais la valeur de l'angle $\widehat{\mathrm{APD}}$, *obtenue à partir de* $\widehat{\mathrm{KPD}}$ *et de* $\widehat{\mathrm{KPA}}$ (= 45°), *dépend de la disposition de ces deux derniers angles*, tantôt à ajouter, tantôt à soustraire…

Lorsque les cercles δ et β' sont tangents, $\widehat{\mathrm{KPD}} = 0°$ ou $\widehat{\mathrm{KPD}} = 180°$.

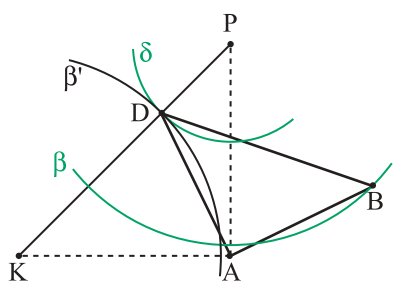

Figure 8

($\widehat{\mathrm{KPD}} = 0°$ et $\widehat{\mathrm{APD}} = \widehat{\mathrm{APK}} = 45°$)

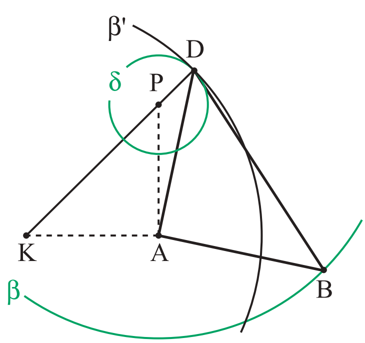

Figure 9

($\widehat{\mathrm{KPD}} = 180°$ et $\widehat{\mathrm{APD}} = \widehat{\mathrm{KPD}} - \widehat{\mathrm{APK}} = 135°$)

Autre cas : D et D′ sont tous deux dans le demi-plan de frontière (AP) qui contient K.

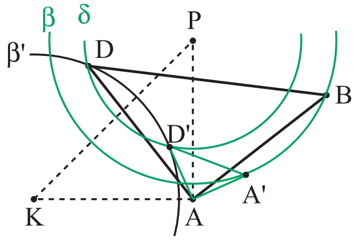

Figure 10

$\widehat{\mathrm{DPA}} = \widehat{\mathrm{DPK}} + 45°$, $\widehat{\mathrm{D'PA}} = \widehat{\mathrm{APK}} - \widehat{\mathrm{D'PK}} = 45° - \widehat{\mathrm{DPK}}$.

Donc $\widehat{\mathrm{DPA}}$ et $\widehat{\mathrm{D'PA}}$ sont complémentaires.

Remarque : *Il est possible de choisir a, b, d pour avoir les angles* $\widehat{\mathrm{APD}}$ *souhaités.*

Par exemple, supposons que je veuille $\widehat{\mathrm{APD}} = 75°$, ce qui pourrait correspondre à la figure 10.

Il suffit alors que $\widehat{\mathrm{DPK}} = 30°$, c'est-à-dire avec la formule d'Al-Kashi, que :

$$b^2 = \left(a\sqrt{2}\right)^2 + d^2 - 2ad\cos 30°,$$

soit

$$b^2 = 2a^2 + d^2 - ad\sqrt{3}.$$

Il suffit, a et d étant choisis, de calculer ainsi b…

Mais on pourrait obtenir $\widehat{\mathrm{APD'}} = 75°$ … lorsque D′ est extérieur à KPA et $\widehat{\mathrm{APD'}} = 30°$ (soit lorsque $\widehat{\mathrm{DPK}} = 75°$)…

Il y a ainsi une multiplicité de cas de figures. Si nous le pouvons, nous mettrons une animation sur le site APMEP (à consulter).

MÉTHODE DU II

L'un des deux cercles Γ, Γ′ étant donné, on peut, en faisant varier l'autre, décider de l'existence de P et P′.
En couplant avec l'utilisation de $\mathcal{R}$(A, B → D), pour le § II.1 on replonge dans les résultats précédents.

UN CAS PARTICULIER

Soit PD = d, puis PA = PB = a.
Alors le cercle Γ de la figure 5 est remplacé par la médiatrice Δ de [AB].
Il s'agit donc d'étudier l'intersection de Δ et du cercle Γ′.

Si PD = 2 et PA = PB = 4, avec c = AB = AD, Γ′ a un rayon $\frac{2c}{3}$ (cf. § II.1) tandis que Δ est à la distance $\frac{c}{2}$ du centre ω' du cercle Γ′.

Il y a deux points possibles : P et P′.

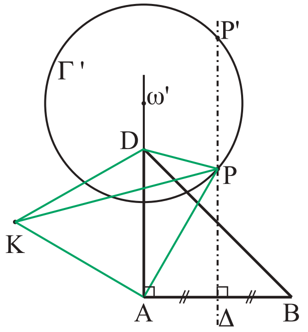

Figure 11

$\widehat{APD} = 45° + \widehat{KPD}$

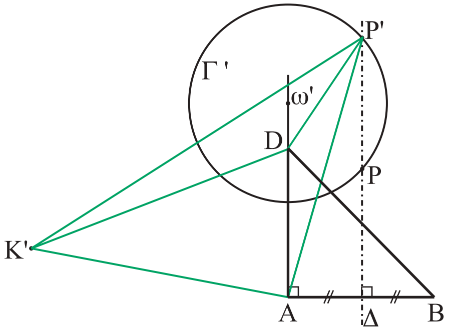

Figure 12

$\widehat{AP'D} = 45° - \widehat{K'P'D}$

Or les triangles KPD et K′DP′ ont mêmes mesures des côtés : $4\sqrt{2}$; 2 ; 4. Ils sont semblables (au Collège : « à l'échelle »). D'où $\widehat{KPD} = \widehat{K'P'D}$.

Donc $\widehat{APD}$ et $\widehat{AP'D}$ sont complémentaires.

Avec Al-Kashi, $\cos\widehat{KPD} = \frac{5\sqrt{2}}{8}$. D'où $\widehat{KPD} \approx 27{,}9°$, puis $\widehat{APD} \approx 72{,}9°$ et $\widehat{AP'D} \approx 17{,}1°$.

EXERCICE

Soit ABD isocèle rectangle en A.

Déterminer P tel que PB = PD et que $\widehat{APD}$ ait une mesure imposée. Discuter l'existence et le nombre de solutions.

(N.B. Il n'est pas indispensable d'utiliser le concept d'arc capable).

MÉTHODE DU III

Avec les notations a, b, d, j'obtiens

$$\overline{AH} = \frac{x^2 + a^2 - b^2}{2x} \text{ et } \overline{AK} = \frac{x^2 + a^2 - d^2}{2x}.$$

D'où l'équation :

$$\left(\frac{x^2 + a^2 - b^2}{2x}\right)^2 + \left(\frac{x^2 + a^2 - d^2}{2x}\right)^2 = a^2,$$

équation bicarrée … pas très sympa … à laquelle on demanderait d'avoir un discriminant positif. Cela devrait nous conduire à la condition trouvée précédemment...

V. Changeons la nature de ABD

en considérant en ce V, que les conditions imposées à PA, PD, PB sont compatibles avec la nature de ABD. Je reviendrai là-dessus au VI.

Quand les caractères du triangle* ABD *sont de moins en moins particuliers et varient, qu'advient-il des méthodes de résolution précédentes ? et de leurs résultats ?

1. ABD simplement isocèle, en A.

MÉTHODE DU 1

Rien de changé si l'on parle de la rotation $\mathcal{R}$(A; B → D), ici rotation (A, 2α), avec $\widehat{\mathrm{BAD}} = 2\alpha$. (cf. figure 13).
Le triangle KPD est constructible avec : PK = 2PA sin α, PD, KD = PB.

D'où $\widehat{\mathrm{KPD}}$ si l'on veut, associable à $\widehat{\mathrm{KPA}}$ (= 90° − α), pour obtenir $\widehat{\mathrm{APD}}$.

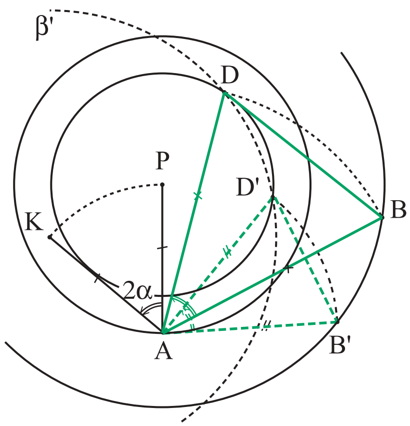

Figure 13

Cette figure 13 a été réalisée avec PD = 3 ; PA = 4 ; PB = 6 et $\widehat{\mathrm{BAD}}$ = 50°. Il y a alors deux configurations :
P, triangle ABD
P′, triangle AB′D′ (et ces triangles sont semblables).

Ici $\widehat{\mathrm{APD}} = 360° - \widehat{\mathrm{KPD}} - \widehat{\mathrm{KPA}}$ et $\widehat{\mathrm{APD'}} = \widehat{\mathrm{KPD'}} - \widehat{\mathrm{KPA}}$.

Avec les notations a, b, d, la condition d'existence de D et D′ est celle des triangles KPD, KPD′, soit :

$$|b-d| \le 2a\sin\alpha \le b+d.$$

MÉTHODE DU II

Rien de changé en son principe : elle n'utilisait pas $\widehat{BAD} = 90°$.
Pour le § II.2, même remarque que ci-dessus pour la rotation.

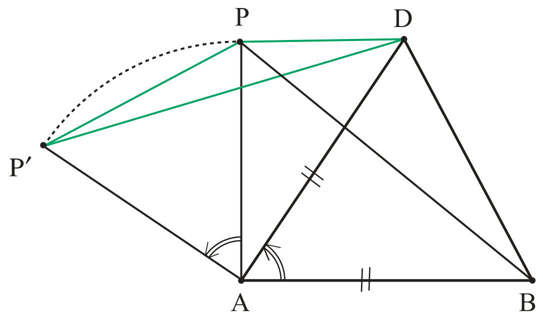

Figure 14

MÉTHODE DU III

Trop dépendante de $\widehat{BAD} = 90°$. Je l'abandonne.

2. ABD Non isocèle.

MÉTHODE DU I

Remplacer la rotation par une similitude ayant pour centre l'un des sommets (les trois jouent ici le même rôle) et envoyant un second sommet sur le troisième.

MÉTHODE DU II

Toujours valable en son principe du § II.1, elle n'utilisait pas AB = AD !
Pour la recherche des valeurs numériques du § II.2, la rotation sera, comme ci-dessus, remplacée par une similitude.

MÉTHODE DU III

Encore valable pour ABD rectangle. Sinon, à abandonner.

3. Une conclusion ?

Le principe de la MÉTHODE 2, sauf pour la recherche d'une valeur remarquable de $\widehat{APD}$ par démonstration, joue dans tous les cas. Il est simple et efficace pour construire $\widehat{APD}$.
La MÉTHODE 1 et son alter ego du § II.2 sont toujours valables en utilisant des rotations ou des similitudes.
La MÉTHODE 3 n'est compétente que pour ABD rectangle.

VI. Compatibilité des données, avec ABD quelconque

Toujours à un facteur multiplicatif près, peut-on avoir des choix arbitraires de **PD, PA, PB** ***?***

Quels sont le nombre des solutions et leur configuration selon $\widehat{\mathrm{BAD}}$***, selon*** **AB/AD** ***?***

1. Aperçu selon la méthode 1

Le triangle PDP′ (cf. figure 2) *existe-t-il?*

EXEMPLE 1 : $\widehat{\mathrm{BAD}} = 2\alpha$, PA = 2, PB = 6, PD = 1.
Nous avons, pour les côtés du triangle PDP′ : 4 sin α ; 6; 1.
Il existe si et seulement si $5 \leq 4\sin\alpha \leq 7$. Or il n'en est rien... *Configuration impossible !*

EXEMPLE 2 : $\widehat{\mathrm{BAD}} = 90°$; les valeurs précédentes de PA, PB, PD ; et AB = 3AD.

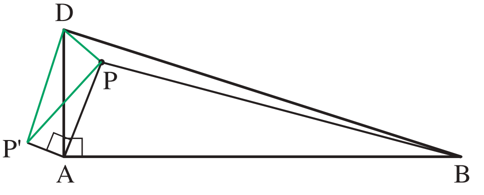

Figure 15

Similitude (A, B → D) : P → P′ tel que $\mathrm{AP'} = \dfrac{2}{3}$ et DP′ = 2.

PP′D doit avoir pour côtés 1 ; 2 ; $\dfrac{2}{3}\sqrt{10}$.

Avons-nous $1 \leq \dfrac{2}{3}\sqrt{10} \leq 3$, soit $9 \leq 40 \leq 81$? Oui...

2. Aperçu selon la méthode 2

(cf. figure 3)
Parmi les trois valeurs PA, PB, PD, j'en choisis deux, par exemple PA et PD.
Dès lors, avec [AD] arbitraire, le cercle Γ′ est fixé.
Des variations de [AB] en longueur et direction, et de PB, modifient le cercle Γ et sa position par rapport à Γ′.

Un logiciel de géométrie dynamique nous y amusera (sans faire tout changer en même temps!) Nous essaierons de faire une animation sur le site APMEP. Le consulter.

Voici trois instantanés :

EXEMPLE 1 :

PD = 1, PA = 2, PB = 3 (comme sur la figure 3), mais $\widehat{BAD} = 33°$ (cf. figure 16)
Les cercles Γ et Γ′ ne sont pas sécants !
Configuration impossible !

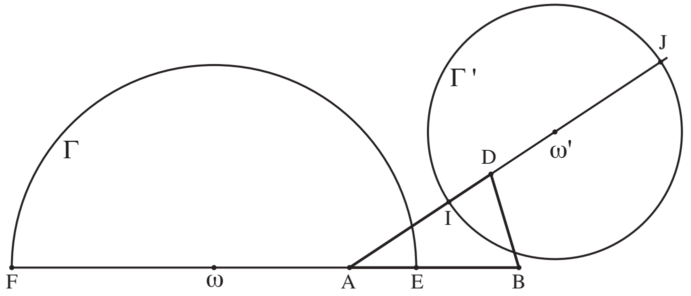

Figure 16

EXEMPLES 2 et 3 : (figures 17 et 18)

Pour les deux : PD = 3, PA = 7, PB = 31 et $\widehat{BAD} = 90°$.
Mais :
– Figure 17 : AB = AD. *Configuration impossible.*
– Figure 18 : AB = 3AD. *Deux configurations possibles.*

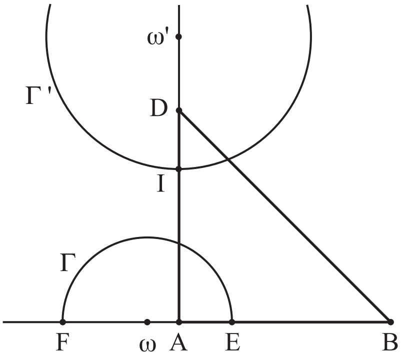

Figure 17

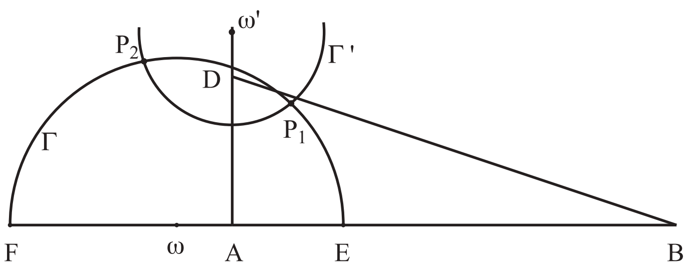

Figure 18

EXERCICE

On fait construire le triangle PAD (le choix des données détermine le niveau de difficulté). En exigeant que B soit sur la perpendiculaire en A à (AD), on impose PB. Selon le choix de PB. étudier l’existence de solutions.
S’il y en a, calculer AD.

VII. Quelques souhaits ...

① La situation-problème étudiée ici peut être une *source d’exercices de recherche* permettant d’aller plus ou moins loin, d’aider plus ou moins, y compris en citant le théorème sur le lieu des point M tels que MA/MB = k, …

② *L’usage fait ici des rotations n’exige aucune étude théorique préalable. Le concept expérimental suffit* et les **démonstrations n’en sont pas moins rigoureuses** (d’ailleurs il n’est pas interdit pour autant de s’aider d’un calque).
Dès lors toutes les études utilisant la rotation sont possibles avant la Première…
Sous la forme de l’énoncé donné aux Olympiades, reprise ici au § II.2., cela peut être aussi proposé en fin de Collège…
Les calculs avec Al-Kashi renvoient à la Seconde, l’étude du § II.1., sauf aide, à la Première S, la similitude à la TS spécialité maths (ici en exemple facile).

③ À tous niveaux l’utilisation d’*un logiciel de géométrie dynamique* facilitera la perception des interactions entre les diverses données. Nous essaierons *de le montrer sur le site APMEP*.

④ Pour le problème plus particulier des Olympiades, on trouvera, dans la brochure APMEP et sur le site APMEP. *une autre solution, très jolie, niveau Collège*, mais peu généralisable, *due à François Parisot*.

⑤ **Reprenez le Bulletin Vert 456 !** Il étudie admirablement un problème voisin, issu de l’excellente revue « MATH-ÉCOLE » de la Suisse Romande : « **LA FORÊT TRIANGULAIRE** ». Là le triangle est équilatéral et il s’agit de calculer son aire.
Bruno ALAPLANTIVE et Jean-Pierre FRIEDELMEYER y ont utilisé la méthode exposée ici en I et j’y ai proposé la méthode ici exposée en II.1. Mais on y trouvera cinq autres solutions, *dont une autre de Bruno Alaplantive*, plus spécifique pour le calcul de l’aire. **Un régal !…**